Identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}(\theta \pm \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi \pm \cos\theta\operatorname{sen}\phi \qquad \cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$

$$\cos\theta\cos\phi = \tfrac{1}{2}\left[\cos(\theta+\phi)+\cos(\theta-\phi)\right] \qquad \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi = \tfrac{1}{2}\left[\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi)\right]$$

$$\operatorname{sen}\theta\cos\phi = \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\theta+\phi)+\operatorname{sen}(\theta-\phi)\right]$$

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}\left[1+\cos 2\theta\right] \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}\left[1-\cos 2\theta\right]$$

$$\cos\theta+\cos\phi = 2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2} \qquad \cos\theta-\cos\phi = 2\operatorname{sen}\frac{\theta+\phi}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$\operatorname{sen}\theta \pm \operatorname{sen}\phi = 2\operatorname{sen}\frac{\theta\pm\phi}{2}\cos\frac{\theta\mp\phi}{2}$$

$$\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta = 1 \qquad \sec^2\theta-\operatorname{tg}^2\theta = 1$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \qquad \text{[relación de Euler]}$$

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right) \qquad \operatorname{sen}\theta = \tfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$$

Funciones hiperbólicas

$$\cosh z = \tfrac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right) = \cos(iz) \qquad \operatorname{senh} z = \tfrac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right) = -i\operatorname{sen}(iz)$$

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z} \qquad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$$

$$\cosh^2 z-\operatorname{senh}^2 z = 1 \qquad \operatorname{sech}^2 z+\operatorname{tgh}^2 z = 1$$

Desarrollo de series

$$f(z) = f(a)+f'(a)(z-a)+\tfrac{1}{2!}f''(a)(z-a)^2+\tfrac{1}{3!}f'''(a)(z-a)^3+\cdots \qquad \text{[series de Taylor]}$$

$$e^{z} = 1+z+\tfrac{1}{2!}z^2+\tfrac{1}{3!}z^3+\cdots \qquad \ln(1+z) = z-\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3-\cdots\,[|z|<1]$$

$$\cos z = 1-\tfrac{1}{2!}z^2+\tfrac{1}{4!}z^4+\cdots \qquad \operatorname{sen} z = z-\tfrac{1}{3!}z^3+\tfrac{1}{5!}z^5-\cdots$$

$$\cosh z = 1+\tfrac{1}{2!}z^2+\tfrac{1}{4!}z^4+\cdots \qquad \operatorname{senh} z = z+\tfrac{1}{3!}z^3+\tfrac{1}{5!}z^5+\cdots$$

$$\operatorname{tg} z = z+\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{2}{15}z^5+\cdots\,[|z|<\pi/2] \qquad \operatorname{tgh} z = z-\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{2}{15}z^5-\cdots\,[|z|<\pi/2]$$

$$(1+z)^n = 1+nz+\frac{n(n-1)}{2!}z^2+\cdots\,[|z|<1] \qquad \text{[series binomial]}$$

Algunas derivadas

$$\frac{d}{dz}\operatorname{tg} z = \sec^2 z \qquad \frac{d}{dz}\operatorname{tgh} z = \operatorname{sech}^2 z$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{senh} z = \cosh z \qquad \frac{d}{dz}\cosh z = \operatorname{senh} z$$

Algunas integrales

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \qquad \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctgh} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsenh} x$$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln\cos x \qquad \int \operatorname{tgh} x\, dx = \ln\cosh x$$

$$\int \frac{dx}{x+x^2} = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) \qquad \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \ln\left(1+x^2\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh} x \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccos}(1/x) \qquad \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}} = \operatorname{arcsen}(\sqrt{x}) - \sqrt{x(1-x)}$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} \qquad \int \ln(x)dx = x\ln(x) - x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-mx^2}} = K(m), \qquad \text{integral elíptica completa de primera especie}$$

MECÁNICA CLÁSICA

MECÁNICA CLÁSICA

JOHN R. TAYLOR
Universidad de Colorado

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Registro bibliográfico (ISBD)
TAYLOR, JOHN R.
[Classical Mechanics. Español]
Mecánica clásica / John R. Taylor ; versión española traducida por Jesús Ildefonso Díaz con la colaboración de Alberto Casal Grau. – Barcelona : Reverté, 2013.
XIV, 866 p. : il. ; 25 cm.
Traducción de: Classical Mechanics. – Índice.
DL B. 14311-2013. - ISBN 978-84-291-4312-6
1. Mecánica. I. Díaz, Jesús Ildefonso, trad. II. Casal Grau, Alberto, col. III. Título.
531

Título de la obra original:

Classical Mechanics

Edición original en lengua inglesa publicada por:

University Science Books
Sausalito, California. U.S.A.

Copyright © 2005 by University Science Books. *All Rights Reserved*

Edición en español:

© Editorial Reverté, S. A., 2013

ISBN: 978-84-291-4312-6

Versión española traducida por

Jesús Ildefonso Díaz Díaz
Catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad Complutense de Madrid

con la colaboración de

Alberto Casal Grau
Licenciado en Ciencias Físicas

Maquetación: Mercedes Aicart Martínez
Diseño de la cubierta: David Kimura + Gabriela Varela

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
Fax: (34) 93 419 51 89
reverte@reverte.com
www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

Impreso en España - *Printed in Spain*

ISBN: 978-84-291-4312-6
Depósito legal: B. 14311-2013
Impreso por Liberdúplex, S. L. U.

1397

Índice de contenidos

Prólogo XI

PARTE I **Esenciales 1**

CAPÍTULO 1 **Leyes del movimiento de Newton 3**

1.1 Mecánica clásica 3
1.2 Espacio y tiempo 4
1.3 Masa y fuerza 11
1.4 Primera y segunda leyes de Newton; sistemas inerciales 14
1.5 La tercera ley y la conservación del momento 20
1.6 La segunda ley de Newton en coordenadas cartesianas 26
1.7 Coordenadas polares en dos dimensiones 30
Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 1 38
Problemas para el Capítulo 1 39

CAPÍTULO 2 **Proyectiles y partículas cargadas 47**

2.1 Resistencia del aire 47
2.2 Resistencia lineal del aire 51
2.3 Trayectoria y alcance en un medio lineal 59
2.4 Resistencia cuadrática del aire 63
2.5 Movimiento de una carga en un campo magnético uniforme 73
2.6 Exponenciales complejas 76
2.7 Solución para la carga en un campo B 78
Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 2 80
Problemas para el Capítulo 2 81

CAPÍTULO 3 **Momento y momento angular 91**

3.1 Conservación del momento 91
3.2 Cohetes 93
3.3 El centro de masa 95
3.4 Momento angular para una única partícula 99
3.5 Momento angular para varias partículas 103
Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 3 109
Problemas para el Capítulo 3 109

CAPÍTULO 4 **Energía 115**

4.1 Energía cinética y trabajo 115
4.2 Energía potencial y fuerzas conservativas 120
4.3 La fuerza como el gradiente de la energía potencial 128
4.4 La segunda condición para que F sea conservativa 131
4.5 Energía potencial dependiente del tiempo 134
4.6 Energía para sistemas lineales unidimensionales 136
4.7 Sistemas curvilíneos unidimensionales 143
4.8 Fuerzas centrales 148
4.9 Energía de interacción de dos partículas 153
4.10 Energía de un sistema de muchas partículas 160
Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 4 166
Problemas para el Capítulo 4 167

CAPÍTULO 5 **Oscilaciones 177**

5.1 La ley de Hooke 177
5.2 Movimiento armónico simple 180
5.3 Osciladores bidimensionales 187
5.4 Oscilaciones amortiguadas 190
5.5 Oscilaciones amortiguadas forzadas 197
5.6 Resonancia 207
5.7 Series de Fourier* 213
5.8 Solución en serie de Fourier para el oscilador forzado* 219
5.9 El desplazamiento RCM; teorema de Parseval* 225
Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 5 228
Problemas para el Capítulo 5 229

* Las secciones marcadas con un asterisco podrían ser omitidas en una primera lectura.

CAPÍTULO 6 **Cálculo de variaciones 237**

6.1 Dos ejemplos 238
6.2 La ecuación de Euler-Lagrange 241
6.3 Aplicaciones de la ecuación de Euler-Lagrange 244
6.4 Más de dos variables 249
Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 6 254
Problemas para el Capítulo 6 255

CAPÍTULO 7 **Ecuaciones de Lagrange 261**

7.1 Ecuaciones de Lagrange para el movimiento libre 262
7.2 Sistemas ligados; un ejemplo 271
7.3 Sistemas ligados en general 272
7.4 Prueba de las ecuaciones de Lagrange con ligaduras 276
7.5 Ejemplos de ecuaciones de Lagrange 281
7.6 Momentos generalizados y coordenadas ignorables 294
7.7 Conclusión 295
7.8 Más sobre las leyes de conservación* 296
7.9 Ecuaciones de Lagrange para fuerzas magnéticas* 301
7.10 Multiplicadores de Lagrange y fuerzas de ligadura* 304
Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 7 310
Problemas para el Capítulo 7 311

CAPÍTULO 8 **Problemas de fuerzas centrales para dos cuerpos 323**

8.1 El problema 323
8.2 Centro de masa y coordenadas relativas; masa reducida 325
8.3 Ecuaciones del movimiento 327
8.4 El problema unidimensional equivalente 330
8.5 La ecuación de la órbita 337
8.6 Órbitas de Kepler 339
8.7 Órbitas de Kepler no acotadas 346
8.8 Cambios de órbita 348
Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 8 352
Problemas para el Capítulo 8 353

CAPÍTULO 9 **Mecánica en sistemas no inerciales 359**

9.1 Aceleración sin rotación 360
9.2 Las mareas 363
9.3 El vector velocidad angular 369
9.4 Derivadas temporales en un sistema rotatorio 373

9.5 La segunda ley de Newton en un sistema en rotación 376
9.6 La fuerza centrífuga 378
9.7 La fuerza de Coriolis 383
9.8 Caída libre y la fuerza de Coriolis 387
9.9 El péndulo de Foucault 390
9.10 Fuerza de Coriolis y aceleración de Coriolis 394
Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 9 395
Problemas para el Capítulo 9 397

CAPÍTULO 10 **Movimiento rotacional de cuerpos rígidos 403**

10.1 Propiedades del centro de masa 403
10.2 Rotación alrededor de un eje fijo 409
10.3 Rotación alrededor de un eje cualquiera; el tensor de inercia 415
10.4 Ejes principales de inercia 425
10.5 Cálculo de los ejes principales; ecuaciones de autovalores 427
10.6 Precesión de una peonza sometida a un momento de fuerza débil 432
10.7 Ecuaciones de Euler 434
10.8 Ecuaciones de Euler con momento de fuerza cero 437
10.9 Ángulos de Euler* 441
10.10 Movimiento de una peonza* 445
Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 10 448
Problemas para el Capítulo 10 449

CAPÍTULO 11 **Osciladores acoplados y modos normales 457**

11.1 Dos masas y tres muelles 458
11.2 Muelles idénticos y masas iguales 462
11.3 Dos osciladores débilmente acoplados 468
11.4 Método lagrangiano: el péndulo doble 473
11.5 El caso general 479
11.6 Tres péndulos acoplados 484
11.7 Coordenadas normales* 488
Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 11 492
Problemas para el Capítulo 11 42

PARTE II **Temas más avanzados 499**

CAPÍTULO 12 **Mecánica no lineal y caos 501**

12.1 Linealidad y no linealidad 502
12.2 El péndulo amortiguado forzado (PAF) 507

12.3 Algunas características esperadas del PAF 509
12.4 El PAF: aproximación al caos 513
12.5 Caos y sensibilidad hacia las condiciones iniciales 523
12.6 Diagramas de bifurcación 532
12.7 Órbitas en el espacio de estados 536
12.8 Secciones de Poincaré 545
12.9 La aplicación logística 549
Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 12 566
Problemas para el Capítulo 12 567

CAPÍTULO 13 **Mecánica hamiltoniana 575**

13.1 Variables básicas 576
13.2 Ecuaciones de Hamilton para sistemas unidimensionales 578
13.3 Ecuaciones de Hamilton en varias dimensiones 583
13.4 Coordenadas ignorables 591
13.5 Ecuaciones de Lagrange frente a ecuaciones de Hamilton 592
13.6 Órbitas en el espacio de fases 595
13.7 Teorema de Liouville* 600
Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 13 608
Problemas para el Capítulo 13 609

CAPÍTULO 14 **Teoría de colisiones 615**

14.1 Ángulo de dispersión y parámetro de impacto 616
14.2 Sección eficaz de colisión 619
14.3 Generalizaciones de la sección eficaz 623
14.4 Sección eficaz diferencial de dispersión 628
14.5 Cálculo de la sección eficaz diferencial 632
14.6 Dispersión de Rutherford 635
14.7 Secciones eficaces en sistemas diferentes* 640
14.8 Relación entre los ángulos de dispersión del CM y del laboratorio* 644
Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 14 648
Problemas para el Capítulo 14 649

CAPÍTULO 15 **Relatividad especial 655**

15.1 Relatividad 656
15.2 Relatividad galileana 657
15.3 Los postulados de la relatividad especial 662
15.4 La relatividad del tiempo; dilatación del tiempo 664

15.5 Contracción de la longitud 671
15.6 La transformación de Lorentz 673
15.7 Fórmula relativista de composición de velocidades 678
15.8 Espacio-tiempo tetradimensional; cuadrivectores 681
15.9 Producto escalar invariante 687
15.10 El cono de luz 689
15.11 Regla del cociente y el efecto Doppler 695
15.12 Masa, cuadrivelocidad y cuadrimomento 698
15.13 Energía, la cuarta componente del momento 704
15.14 Colisiones 711
15.15 Fuerza en relatividad 717
15.16 Partículas sin masa; el fotón 721
15.17 Tensores* 725
15.18 Electrodinámica y relatividad 729
Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 15 734
Problemas para el Capítulo 15 736

CAPÍTULO 16 **Mecánica de medios continuos 751**

16.1 Movimiento transversal de una cuerda tensada 753
16.2 La ecuación de ondas 755
16.3 Condiciones de contorno; ondas en una cuerda finita* 760
16.4 La ecuación de ondas tridimensional 765
16.5 Fuerzas de volumen y superficie 769
16.6 Esfuerzo y tensión: el módulo de elasticidad 774
16.7 El tensor de esfuerzos 777
16.8 El tensor de tensiones para un sólido 783
16.9 Relación entre esfuerzo y tensión: la Ley de Hooke 789
16.10 La ecuación del movimiento para un sólido elástico 793
16.11 Ondas longitudinales y transversales en un sólido 796
16.12 Fluidos: descripción del movimiento* 798
16.13 Ondas en un fluido* 803
Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 16 806
Problemas para el Capítulo 16 808

APÉNDICE Diagonalización de matrices reales simétricas 815

Lecturas avanzadas 823

Respuestas a algunos problemas impares 825

Índice alfabético 853

Prólogo

Este libro está destinado a estudiantes de ciencias físicas que ya hayan estudiado algo de mecánica como parte de un curso de introducción a la física (física de primer curso en una universidad típica) y que estén así preparados para una visión más profunda del tema. El libro se elaboró a partir del curso de mecánica para el nivel de primer ciclo ofrecido por el Departamento de Física en la Universidad de Colorado que siguen, principalmente, los físicos de segundo ciclo pero también algunos matemáticos, ingenieros y químicos. Casi todos estos estudiantes han cursado un año de introducción a la física y poseen al menos un conocimiento mínimo de las leyes de Newton, la energía, el momento, el movimiento armónico simple, entre otros. He diseñado este libro sobre ese conocimiento mínimo para proporcionar entonces una comprensión más profunda de las ideas básicas, continuando después con el desarrollo de temas más avanzados, tales como las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana, la mecánica de sistemas no inerciales, el movimiento de cuerpos rígidos, los osciladores acoplados, la teoría del caos y otros temas más.

Como es sabido, la mecánica es el estudio de cómo se mueven las cosas -cómo se desplaza un electrón por el tubo de un televisor, cómo vuela una pelota de béisbol por el aire, cómo se desplaza un cometa alrededor del Sol. La mecánica clásica es la parte de la mecánica desarrollada por Galileo y Newton en el siglo diecisiete y reformulada después por Lagrange y Hamilton en los siglos dieciocho y diecinueve. Durante más de doscientos años, parecía que la mecánica clásica era la *única* forma posible de mecánica y que podía explicar el movimiento de todos los sistemas concebibles.

A principios del siglo veinte se dieron dos grandes revoluciones que mostraron que la mecánica clásica no podía explicar el movimiento de objetos que viajan a velocidades cercanas a la de la luz, ni el de partículas subatómicas que se mueven en el interior de los átomos. Desde 1900 hasta 1930, aproximadamente, se produjo el desarrollo de la mecánica relativista, fundamentalmente para describir cuerpos que se mueven muy rápido, y de la mecánica cuántica, principalmente para describir los sistemas subatómicos. Frente a esa competencia, se podría pensar que la mecánica clásica ha perdido gran parte de su interés e importancia. Sin embargo, de hecho, la mecánica clásica es ahora, a principios del siglo veintiuno, tan importante y encantadora como siempre. Esta adaptabilidad se debe a tres hechos. El primero es que, como siempre ha ocurrido, existen tantos sistemas físicos interesantes que se describen mejor en términos clásicos. Para entender

las órbitas de vehículos espaciales y de las partículas cargadas en los aceleradores modernos, es necesario entender la mecánica clásica. El segundo es que los avances recientes en mecánica clásica, asociados principalmente al desarrollo de la teoría del caos, han dado lugar a nuevas ramas completas de la física y de las matemáticas y que han cambiado nuestra idea de la noción de causalidad. Son estas nuevas ideas las que han hecho que algunas de las mejores mentes de la física se hayan sentido atraídos otra vez por el estudio de la mecánica clásica. Finalmente, el tercero es que actualmente es tan cierto como siempre que un buen entendimiento de la mecánica clásica es un prerrequisito para el estudio de la relatividad y de la mecánica cuántica.

Los físicos tienden a usar el término «mecánica clásica» más bien a la ligera. Muchos lo utilizan para la mecánica de Newton, Lagrange y Hamilton. Para ellos la «mecánica clásica» excluye la relatividad y la mecánica cuántica. Por otro lado, en algunas áreas de la física, hay una cierta tendencia a incluir la relatividad como una parte de la «mecánica clásica». Para esta otra gente «mecánica clásica» significa «mecánica no cuántica». Como un reflejo de esta segunda concepción, algunos cursos llamados de «mecánica clásica» incluyen una introducción a la relatividad. Por esta misma razón he incluido un capítulo sobre mecánica relativista, que se puede utilizar o no, según se desee.

Una característica atractiva de todo curso sobre mecánica clásica es que es una oportunidad magnífica para aprender a usar muchas de las técnicas matemáticas necesarias en tantas otras ramas de la física (vectores, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales, números complejos, series de Taylor, series de Fourier, cálculo de variaciones, matrices, etc.). He intentado ofrecer al menos un repaso mínimo o introductorio para cada uno de estos temas (indicando referencias a lecturas más avanzadas) y he tratado de mostrar su uso en el contexto relativamente sencillo de la mecánica clásica. Espero que cuando se termine de leer este libro se tenga la completa seguridad de que realmente se pueden utilizar estas herramientas tan importantes.

Inevitablemente, hay más material en el libro del que podría ser impartido en un curso semestral. He intentado suavizar la dificultad de decidir qué parte omitir. El libro está dividido en dos partes: la Parte I contiene once capítulos de material «esencial» que debería leerse preferentemente en orden, mientras que la Parte II contiene cinco «temas avanzados» que son mutuamente independientes y que pueden ser leídos indistintamente sin hacer referencia al resto. Esta división es, naturalmente, algo arbitraria. En realidad, cómo se vaya a utilizar todo ese material depende de la propia preparación del profesor (o de la de los estudiantes). En nuestro curso semestral en la Universidad de Colorado, me di cuenta de que necesitaba impartir con continuidad casi toda la Parte I, y sólo utilicé la Parte II al dar a elegir a los estudiantes uno de esos capítulos en forma de trabajo complementario al curso. (Una actividad que parece que les gustó). Algunos de los profesores que dieron clase con una versión preliminar del libro creen que sus estudiantes estaban suficientemente preparados como para poder pasar por los primeros cinco capítulos rápidamente y tomarlos tan sólo como un repaso rápido, lo que les permitió dedicar más tiempo a la Parte II. En los centros en los que el curso de mecánica dura dos cuatrimestres, se vio que era posible exponer toda la Parte I y buena parte de la Parte II.

Como los capítulos de la Parte II son mutuamente independientes, es posible abordar algunos de ellos antes de terminar la Parte I. Por ejemplo, el Capítulo 12 sobre caos se podría abordar inmediatamente después del Capítulo 5 sobre oscilaciones, y el Capítulo 13 sobre mecánica hamiltoniana se podría leer inmediatamente después del Capítulo 7 sobre mecánica lagrangiana. Algunas secciones están marcadas con un asterisco para indicar que se pueden omitir sin perder

continuidad. (Esto no quiere decir que no sean importantes. ¡Ciertamente espero que se aborden en una lectura posterior!)

Como siempre, en todo texto de física es crucial hacer muchos de los ejercicios que aparecen al final de cada capítulo. He incluido un gran número de ellos para dar muchas oportunidades tanto al profesor como al alumno. Algunos de ellos son aplicaciones sencillas de las ideas del capítulo y algunos otros son extensiones de esas ideas. He listado los problemas por sección, así que tan pronto como se haya leído una sección dada se podría (y probablemente se debería) intentar resolver algunos de los problemas listados para esa sección. (Naturalmente, los problemas listados para una sección dada normalmente requieren conocimientos de secciones anteriores. Sin embargo, afirmo aquí que no se necesitará material de secciones posteriores). He intentado clasificar los problemas para indicar su nivel de dificultad en una escala que va desde una estrella (⋆), que significa un ejercicio directo que incluye normalmente un solo concepto principal, hasta tres estrellas (⋆⋆⋆), que se refiere a un problema más complicado que incluye varios conceptos y que probablemente requerirá un esfuerzo y un tiempo considerables. Esta clasificación es bastante subjetiva, muy aproximada, y sorprendentemente difícil de hacer; agradecería sugerencias sobre los posibles cambios que el lector considere que se pudieran hacer.

Algunos problemas requieren el uso de ordenador para hacer gráficas, resolver ecuaciones diferenciales, etc. Ninguno de ellos requiere programas específicos. Algunos se pueden hacer con un sistema relativamente sencillos tal como MathCad o incluso simplemente una hoja de cálculo como Excel. Otros requieren sistemas más sofisticados, como Mathematica, Maple o Matlab. (A propósito, mi experiencia personal sobre el curso para el que está escrito este libro es que es una oportunidad magnífica para que los estudiantes aprendan a utilizar alguno de estos sistemas tan útiles). Los problemas que requieren el uso de ordenador están indicados mediante [Ordenador]. He intentado clasificarlos como ⋆⋆⋆ o al menos ⋆⋆ cuando lleva mucho tiempo elaborar el algoritmo necesario. Naturalmente, estos problemas resultarán más fáciles para aquellos estudiantes que tengan alguna experiencia con los programas requeridos.

Cada capítulo termina con un resumen llamado «Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo *xx*». Espero que sea de utilidad como comprobación de lo aprendido en el capítulo, tan pronto como se acabe de leer, y como referencia para más adelante, cuando se trate de encontrar una fórmula cuyos detalles han sido olvidados.

Hay mucha gente a la que me gustaría agradecer su ayuda y sugerencias. De entre los profesores de la Universidad de Colorado están Larry Baggett, John Cary, Mike Dubson, Scott Parker, Steve Pollock y Mike Ritzwoller. De otras instituciones, los siguientes profesores revisaron el manuscrito o utilizaron en sus clases una edición preliminar de este libro:

Meagan Aronson, U de Michigan
Dan Bloom, Kalamazoo College
Peter Blunden, U de Manitoba
Andrew Cleland, UC Santa Barbara
Gayle Cook, Cal Poly, San Luis Obispo
Joel Fajans, UC Berkeley
Richard Fell, Brandeis University
Gayanath Fernando, U de Connecticut
Jonathan Friedman, Amherst College
David Goldhaber-Gordon, Stanford

Thomas Griffy, U de Texas
Elisabeth Gwinn, UC Santa Barbara
Richard Hilt, Colorado College
George Horton, Rutgers
Lynn Knutso, U de Wisconsin
Jonathan Maps, U de Minnesota, Duluth
John Markert, U de Texas
Michael Moloney, Rose-Hulman Institute
Colin Morningstar, Carnegie Mellon
Declan Mulhall, Cal Poly, San Luis Obispo
Carl Mungan, US Naval Academy
Robert Pompi, SUNY Binghamton
Mark Semon, Bates College
James Shepard, U de Colorado
Richard Sonnenfeld, New Mexico Tech
Edward Stern, U de Washington
Michael Weinert, U de Wisconsin, Milwaukee
Alma Zook, Pomona College

Estoy muy agradecido a todos ellos y también a sus estudiantes, sus muchos comentarios han sido de gran ayuda. Agradezco en particular a Carl Mungan su asombrosa labor de vigilancia para encontrar erratas, puntos oscuros y ambigüedades. Quiero agradecer también la labor de Jonathan Friedman y su estudiante, Ben Heidenreich, que me salvaron de un error realmente embarazoso en el Capítulo 10. Estoy especialmente agradecido a mis dos amigos y colegas, Mark Semon del Bates College y Dave Goodmanson de la Boeing Aircraft Company, por revisar el manuscrito minuciosamente y por facilitarme, literalmente, cientos de sugerencias; lo mismo para Christopher Taylor de la Universidad de Wisconsin por su paciente ayuda con Mathematica y con los misterios de Latex. El Profesor Manuel Fernando Ferreira da Silva, de la Universidade da Beira Interior, Portugal, leyó la primera impresión de este libro con asombrosa meticulosidad y me hizo innumerables sugerencias, muchas de ellas menores, pero varias cruciales, y todas de mucho valor. Bruce Armbruster y Jane Ellis de University Science Books son el sueño hecho realidad de todo autor. Mi editor copista, Lee Young, es una rareza excepcional, un experto en inglés *y* que lo es además en física; él sugirió muchas mejoras importantes. Para terminar, quiero dar muy especialmente las gracias a mi esposa Debby. Estar casada con un autor puede llegar a ser muy pesado, y ella lo lleva muy bien y algunas veces hasta con humor. Como profesora de inglés al más alto nivel, me ha enseñado casi todo lo que sé sobre escribir y editar. Por todo ello le estaré eternamente agradecido.

A pesar de todos nuestros esfuerzos, seguramente habrá aún algunos errores en este libro. Estaría muy agradecido si el lector me indicase cualquier tipo de error que encuentre. Material complementario y otros asuntos de interés se pueden encontrar en la página web de University Science Books, www.uscibooks.com.

John R. Taylor
Departmento de Física
Universidad de Colorado
Boulder, Colorado 80309, USA
John.TaylorColorado.edu

PARTE I

Esenciales

CAPÍTULO 1 Leyes del movimiento de Newton
CAPÍTULO 2 Proyectiles y partículas cargadas
CAPÍTULO 3 Momento y momento angular
CAPÍTULO 4 Energía
CAPÍTULO 5 Oscilaciones
CAPÍTULO 6 Cálculo de variaciones
CAPÍTULO 7 Ecuaciones de Lagrange
CAPÍTULO 8 Problemas de fuerzas centrales para dos cuerpos
CAPÍTULO 9 Mecánica en sistemas no inerciales
CAPÍTULO 10 Movimiento rotacional de cuerpos rígidos
CAPÍTULO 11 Osciladores acoplados y modos normales

La Parte I de este libro contiene material que casi cualquiera consideraría como conocimientos esenciales para un estudiante de física universitario de segundo ciclo. La Parte II contiene temas opcionales más avanzados que se pueden escoger según los gustos personales y el tiempo disponible. La distinción entre «esencial» y «opcional» es, por supuesto, discutible, y su impacto en el lector depende mucho de los gustos personales y la preparación. Por ejemplo, si se está bien preparado, se puede decidir que los primeros cinco capítulos de la Parte I se pueden tomar como un repaso rápido, o incluso omitir por completo. En la práctica, la distinción es esta: los once capítulos de la Parte I están diseñados para leerse por orden, y al escribir cada capítulo, he supuesto que el lector está familiarizado con la mayoría de las ideas de los capítulos anteriores, bien por haberse leído, bien porque ya se han visto en alguna otra parte. En contraste, he intentado elaborar los capítulos de la Parte II independientes entre sí, de manera que se podría leer cualquiera de ellos en cualquier orden, una vez que se hubiera visto la mayor parte del material de la Parte I.

CAPÍTULO 1

Leyes del movimiento de Newton

1.1 Mecánica clásica

La Mecánica es el estudio de cómo se mueven los objetos: cómo se mueven los planetas alrededor del Sol, cómo un esquiador se desliza por una pendiente, o cómo un electrón se mueve alrededor del núcleo de un átomo. Por lo que sabemos en las fechas actuales, los griegos fueron los primeros en pensar seriamente sobre la Mecánica, hace más de dos mil años, y su Mecánica representa un paso tremendo en la evolución de la ciencia moderna. Sin embargo, desde el punto de vista de los modelos actuales, las ideas griegas estaban seriamente equivocadas y no serán relevantes para el presente libro. El desarrollo de la Mecánica que conocemos hoy comenzó con el trabajo de Galileo (1564-1642) y Newton (1642-1727). Es el formalismo de Newton, con sus tres leyes del movimiento, lo que será nuestro punto de partida en este libro.

A finales del siglo dieciocho y principios del diecinueve se desarrollaron dos formulaciones alternativas de la Mecánica, que portan el nombre de sus inventores: el matemático y astrónomo francés Lagrange (1736-1813) y el matemático irlandés Hamilton (1805-1865). Las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de la Mecánica son completamente equivalentes a la de Newton, pero proporcionan soluciones radicalmente más simples a muchos problemas complicados y son también el punto de partida de varios desarrollos modernos. El término *Mecánica Clásica* es un poco difuso, pero normalmente se entiende que abarca estas tres formulaciones equivalentes de la Mecánica, y es por esto que contenido del presente libro se denomina Mecánica Clásica.

Hasta los comienzos del siglo XX, parecía que la Mecánica Clásica era el *único* tipo de Mecánica, que describía correctamente todos los posibles tipos de movimiento. Por esa época, en el intervalo de veinte años de 1905 a 1925, se hizo evidente

que la Mecánica Clásica no describía correctamente el movimiento de objetos que se desplazan a velocidades cercanas a la de la luz, ni tampoco el de las partículas microscópicas en el interior de los átomos y moléculas. El resultado fue el desarrollo de dos nuevas formas de Mecánica completamente diferentes: la Mecánica Relativista, que describe los movimientos a velocidades muy altas, y la Mecánica Cuántica, que describe el movimiento de partículas microscópicas. He incluido una introducción a la Relatividad en el Capítulo 15 («opcional»). La Mecánica Cuántica requiere un libro completo aparte (o incluso varios libros) y no he hecho ningún intento de presentarla, ni siquiera en forma de una breve introducción.

Aunque la Mecánica Clásica ha sido reemplazada por la Mecánica Relativista y la Mecánica Cuántica en sus respectivos dominios, existe todavía un amplio conjunto de problemas, interesantes y de actualidad, en los que la Mecánica Clásica proporciona una descripción completa y precisa de los posibles movimientos. De hecho, especialmente con la aparición de la Teoría del Caos en las últimas décadas, la investigación en Mecánica Clásica se ha intensificado y el tema se ha convertido en una de las áreas más de moda de la Física. El propósito de este libro es ofrecer una sólida base en el interesante campo de la Mecánica Clásica. Cuando resulte apropiado, discutiré problemas en el marco de la formulación newtoniana, pero también intentaré enfatizar aquellas situaciones en las que las formulaciones más nuevas de Lagrange y Hamilton son preferibles y usarlas cuando ese sea el caso. Al nivel de este libro, el enfoque lagrangiano tiene muchas ventajas importantes sobre el newtoniano, y la usaremos repetidas veces, empezando en el Capítulo 7. En contraste a esto, las ventajas de la formulación hamiltoniana se ponen de manifiesto sólo a un nivel más avanzado, y, así, pospondré la introducción a la Mecánica hamiltoniana hasta el Capítulo 13 (aunque se puede leer en cualquier momento una vez que se haya leído el Capítulo 7).

Al escribir el libro, he supuesto que los lectores han cursado una introducción a la Mecánica newtoniana como se suele ofrecer en un curso de primer año típico sobre «Física General». Este capítulo contiene un breve repaso de ideas que supongo que son conocidas por todos los lectores.

1.2 Espacio y tiempo

Las tres leyes del movimiento de Newton se formulan en términos de cuatro conceptos cruciales básicos: las nociones de espacio, tiempo, masa y fuerza. Esta sección repasa los dos primeros de ellos: el espacio y el tiempo. Además de una breve descripción de la visión clásica del espacio y del tiempo, doy un rápido repaso de la manipulación con vectores, que nos sirven para identificar a los distintos puntos del espacio.

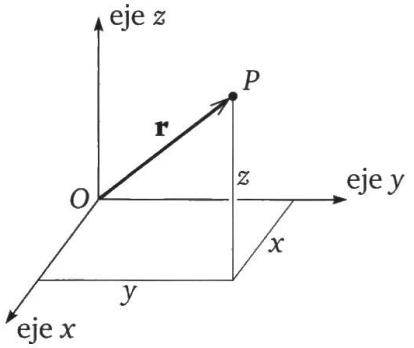


Figura 1.1. El punto P se identifica por su vector de posición $\mathbf{r}$, que representa la posición de P relativa a un origen elegido O. El vector $\mathbf{r}$ se puede determinar por sus componentes (x, y, z) relativas a unos ejes elegidos $Oxyz$.

Espacio

Cada punto P del espacio tridimensional en el que vivimos se puede identificar por un vector de posición $\mathbf{r}$ que especifica la distancia y la dirección de P desde un origen O elegido como en la Figura 1.1. Existen muchas maneras diferentes de identificar un vector, de las cuales una de las más comunes es dar sus componentes (x, y, z) en las direcciones de tres ejes escogidos perpendiculares entre sí. Una manera frecuente de expresar esto es la de introducir tres vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$, apuntando a lo largo de los tres ejes y escribir

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}. \tag{1.1}$$

En un nivel elemental, es útil elegir una única buena notación, tal como (1.1), y continuar con ella. En trabajos más avanzados, sin embargo, es casi imposible evitar usar diferentes notaciones. Diferentes autores tienen distintas preferencias (otra elección común es usar $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ para lo que yo llamo $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$) y uno se debe acostumbrar a poder leer todas ellas. Más aún, prácticamente, cada notación tiene sus inconvenientes, lo que la pueden hacer inutilizable en algunas circunstancias. Por ello, mientras que cada uno puede ciertamente escoger su notación preferida, debe también desarrollar una mínima tolerancia ante notaciones diferentes.

A veces es conveniente abreviar (1.1) escribiendo sencillamente

$$\mathbf{r} = (x, y, z). \tag{1.2}$$

Obviamente, esta notación no es del todo coherente con (1.1), pero normalmente es totalmente inequívoca, por afirmar sencillamente que $\mathbf{r}$ es el vector cuyas componentes son x, y, z. Cuando la notación(1.2) sea la más conveniente, no dudaré en utilizarla. Para la mayoría de los vectores, indico las componentes mediante subíndices x, y, z. Así, el vector velocidad $\mathbf{v}$ tiene de componentes v_x, v_y, v_z y la aceleración $\mathbf{a}$ tiene de componentes a_x, a_y, a_z.

A medida que nuestras ecuaciones se hacen más complicadas puede no ser lo más conveniente el escribir los tres términos en sumas como (1.1); se debería usar más bien el signo de sumatorio $\sum$ seguido de un único término. La notación(1.1) no permite este atajo, y por esta razón a veces renombraré las tres componentes x, y, z de $\mathbf{r}$ como r_1, r_2, r_3, y los tres vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ como $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Esto es, definimos

$$r_1 = x, \qquad r_2 = y, \qquad r_3 = z,$$

y

$$\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{y}}, \qquad \mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{z}}.$$

(El símbolo $\mathbf{e}$ se utiliza normalmente para vectores unitarios, pues $\mathbf{e}$ representa una abreviatura de «eins», que significa «uno» en alemán). Con estas notaciones, (1.1) se convierte en

$$\mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} r_i\mathbf{e}_i. \tag{1.3}$$

Para una ecuación sencilla como esta, la forma (1.3) no tiene una ventaja real sobre (1.1), pero con ecuaciones más complicadas (1.3) es significativamente más conveniente, y utilizaré esta notación cuando sea apropiado.

Operaciones con vectores

En nuestro estudio de la Mecánica haremos uso repetido de varias operaciones que se pueden realizar con vectores. Si $\mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$ son vectores de componentes

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3),$$

entonces su **suma** (o resultante) $\mathbf{r} + \mathbf{s}$ se calcula sumando las componentes correspondientes, de tal manera que

$$\mathbf{r} + \mathbf{s} = (r_1 + s_1,\ r_2 + s_2,\ r_3 + s_3). \tag{1.4}$$

(Uno puede autoconvencerse de que esta regla es equivalente a las familiares reglas del triángulo y del paralelogramo para la suma de vectores). Un ejemplo importante de suma vectorial es la fuerza resultante sobre un objeto: cuando dos fuerzas $\mathbf{F}_a$ y $\mathbf{F}_b$ actúan sobre un objeto, el efecto es el mismo que el de una sola fuerza, la fuerza resultante, que nos es más que el vector suma

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b$$

como la que proporciona la ley de adición de vectores (1.4).

Si c es un escalar (esto es, un número real) y $\mathbf{r}$ es un vector, el *producto* $c\mathbf{r}$ viene dado por

$$c\mathbf{r} = (cr_1, cr_2, cr_3). \tag{1.5}$$

Esto significa que $c\mathbf{r}$ es un vector en la misma dirección[1] como $\mathbf{r}$ con magnitud igual a c veces la magnitud de $\mathbf{r}$. Por ejemplo, si un objeto de masa m (un escalar) tiene una aceleración $\mathbf{a}$ (un vector), la segunda ley de Newton afirma que la fuerza $\mathbf{F}$ resultante sobre el objeto será siempre igual al producto $m\mathbf{a}$ tal y como se expresa en (1.5).

Hay dos tipos importantes de producto que se pueden formar a partir de cualquier pareja de vectores. Primero, el **producto escalar** (o **producto con punto**) de dos vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$ viene dado por cualquiera de las dos fórmulas equivalentes

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} = rs\cos\theta \tag{1.6}$$

$$= r_1s_1 + r_2s_2 + r_3s_3 = \sum_{n=1}^{3} r_n s_n \tag{1.7}$$

donde r y s denotan las magnitudes de los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$, y θ es el ángulo entre ellos. (Para ver una prueba de que estas dos definiciones son iguales, vea el Problema 1.7). Por ejemplo, si una fuerza $\mathbf{F}$ actúa sobre un objeto que se mueve a lo largo de una pequeña distancia $d\mathbf{r}$, el trabajo realizado por la fuerza es el producto escalar $\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}$, como el que proporcionan las expresiones (1.6) o (1.7). Otro uso importante del producto escalar es para definir la magnitud de un vector: la magnitud (o longitud) de cualquier vector $\mathbf{r}$ se denota por $|\mathbf{r}|$ o r y, por el teorema de Pitágoras, es igual a $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$. Por (1.7) esto es lo mismo que

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}. \tag{1.8}$$

El producto escalar $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$ se abrevia frecuentemente como $\mathbf{r}^2$.

El segundo tipo de producto de dos vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$ es el **producto vectorial** (o **producto con aspa**), que se define como el vector $\mathbf{p} = \mathbf{r}\times\mathbf{s}$ de componentes

$$\left.\begin{aligned} p_x &= r_y s_z - r_z s_y \\ p_y &= r_z s_x - r_x s_z \\ p_z &= r_x s_y - r_y s_x \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

[1] Aunque esto es lo que la gente suele decir, uno debe tener cuidado: si c es negativo, $c\mathbf{r}$ apunta a la dirección *opuesta* a $\mathbf{r}$.

o, análogamente

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s} = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ r_x & r_y & r_z \\ s_x & s_y & s_z \end{bmatrix},$$

donde «det» significa determinante. Cualquiera de estas dos definiciones implica que $\mathbf{r} \times \mathbf{s}$ es un vector perpendicular a ambos, a $\mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$, con un sentido dado por la familiar regla de la mano derecha y una magnitud $rs \operatorname{sen} \theta$ (Problema 1.15). El producto vectorial juega un papel importante en la descripción del movimiento rotacional. Por ejemplo, la tendencia de una fuerza $\mathbf{F}$ (actuando en un punto $\mathbf{r}$) a causar que un cuerpo rote alrededor del origen viene dada por el «momento de fuerza» de $\mathbf{F}$ alrededor de O, definido como el producto vectorial $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

Diferenciación de vectores

Muchas de las leyes de la física (quizá la mayoría) incluyen vectores, y la mayoría de ellas incluyen derivadas de funciones vectoriales. Hay tantas maneras de derivar una función vectorial que existe toda una materia llamada Cálculo vectorial, de la cual desarrollaremos una buena parte a lo largo de este libro. Por ahora sólo mencionaré el tipo más simple de derivada de una función vectorial (que denominaremos simplemente como vector): la derivada temporal de un vector que depende del tiempo. Por ejemplo, la velocidad $\mathbf{v}(t)$ de una partícula es la derivada temporal de la posición de la partícula $\mathbf{r}(t)$; esto es, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. Análogamente, la aceleración es la derivada temporal de la velocidad, $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$.

La definición de derivada de un vector es bastante parecida a la de un escalar. Recordemos que si $x(t)$ es una función escalar de t, entonces definimos su derivada como

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

donde $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ es la variación en x a medida que el tiempo va desde t a $t + \Delta t$. Exactamente de la misma manera, si $\mathbf{r}(t)$ es cualquier vector que depende de t, definimos sus derivada

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \tag{1.10}$$

donde

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \tag{1.11}$$

es la correspondiente variación en $\mathbf{r}(t)$. Hay, por supuesto, muchas cuestiones delicadas sobre la existencia de este límite. Afortunadamente, ninguna de ellas nos

interesan aquí: todos los vectores que nos vamos a encontrar serán diferenciables, y supondremos que el límite requerido existe. A partir de la definición (1.10), uno puede demostrar que la derivada cumple todas las propiedades que uno podría esperar. Por ejemplo, si $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{s}(t)$ son dos vectores que dependen de t, entonces la derivada de su suma es justo lo que se esperaría:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}+\mathbf{s}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{s}}{dt}. \tag{1.12}$$

Análogamente, si $\mathbf{r}(t)$ es un vector y $f(t)$ es un escalar, entonces la derivada del producto $f(t)\mathbf{r}(t)$ viene dada por la versión apropiada de la regla del producto,

$$\frac{d}{dt}(f\,\mathbf{r}) = f\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{df}{dt}\mathbf{r}. \tag{1.13}$$

Si usted es de la clase de persona que disfruta demostrando este tipo de proposiciones, quizá quiera mostrar que resulta de la definición (1.10). Afortunadamente, si usted no disfruta con este tipo de actividad, no debe preocuparse, y puede dar sin problemas estos resultados por válidos.

Otro resultado que merece mencionarse tiene que ver con las componentes de la derivada de un vector. Supongamos que $\mathbf{r}$, con componentes x, y, z, es la posición de una partícula en movimiento, y supongamos que queremos saber la velocidad de la partícula $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. Cuando derivemos la suma

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}, \tag{1.14}$$

la regla (1.12) nos da la suma de tres derivadas y, mediante la regla del producto (1.13), cada una de estas derivadas contiene dos términos. Por tanto, en principio, la derivada de (1.14) incluye seis términos en total. Sin embargo, los vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ no dependen del tiempo, así que sus derivadas temporales son cero. Por ello, tres de estos seis términos son cero, y eso nos deja sólo tres términos:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{y}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{z}}. \tag{1.15}$$

Comparando esto con el desarrollo estándar

$$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}}$$

vemos que

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad \text{y} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{1.16}$$

Dicho con palabras, las componentes cartesianas de $\mathbf{v}$ son precisamente las derivadas de las componentes correspondientes de $\mathbf{r}$. Este es un resultado que utilizaremos todo el tiempo (normalmente sin tan siquiera pensar en ello) para resolver problemas de mecánica elemental. Lo que lo hace especialmente valioso es lo siguiente: es cierto sólo porque los vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ son constantes, de tal manera que sus derivadas no están en (1.15). Veremos que en la mayoría de los sistemas de coordenadas, tales como las coordenadas polares, los vectores unitarios básicos *no* son constantes, y el resultado correspondiente a (1.16) es apreciablemente menos transparente. Como veremos, en problemas donde necesitamos trabajar en coordenadas no cartesianas, es considerablemente más difícil expresar velocidades y aceleraciones en términos de las coordenadas de $\mathbf{r}$.

Tiempo

La visión clásica es que el tiempo es un parámetro universal único t sobre el cual todos los observadores están sincronizados. Esto es, si todos los observadores están equipados con relojes precisos, todos debidamente sincronizados, entonces estarán de acuerdo en el instante en que un suceso dado ocurrió. Sabemos, por supuesto, que esta visión no es exactamente correcta: según la teoría de la relatividad, dos observadores en movimiento relativo *no* están de acuerdo en todos los instantes. Sin embargo, en el dominio de la mecánica clásica, con todas las velocidades mucho menores que la velocidad de la luz, las diferencias entre los tiempos medidos son completamente despreciables, y adoptaré la suposición clásica de un único tiempo universal (excepto, por supuesto, en el Capítulo 15 sobre relatividad). Aparte de la obvia ambigüedad en la elección del origen del tiempo (el tiempo que elegimos para denotar a $t = 0$), todos los observadores están de acuerdo en los tiempos de todos los sucesos.

Sistemas de referencia

Casi todo problema en mecánica clásica supone una elección (explícita o implícita) de un *sistema de referencia*, esto es, una elección de un origen espacial y unos ejes para identificar posiciones como en la Figura 1.1 y una elección de un origen temporal para medir los tiempos. La diferencia entre dos sistemas puede ser bastante pequeña. Por ejemplo, pueden diferir sólo en su elección del origen de tiempo, lo que en un sistema es $t = 0$ en el otro puede ser $t' = t_0 \neq 0$. O los dos sistemas pueden tener el mismo origen de espacio y tiempo, pero tener diferentes orientaciones de los tres ejes espaciales. Eligiendo cuidadosamente el sistema de referencia y aprovechando la ventaja de usar estas diferentes posibilidades, a veces es posible simplificar el trabajo. Por ejemplo, en problemas de bloques que deslizan por planos inclinados muchas veces ayuda elegir un eje que apunte en la dirección de la pendiente.

Una diferencia más importante aparece cuando dos sistemas están en movimiento relativo; esto es, cuando un origen se mueve con respecto al otro. En la Sección 1.4 veremos que no todos esos sistemas son físicamente equivalentes.[2] En ciertos sistemas especiales, llamados **sistemas inerciales**, las leyes básicas son ciertas en su forma estándar simple. (Debido a que una de estas leyes básicas es la primera ley de Newton, la ley de inercia, a estos sistemas se les llama inerciales). Si un segundo sistema está *acelerando o rotando* respecto de un sistema inercial, entonces este segundo sistema es no inercial, y las leyes básicas —en particular, las leyes de Newton— no se cumplen en su forma estándar en este segundo sistema. Encontraremos que la distinción entre sistemas inerciales y no inerciales es primordial en nuestra discusión de la mecánica clásica. Esto juega un papel incluso más explícito en la teoría de la relatividad.

1.3 Masa y fuerza

Los conceptos de masa y fuerza son esenciales en la formulación de la mecánica clásica. Las definiciones adecuadas de estos conceptos han preocupado a muchos filósofos de ciencia y son el tema de tratados en la literatura. Afortunadamente no tenemos que preocuparnos mucho sobre estas cuestiones aquí. Basándonos en su curso de introducción a la física general de cursos elementales, usted tiene ya una idea razonablemente buena de lo que significan masa y fuerza, y es fácil describir cómo se definen y se miden estos parámetros en muchas situaciones reales.

Masa

La masa de un objeto caracteriza la inercia del objeto: su resistencia a ser acelerado. Una roca grande es difícil de acelerar, y su masa es grande. Una piedra pequeña es fácil de acelerar, y su masa es pequeña. Para cuantificar estas ideas naturales tenemos que definir una unidad de masa y a continuación proporcionar una manera de medir la masa de cualquier objeto en términos de la unidad escogida. La unidad aceptada internacionalmente es el kilogramo y se define arbitrariamente como la masa de un trozo de platino-iridio que se encuentra en el Buró de Pesos y Medidas, situado a las afueras de París. Para medir la masa de cualquier otro objeto, necesitamos una manera de comparar masas. En principio, esto se puede hacer con una balanza inercial como la que se muestra en la Figura 1.2. Los dos objetos en comparación se ajustan a los extremos opuestos de una barra ligera y rígida, a la cual se da un tirón fuerte de su punto medio. Si las masas son iguales, se acelerarán igualmente y la barra se

[2] Este enunciado es correcto incluso en la teoría de la relatividad.

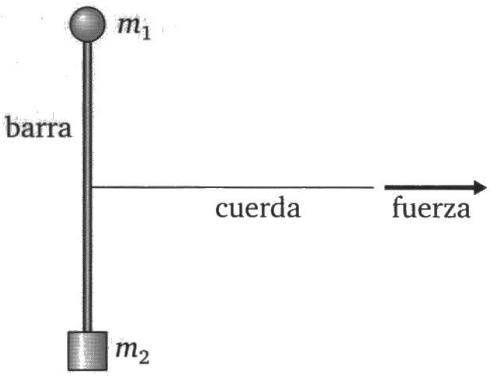


Figura 1.2. Una balanza inercial compara las masas m_1 y m_2 de dos objetos que están fijos en los extremos opuestos de una barra rígida. Las masas son iguales si y sólo si una fuerza aplicada en el punto medio de la barra provoca que se aceleren al mismo ritmo, de tal manera que la barra no rote.

moverá sin rotar; si las masas no son iguales, la mayor se acelerará menos, y la barra rotará mientras se mueve.

La virtud de la balanza inercial es que nos proporciona un método para comparar masas que está basado directamente en la noción de masa como la resistencia a ser acelerado. En la práctica, una balanza inercial sería muy incómoda de usar, y afortunadamente existen maneras mucho más sencillas de comparar masas, de las cuales la más fácil es pesar los objetos. Como seguramente recuerde de su curso de introducción a la física, la masa de un objeto resulta ser exactamente proporcional a su peso[3] (la fuerza gravitatoria del objeto) siempre que todas las medidas se realicen en el mismo sitio. Entonces dos objetos tienen la misma masa si y sólo si tienen el mismo peso (cuando se pesan en el mismo sitio), y una manera simple y práctica de comprobar si las dos masas son iguales es sencillamente pesarlas y ver si los pesos son iguales.

Utilizando métodos para comparar masas, podemos establecer fácilmente un esquema para medir masas arbitrarias. Primero, podemos construir un gran número de kilogramos estándar, cada uno comprobado con la masa original de 1 kg usando indistintamente la balanza inercial o la gravitatoria. Después, podemos construir múltiplos y fracciones del kilogramo, otra vez comprobándolas con nuestra balanza. (Comprobamos una masa de 2 kg en un extremo de la balanza con dos masas de 1 kg colocadas juntas en el otro extremo; comprobamos dos masas de medio kilogramo verificando que sus masas son iguales y que juntas equilibran una masa de uno; y así sucesivamente). Finalmente, podemos medir una masa desconocida colocándola en

[3] Esta observación recuerda los famosos experimentos de Galileo que mostraban que todos los objetos son acelerados al mismo ritmo por la gravedad. Los primeros experimentos modernos fueron dirigidos por el físico húngaro Eötvös (1848-1919), que demostró que el peso es proporcional a la masa salvo a lo sumo un error de uno sobre 10^9. Experimentos realizados en las últimas décadas han afinado aún más el error hasta alrededor de uno sobre 10^{12}.

un extremo de la balanza y cargando masas conocidas en el otro extremo hasta que se equilibren a una determinada precisión.

Fuerza

La noción informal de fuerza como un empuje o un tirón es un punto de partida sorprendentemente bueno para nuestra discusión de fuerzas. Somos ciertamente conscientes de las fuerzas que nosotros mismos empleamos. Cuando sujeto un saco de cemento, soy plenamente consciente de que estoy ejerciendo una fuerza hacia arriba sobre el saco; cuando empujo un cajón por un suelo rugoso, soy consciente de la fuerza horizontal que tengo que emplear en la dirección y sentido del movimiento. Las fuerzas ejercidas por objetos inanimados son un poco más difíciles de precisar, y, de hecho, debemos entender algo de las leyes de Newton para identificar tales fuerzas. Si suelto el saco de cemento, se acelera hacia el suelo; por ello, concluyo que debe haber otra fuerza —el peso del saco, la fuerza gravitatoria de la Tierra— tirando del saco hacia abajo. Mientras empujo el cajón por el suelo, observo que no se acelera, y concluyo que debe haber otra fuerza —rozamiento— empujando el cajón en la dirección opuesta. Uno de los objetivos más importantes para los estudiantes de mecánica elemental es aprender a examinar el entorno de un objeto e identificar todas las fuerzas que actúan sobre dicho objeto: ¿Cuáles son las cosas que tocan el objeto y las posibles fuerzas de contacto, como el rozamiento o la presión del aire? ¿Y cuáles son los objetos cercanos que pueden ejercer fuerzas de acción-a-distancia, como el tirón gravitatorio de la Tierra o la fuerza electrostática de un cuerpo cargado eléctricamente?

Si aceptamos que sabemos cómo identificar fuerzas, queda pendiente cómo medirlas. Como unidad de fuerza adoptamos naturalmente el newton (abreviado N) definido como la magnitud de cualquier fuerza única que acelera una masa de un kilogramo estándar con una aceleración de 1 m/s^2. Estando de acuerdo en lo que queremos decir por un newton, podemos proceder de varias maneras, por supuesto que todas ellas nos llevan a la misma conclusión final. El camino preferido por la mayoría de los filósofos de ciencia probablemente es utilizar la segunda ley de Newton para definir una fuerza general: una fuerza dada es 2 N si, por sí sola, acelera un kilogramo estándar con una aceleración de 2 m/s^2, y así sucesivamente. Este planteamiento no se corresponde mucho con la manera en que medimos las fuerzas en la práctica,[4] y para nuestra presente discusión un procedimiento más sencillo es

[4] Este planteamiento también crea la apariencia confusa de que la segunda ley de Newton es sólo una consecuencia de la definición de fuerza. Esto no es realmente cierto: cualquiera que sea la definición que escojamos para fuerza podremos comprobar gran parte de la segunda ley. Una ventaja de definir fuerza con balanzas de muelles es que separa la definición de fuerza de la base experimental de la segunda ley. Por supuesto, todas las definiciones comúnmente aceptadas proporcionan el mismo resultado final para el valor de cualquier fuerza dada.

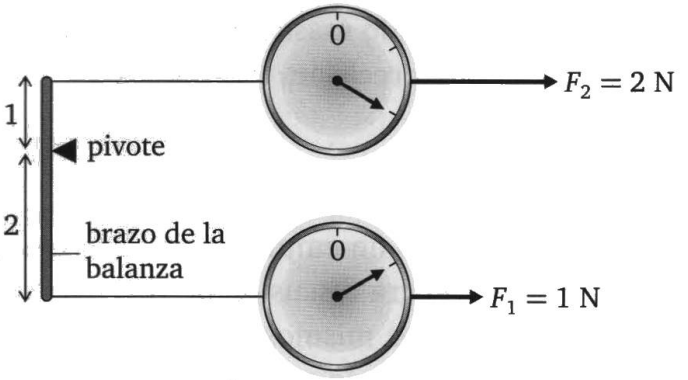


Figura 1.3. Una de las muchas maneras posibles para definir fuerzas de cualquier magnitud. La balanza de muelle de abajo ha sido calibrada para leer 1 N. Si el brazo de la balanza de la izquierda se ajusta de tal manera que los brazos de la palanca por encima y por debajo del pivote están en relación 1:2 y si la fuerza F_1 es 1 N, entonces la fuerza F_2 necesaria para equilibrar el brazo es 2 N. Esto nos permite calibrar la balanza de muelle superior para 2 N. Mediante el reajuste de los dos brazos de la palanca, podemos, en principio, calibrar la segunda balanza de muelle para medir cualquier fuerza.

utilizar varias balanzas de muelle. Usando nuestra definición del newton, podemos calibrar una primera balanza de muelle para leer 1 N. Entonces ajustando una segunda balanza de muelles con la primera, usando un brazo de balanza tal como se muestra en la Figura 1.3, podemos definir múltiplos y fracciones de un newton. Una vez tenemos una balanza de muelle completamente calibrada podemos, en principio, medir cualquier fuerza desconocida, comparándola con la balanza calibrada y leyendo su valor.

Hasta aquí hemos definido sólo la magnitud de una fuerza. Como ya debe saber, las fuerzas son vectores, y debemos definir sus direcciones. Esto se hace fácilmente. Si aplicamos una fuerza dada **F** (y ninguna otra fuerza) a cualquier objeto en reposo, la dirección de **F** está definida como la dirección de la aceleración resultante, esto es, la dirección en la que el cuerpo se desplaza.

Ahora que ya sabemos, al menos en principio, lo que queremos decir por posiciones, tiempos, masas y fuerzas, podemos proceder a discutir la piedra angular de nuestro tema: las tres leyes del movimiento de Newton.

1.4 Primera y segunda leyes de Newton; sistemas inerciales

En este capítulo voy a discutir las leyes de Newton tal como aplican a una **masa puntual**. Una masa puntual, o **partícula**, es una ficción adecuada, un objeto con masa, pero sin tamaño relativo, que puede moverse a través del espacio pero no tiene grados de libertad internos. Puede tener energía cinética «traslacional» (energía

de movimiento a través del espacio) pero no energía de rotación o vibraciones internas o deformaciones. Naturalmente, las leyes del movimiento son más sencillas para partículas puntuales que para cuerpos extensos, y esta es la razón principal por la cual empezamos con las primeras. Más adelante construiré la mecánica de cuerpos extensos a partir de la mecánica de partículas puntuales considerando los cuerpos extensos como una colección de muchas partículas separadas.

Sin embargo, conviene reconocer que existen muchos problemas importantes en los que los objetos de interés se pueden aproximar de manera realista a masas puntuales. Las partículas atómicas y subatómicas se pueden considerar muchas veces como masas puntuales, e incluso los objetos macroscópicos se pueden aproximar frecuentemente de esta manera. Una piedra arrojada desde lo alto de un precipicio es, para casi todos los propósitos, una partícula puntual. Incluso un planeta orbitando alrededor del Sol puede normalmente ser aproximado de la misma manera. Por eso la mecánica de las masas puntuales es mucho más que simplemente el punto de partida de la mecánica de cuerpos extensos; es un tema, por sí mismo, con muchas aplicaciones.

Las dos primeras leyes de Newton son muy conocidas y fácilmente enunciables:

Primera ley de Newton (ley de inercia)

En ausencia de fuerzas, una partícula se mueve con velocidad constante $\mathbf{v}$.

y

Segunda ley de Newton

Para cualquier partícula de masa m, la fuerza neta $\mathbf{F}$ sobre la partícula es siempre igual a la masa m por la aceleración de la partícula:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \tag{1.17}$$

En esta ecuación $\mathbf{F}$ es el vector suma de todas las fuerzas sobre la partícula y $\mathbf{a}$ es la aceleración de la partícula,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{v}}$$
$$= \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{r}}.$$

Aquí $\mathbf{v}$ denota la velocidad de la partícula, y he introducido la notación conveniente de poner un punto arriba para denotar a la derivada con respecto a t, como en $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ y $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$.

Ambas leyes se pueden enunciar de varias formas equivalentes. Por ejemplo (la primera ley): en ausencia de fuerzas, una partícula estacionaria permanece estacionaria y una partícula en movimiento continúa moviéndose con velocidad inalterable en la misma dirección. Esto es, por supuesto, lo mismo que decir que la velocidad es siempre constante. Otra manera: $\mathbf{v}$ es constante si y sólo si la aceleración $\mathbf{a}$ es cero, así que un enunciado incluso más suscinto es el siguiente: en ausencia de fuerzas una partícula tiene aceleración cero. La segunda ley se puede reescribir en términos del **momento** de la partícula, definido como

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \tag{1.18}$$

En mecánica clásica, damos por supuesto que la masa m de una partícula nunca cambia, de tal manera que

$$\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a}.$$

De este modo, la segunda ley (1.17) se puede reescribir para afirmar que

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}. \tag{1.19}$$

En mecánica clásica las dos formas de la segunda ley, (1.17) y (1.19), son completamente equivalentes.[5]

Ecuaciones diferenciales

La segunda ley de Newton, cuando se escribe en la forma $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, es una **ecuación diferencial** para la posición de la partícula $\mathbf{r}(t)$. Esto es, es una ecuación para la función desconocida $\mathbf{r}(t)$ que incluye *derivadas* de la función desconocida. Casi todas las leyes de la física son, o pueden ser tratadas como, ecuaciones diferenciales, y una buena parte del tiempo de un físico lo emplea resolviendo estas ecuaciones. En particular, en la mayoría de los problemas de este libro aparecen ecuaciones diferenciales —bien la segunda ley de Newton o sus homólogas en las formas lagrangiana y hamiltoniana de la mecánica. La dificultad de estas ecuaciones varía ampliamente. Algunas son tan fáciles de resolver que uno apenas las tiene en cuenta. Por ejemplo,

[5] En relatividad, las dos formas *no* son equivalentes, como veremos en el Capítulo 15. Que una u otra de las formas sea la correcta depende de las definiciones que usemos para fuerza, masa y momento en relatividad. Si adoptamos las definiciones más populares de estas tres cantidades, entonces es la forma (1.19) la que se cumple en relatividad.

consideremos la segunda ley de Newton para un partícula confinada a moverse a lo largo del eje x y sometida a una fuerza constante F_0,

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m}.$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden para $x(t)$ como función de t. (De segundo orden porque incluye derivadas de segundo orden, pero ninguna de orden superior a dos). Para resolverla basta con integrarla dos veces. La primera integración proporciona la velocidad

$$\dot{x}(t) = \int \ddot{x}(t)\,dt = v_0 + \frac{F_0}{m}t$$

donde la constante de integración es la velocidad inicial de la partícula, y una segunda integración proporciona la posición

$$x(t) = \int \dot{x}(t)\,dt = x_0 + v_0 t + \frac{F_0}{2m}t^2$$

donde la segunda constante de integración es la posición inicial de la partícula. Resolver esta ecuación fue tan fácil que ciertamente no se necesitó ningún conocimiento sobre ecuaciones diferenciales. Por otra parte, nos encontraremos con muchas ecuaciones diferenciales que sí requieren conocimientos de esta teoría, y presentaré la teoría necesaria según la necesitemos. Obviamente, será una ventaja si se ha estudiado ya algo de la teoría de ecuaciones diferenciales, pero no debe haber ninguna dificultad viéndolo mientras avanzamos. De hecho, muchos de nosotros pensamos que la mejor manera de aprender esta teoría matemática es en el contexto de sus aplicaciones físicas.

Sistemas inerciales

En cierto sentido, la segunda ley de Newton incluye la primera: si no hay fuerzas actuando sobre un objeto, entonces $\mathbf{F} = 0$ y la segunda ley (1.17) implica que $\mathbf{a} = 0$, que es la primera ley. Existe, sin embargo, una sutileza importante, que aparece en la primera ley. Las leyes de Newton no pueden ser ciertas en todos los sistemas de referencia concebibles. Para ver esto, consideremos sólo la primera ley e imaginemos un sistema de referencia —lo llamaremos $\mathcal{S}$— en donde la primera ley es cierta. Por ejemplo, si el sistema $\mathcal{S}$ tiene su origen y sus ejes fijos relativos a la superficie de la Tierra, entonces, con una excelente aproximación, la primera ley (la ley de inercia) se cumple respecto del sistema $\mathcal{S}$: un disco sin rozamiento colocado sobre una superficie horizontal está sometido a fuerza cero y, de acuerdo con la primera ley, se mueve con velocidad constante. Como se cumple la ley de inercia, llamamos a

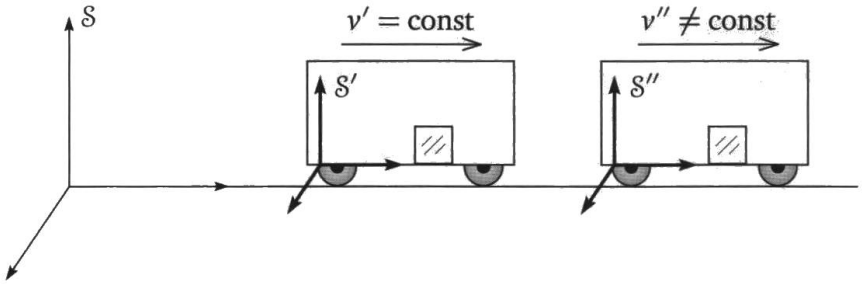


Figura 1.4. El sistema S está fijo al suelo, mientras S' está fijo a un tren que viaja a velocidad constante $\mathbf{v}'$ relativa a S. Un cubo de hielo situado en el suelo del tren obedece la primera ley de Newton visto desde ambos S y S'. Si el tren para el que S'' está acoplado está acelerado hacia delante, entonces, visto desde S'', un cubo de hielo situado en el suelo se acelerará hacia atrás, y la primera ley no se cumple en S''.

S **sistema inercial**. Si consideramos un segundo sistema S' que está en movimiento relativo a S con velocidad constante y no está rotando, entonces el mismo disco también parecerá moverse con velocidad constante relativa a S'. Esto es, el sistema S' es también inercial.

Si consideramos, sin embargo, un tercer sistema S'' que se acelera con respecto a S, entonces, visto desde S'', el disco se acelerará (en la dirección opuesta). Relativa al sistema S'' que se acelera, la ley de inercia no se cumple, y decimos que S'' es **no inercial**. Se debe resaltar que no hay nada misterioso acerca de este resultado. De hecho es un temas experimentable. El sistema S' puede ser un sistema acoplado a un tren de alta velocidad que viaja suavemente a velocidad constante por una vía recta, y el disco sin rozamiento, un cubo de hielo colocado en el suelo del tren, tal como aparece en la Figura 1.4. Visto desde el tren (sistema S'), el cubo de hielo está en reposo y permanece en reposo, de acuerdo con la primera ley. Visto desde el suelo (sistema S), el cubo de hielo se mueve con la misma velocidad que el tren y continúa haciéndolo, otra vez de acuerdo con la primera ley. Pero ahora consideremos el mismo experimento con un segundo tren (sistema S'') que lleva una aceleración hacia adelante. Mientras el tren acelera hacia adelante, el cubo de hielo se queda detrás, y respecto a S'', el cubo de hielo se acelera hacia atrás, incluso aunque no está sometido a ninguna fuerza neta. Claramente el sistema S'' es no inercial, y ninguna de las dos primeras leyes se pueden cumplir en S''. Una conclusión similar se cumpliría si el sistema S'' hubiera sido acoplado a un tiovivo que gira. Un disco sin rozamiento, sometido a una fuerza neta cero, no se movería en una línea recta como visto en S'', y las leyes de Newton no se cumplirían.

Evidentemente las dos leyes de Newton se cumplen sólo en los sistemas de referencia inerciales especiales (sin aceleración y sin rotación). La mayoría de los filósofos de la ciencia adoptan la interpretación de que la primera ley se debería usar para identificar estos sistemas inerciales: un sistema de referencia S es inercial si los

objetos que claramente no están sometidos a ninguna fuerza se mueven con velocidad constante relativa a $\mathcal{S}$.[6] Habiendo identificado los sistemas inerciales mediante la primera ley de Newton, podemos entonces pedir como hecho experimental que la segunda ley se cumpla en los mismos sistemas inerciales.[7] Como las leyes del movimiento se cumplen sólo en sistemas inerciales, podemos imaginar que centraremos nuestra atención exclusivamente en sistemas inerciales y, por algún tiempo, haremos precisamente eso. Sin embargo, hay que tener en cuenta que hay situaciones en las que es necesario, o al menos muy conveniente, trabajar en sistemas no inerciales. El ejemplo más importante de sistema no inercial es la propia Tierra. En un cierto sentido, el hecho de que un sistema de referencia ligado a la Tierra se pueda tomar como inercial es «un hecho afortunado para los estudiantes de física». Sin embargo, la Tierra rota sobre su eje una vez al día y gira alrededor del Sol una vez al año, y el Sol orbita lentamente alrededor del centro de la galaxia Vía Láctea. Por todas estas razones, un sistema de referencia ajustado a la Tierra no es exactamente inercial. Aunque estos efectos son muy pequeños, hay varios fenómenos (las mareas y las trayectorias de proyectiles de largo recorrido son buenos ejemplos) que se explican más fácilmente teniendo en cuenta el carácter no inercial de un sistema ligado a la Tierra. En el Capítulo 9 veremos cómo se deben modificar las leyes del movimiento para usarlas en sistemas no inerciales. Sin embargo, de momento, centraremos nuestra discusión en los sistemas inerciales.

Validez de las dos primeras leyes

Con la aparición de la relatividad y la mecánica cuántica, hemos aprendido que las leyes de Newton no tienen validez universal. Sin embargo, hay un conjunto grande de fenómenos (los fenómenos de la física clásica) en los que las dos primeras leyes son exactas para todos los propósitos prácticos. Incluso cuando las velocidades de interés se aproximan a c, la velocidad de la luz, y la relatividad adquiere importancia, la primera ley sigue siendo totalmente cierta. (Tanto en relatividad, como en mecánica clásica, un sistema inercial se *define* como uno en el que se cumple la primera

---

[6] Aquí hay el peligro de dar vueltas en círculo: ¿cómo sabemos que el objeto no está sometido a ninguna fuerza? Mejor no contestemos, ¡«Porque está viajando a velocidad constante»! Afortunadamente podemos argumentar que es posible identificar todas las fuentes de fuerza, tales como personas empujando y tirando o cuerpos masivos cercanos ejerciendo fuerzas gravitatorias. Si no hay tales cosas alrededor, podemos decir, de manera razonable, que sobre el cuerpo no actúa ninguna fuerza.

[7] Como he mencionado antes, el punto hasta el cual la segunda ley es un hecho experimental depende de cómo elijamos definir fuerza. Si se define mediante la segunda ley, entonces hasta cierto punto (aunque ciertamente no por completo) la ley se convierte en una cuestión de definición. Si definimos las fuerzas mediante balanzas de muelle, entonces la segunda ley es claramente una proposición que se puede comprobar experimentalmente.

ley).[8] Como veremos en el Capítulo 15, las dos formas de la segunda ley, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ y $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, dejan de ser equivalentes en relatividad, aunque con $\mathbf{F}$ y $\mathbf{p}$ definidas adecuadamente, la segunda ley en la forma $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ resulta aún válida. En cualquier caso un punto importante es el siguiente: en el dominio clásico, supondremos que las dos primeras leyes (la segunda en cualquiera de sus formas) son universales y válidas con exactitud. Si se prefiere, se puede considerar esta hipótesis como la definición de un modelo, clásico, del mundo natural. El modelo es lógicamente consistente y tan efectivo en la representación de muchos fenómenos que es totalmente digno de estudio.

1.5 La tercera ley y la conservación del momento

Las dos primeras leyes de Newton se ocupan de la respuesta de un solo objeto a las fuerzas aplicadas. La tercera ley se ocupa de algo muy diferente: cualquier fuerza sobre un objeto implica, inevitablemente, la existencia de un segundo objeto, el propio objeto *que ejerce esa fuerza*. Al clavo le golpea *el martillo*, del carro tira *un caballo*. Mientras que todo esto es cuestión de sentido común, la tercera ley va más allá de nuestras experiencias diarias. Newton se dio cuenta de que si un objeto 1 ejerce una fuerza sobre otro objeto 2, entonces el objeto 2 siempre ejerce a su vez una fuerza (la fuerza de «reacción») sobre el objeto 1. Esto parece bastante lógico: si se empuja contra una pared con fuerza, no cuesta convencerse de que la pared está a su vez ejerciendo una fuerza de vuelta, sin la cual nos caeríamos. Lo que escapa a nuestra percepción de la tercera ley es lo siguiente: según la tercera ley, la fuerza de reacción del objeto 2 sobre el objeto 1 es siempre igual y opuesta a la fuerza original de 1 sobre 2. Si introducimos la notación $\mathbf{F}_{21}$ para definir la fuerza ejercida sobre el objeto 2 por el objeto 1, la tercera ley de Newton puede enunciarse de una forma muy compacta:

Tercera ley de Newton

Si el objeto 1 ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{12}$ sobre el objeto 2, entonces el objeto 2 siempre ejerce una fuerza de reacción $\mathbf{F}_{21}$ sobre el objeto 1, que viene dada por

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \tag{1.20}$$

[8] Sin embargo, en relatividad, la relación entre diferentes sistemas inerciales, las denominadas transformaciones de Lorentz, es distinta de la que se da en mecánica clásica. Vea la Sección 15.6.

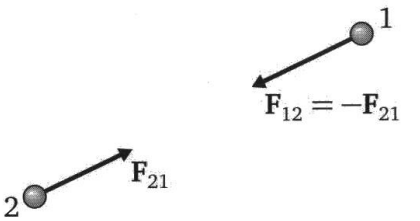


Figura 1.5. La tercera ley de Newton afirma que la fuerza de reacción ejercida sobre el objeto 1 por el objeto 2 es igual y opuesta a la fuerza ejercida sobre el objeto 2 por el objeto 1, esto es, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Esta afirmación viene ilustrada por la Figura 1.5, que podría interpretarse como la fuerza que ejerce la Tierra sobre la Luna y la fuerza de reacción de la Luna sobre la Tierra (o un protón sobre un electrón y el electrón sobre el protón). Fijémonos en que esta representación va un poco más allá de la habitual afirmación (1.20) de la tercera ley: no sólo he presentado a las dos fuerzas como equivalentes y opuestas; también las he presentado actuando a lo largo de la línea que une 1 y 2. Las fuerzas que poseen esta propiedad adicional se denominan **fuerzas centrales**. (Actúan a lo largo de la línea de orígenes o centros). La tercera ley en realidad no requiere que las fuerzas sean centrales, pero como ya argumentaré más adelante, la mayoría de las fuerzas que nos encontramos (la gravedad, la fuerza electrostática entre dos cargas, etc.) sí poseen esta propiedad.

Como bien sabía el propio Newton, la tercera ley está íntimamente relacionada con la ley de la conservación del momento. Centrémonos primeramente sobre dos objetos como los mostrados en la Figura 1.6, que podría interpretarse como la Tierra y la Luna o como dos patinadores sobre hielo. Además de la fuerza de cada objeto sobre el otro, puede haber fuerzas «externas» ejercidas por otros cuerpos. Tanto la Tierra como la Luna experimentan la fuerza ejercida por el Sol, y los dos patinadores podrían experimentar la fuerza externa del viento. Representemos a las fuerzas externas netas sobre los dos objetos por $\mathbf{F}_1^{\text{ext}}$ y $\mathbf{F}_2^{\text{ext}}$. Entonces la fuerza total sobre el objeto 1 es

$$(\text{fuerza neta sobre el objeto 1}) \equiv \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_1^{\text{ext}}$$

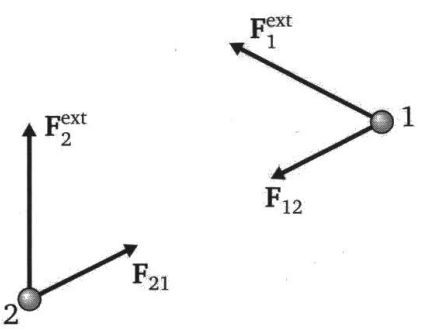


Figura 1.6. Dos objetos ejercen fuerzas el uno sobre el otro y además pueden estar sujetos a fuerzas externas adicionales por parte de otros objetos que no se muestran en la figura.

y de manera similar

$$\text{(fuerza neta sobre el objeto 2)} \equiv \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_2^{\text{ext}}.$$

Podemos calcular la tasa de variación del momento de la partícula utilizando la segunda ley de Newton:

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_1^{\text{ext}} \tag{1.21}$$

y

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_2^{\text{ext}}. \tag{1.22}$$

Si ahora definimos el momento total de los dos objetos como

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2,$$

entonces la tasa de variación del momento total no es más que

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_2.$$

Para evaluar esto, solo tenemos que sumar las dos ecuaciones (1.21) y (1.22). Al hacerlo, las dos fuerzas internas, $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{21}$, se anulan debido a la tercera ley de Newton, lo que nos da

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_1^{\text{ext}} + \mathbf{F}_2^{\text{ext}} \equiv \mathbf{F}^{\text{ext}}, \tag{1.23}$$

donde he introducido la notación $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ para denotar a la fuerza externa total sobre el sistema de dos partículas.

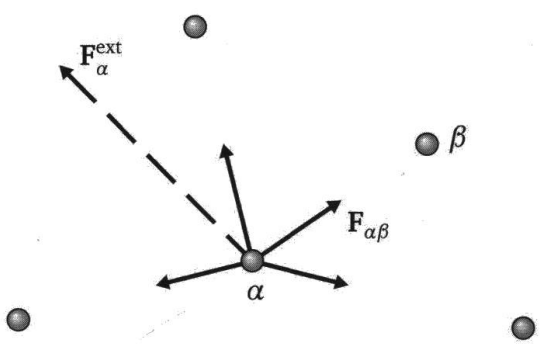


Figura 1.7. Un sistema de cinco partículas etiquetadas por α o $\beta = 1, 2, \ldots, 5$. La partícula α está sometida a cuatro fuerzas internas, mostradas con flechas continuas y denotadas por $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ (la fuerza sobre α por β). Además la partícula α puede estar sometida a una fuerza externa neta, representada con una flecha discontinua y denotada por $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$.

El resultado (1.23) es el primero de una serie de resultados importantes que nos permite construir una teoría de sistemas de múltiples partículas a partir de las leyes básicas para una única partícula. Afirma que en lo que respecta al momento total de un sistema, las fuerzas internas no tienen ningún efecto. Un caso especial de este resultado es que si no hay fuerzas externas ($\mathbf{F}^{\text{ext}} = 0$) entonces $\dot{\mathbf{P}} = 0$. Por tanto tenemos un resultado importante:

$$\text{si} \qquad \mathbf{F}^{\text{ext}} = 0, \qquad \text{entonces} \qquad \mathbf{P} = \text{constante} \tag{1.24}$$

En ausencia de fuerzas externas, el momento total del sistema de dos partículas es constante, resultado denominado como principio de conservación del momento.

Sistemas de varias partículas

Hemos demostrado la conservación del momento, ecuación (1.24), para un sistema de dos partículas. La extensión de este resultado a cualquier número de partículas es bastante sencilla en principio, pero me gustaría repasarlo en detalle, porque me permite introducir alguna notación importante y servirá como práctica en el uso de la notación con sumatorios. Consideremos entonces un sistema de N partículas. Denotaré la partícula típica con un índice griego α o β, cualquiera de las cuales puede tomar cualquier valor $1, 2, \ldots, N$. La masa de la partícula α es m_α y su momento es $\mathbf{p}_\alpha$. La fuerza sobre la partícula α es bastante complicada: cada una de las otras $(N-1)$ partículas pueden ejercer una fuerza que denominaré $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$, la fuerza sobre α por β, como se ilustra en la Figura 1.7. Además puede haber una fuerza externa neta sobre la partícula α, a la que llamaré $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$. Por lo tanto, la fuerza neta sobre la partícula α es

$$(\text{fuerza neta sobre la partícula } \alpha) = \mathbf{F}_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}_{\alpha\beta} + \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}. \tag{1.25}$$

Aquí la suma se efectúa para todos los valores de β distintos de α. (Recuerde que no hay ninguna fuerza $\mathbf{F}_{\alpha\alpha}$ porque la partícula α no puede ejercer una fuerza sobre sí misma). De acuerdo con la segunda ley de Newton, esto es lo mismo que la variación de $\mathbf{p}_\alpha$:

$$\dot{\mathbf{p}}_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}_{\alpha\beta} + \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}. \tag{1.26}$$

Este resultado se cumple para cada $\alpha = 1, \ldots, N$.

Consideremos ahora el momento total de nuestro sistema de N partículas,

$$\mathbf{P} = \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha$$

donde, por supuesto, esta suma afecta a todas las N partículas, $\alpha = 1, 2, \ldots, N$. Si diferenciamos esta ecuación con respecto al tiempo, encontramos

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha} \dot{\mathbf{p}}_{\alpha}$$

o, sustituyendo por $\dot{\mathbf{p}}_{\alpha}$ de (1.26),

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}. \tag{1.27}$$

La suma doble aquí contiene $N(N-1)$ términos en total. Cada término $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ en esta suma se puede emparejar con un segundo término $\mathbf{F}_{\beta\alpha}$ (es decir, $\mathbf{F}_{12}$ emparejado con $\mathbf{F}_{21}$, y así sucesivamente), de tal manera que

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta > \alpha} (\mathbf{F}_{\alpha\beta} + \mathbf{F}_{\beta\alpha}). \tag{1.28}$$

La suma doble de la derecha incluye sólo valores de α y β con $\alpha < \beta$ y tiene la mitad de términos que la de la izquierda. Pero cada término es la suma de dos fuerzas, $(\mathbf{F}_{\alpha\beta} + \mathbf{F}_{\beta\alpha})$, y, por la tercera ley, cada suma es cero. Por lo tanto la suma doble entera en (1.28) es cero, y volviendo a (1.27) concluimos que

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \equiv \mathbf{F}^{\text{ext}}. \tag{1.29}$$

El resultado (1.29) se corresponde exactamente con el resultado para dos partículas (1.23). Igual que este último, dice que las fuerzas internas no producen efecto alguno en la evolución del momento total $\mathbf{P}$ (la variación $\mathbf{P}$ viene determinada por la fuerza *externa* neta sobre el sistema. En particular, si la fuerza externa neta es cero, tenemos el

Principio de conservación del momento

Si la fuerza externa neta $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ sobre un sistema de N partículas es cero, el momento total del sistema $\mathbf{P}$ es constante.

Como seguramente sabrá, este es uno de los resultados más importantes de la física clásica y es también cierto, de hecho, en relatividad y mecánica cuántica. Si no se está familiarizado con los tipos de manipulaciones de sumas que usamos, sería una buena idea volver sobre el argumento que conduce de (1.25) a (1.29) para el caso de tres o cuatro partículas, escribiendo todas las sumas explícitamente (Problemas 1.28 o 1.29). También nos debemos convencer de que, a la inversa, si el

principio de conservación del momento es cierto para todos los sistemas de muchas partículas, entonces la tercera ley de Newton debe ser cierta (Problema 1.31). En otras palabras, la conservación del momento y la tercera ley de Newton son equivalentes entre sí.

Validez de la tercera ley de Newton

En el dominio de la física clásica, la tercera ley, como la segunda, es válida con tal precisión que se puede tomar como exacta. A medida que las velocidades se aproximan a la de la luz, es fácil ver que la tercera ley no puede cumplirse: la razón es que la ley afirma que las fuerzas de acción y reacción, $\mathbf{F}_{12}(t)$ y $\mathbf{F}_{21}(t)$, *medidas en el mismo instante* t, son iguales y opuestas. Como probablemente usted ya sabe, cuando la relatividad pasa a ser importante el concepto de un tiempo único universal ha de ser abandonado: dos sucesos que son vistos como simultáneos por un observador, *no* son, en general, simultáneos vistos por un segundo observador. Debido a esto, incluso si la igualdad $\mathbf{F}_{12}(t) = -\mathbf{F}_{21}(t)$ (con ambos tiempos iguales) fuese cierta para un observador, sería generalmente falsa para el otro. Así, la tercera ley no puede ser válida una vez que la relatividad se hace importante.

Para nuestro asombro, existe un ejemplo muy conocido de fuerza (la fuerza magnética entre dos cargas en movimiento) para la cual la tercera ley no es exactamente cierta, ni siquiera a velocidades bajas. Para ver esto, consideremos las dos cargas positivas de la Figura 1.8, con q_1 moviéndose en la dirección x y q_2 moviéndose en la dirección y, tal como se muestra. El cálculo exacto del campo magnético producido por cada carga es complicado, pero un argumento simple proporciona la dirección correcta de los dos campos, y eso es todo lo que necesitamos. La carga en movimiento q_1 es equivalente a una corriente en la dirección x. Por la regla de la mano derecha para campos, esto produce un campo magnético que apunta en la dirección z en la vecindad de q_2. Por la regla de la mano derecha para fuerzas, este campo

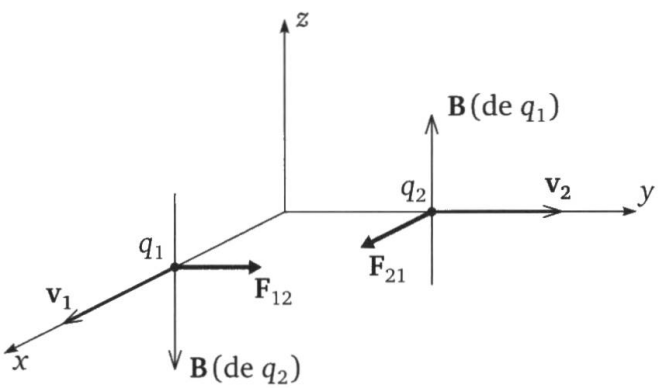


Figura 1.8. Cada una de las cargas positivas q_1 y q_2 produce un campo magnético que ejerce una fuerza sobre la otra carga. Las fuerzas magnéticas resultantes $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{21}$ no obedecen a la tercera ley de Newton.

produce una fuerza $\mathbf{F}_{21}$ sobre q_2 que está en la dirección x. Un razonamiento completamente análogo (compruébelo usted mismo) muestra que la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ sobre q_1 lleva la dirección y, como se muestra. ¡Claramente estas dos fuerzas no obedecen la tercera ley de Newton!

Esta conclusión es especialmente alarmante porque acabamos de ver que la tercera ley de Newton es equivalente a la conservación del momento. Aparentemente el momento total $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ de las dos cargas en la Figura 1.8 no se conserva. Esta conclusión, que es correcta, sirve para recordarnos que el momento «mecánico» $m\mathbf{v}$ de una partícula no es la única clase de momento. Los campos electromagnéticos también pueden transportar momento, y en la situación de la Figura 1.8 el momento mecánico perdido por las dos partículas se transforma en momento electromagnético de los campos.

Afortunadamente, si ambas velocidades en la Figura 1.8 son mucho menores que la de la luz ($v \ll c$), la pérdida de momento mecánico y el consiguiente fallo de la tercera ley son completamente ignorables. Para ver esto, hay que tener en cuenta que además de la fuerza magnética entre q_1 y q_2 está la fuerza electrostática de Coulomb[9] kq_1q_2/r^2, la cual *sí* obedece la tercera ley de Newton. Mostrar que la fuerza magnética es de orden v^2/c^2 veces la fuerza de Coulomb es un ejercicio directo (Problema 1.32). Por tanto, sólo cuando v se aproxima a c (y la mecánica clásica debe conducir a la relatividad de cualquier manera) es importante la violación de la tercera ley por la fuerza magnética.[10] Vemos que la inesperada situación de la Figura 1.8 no contradice nuestro deseo de que en el dominio clásico la tercera ley de Newton sea válida, y esto es lo que asumiremos en nuestras discusiones de mecánica no relativista.

1.6 La segunda ley de Newton en coordenadas cartesianas

De las tres leyes de Newton, la que de hecho usamos más es la segunda, la cual es normalmente descrita como la *ecuación del movimiento*. Como hemos visto, la primera es importante desde el punto de vista teórico para definir lo que conocemos como sistemas inerciales, pero normalmente no es de uso práctico más allá de esto. La tercera ley es crucial para resolver las fuerzas internas en un sistema de varias partículas, pero, una vez que conocemos las fuerzas involucradas, la segunda ley es lo que usamos realmente para calcular el movimiento del objeto u objetos de

[9] Aquí k es la constante de la fuerza de Coulomb, muchas veces escrita como $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

[10] La fuerza magnética entre dos corrientes continuas no es necesariamente pequeña, incluso en el dominio clásico, pero se puede demostrar que esta fuerza *sí* obedece a la tercera ley. Vea el Problema 1.33.

interés. En particular, en muchos problemas sencillos las fuerzas son conocidas o se encuentran fácilmente y, en este caso, la segunda ley es todo lo que necesitamos para resolver el problema.

Como ya hemos visto, la segunda ley

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}, \tag{1.30}$$

es una ecuación diferencial de segundo orden[11] para el vector posición $\mathbf{r}$ como una función del tiempo t. En el problema tipo, las fuerzas que comprenden $\mathbf{F}$ están dadas, y nuestro trabajo es resolver la ecuación diferencial (1.30) para $\mathbf{r}(t)$. A veces se nos habla de $\mathbf{r}(t)$, y tenemos que usar (1.30) para encontrar algunas de las fuerzas. En cualquier caso, la ecuación (1.30) es una ecuación diferencial *vectorial*. La manera más fácil de resolver tales ecuaciones es casi siempre la de expresar los vectores en sus componentes relativas a un sistema de coordenadas escogido.

Conceptualmente el sistema de coordenadas más simple es el cartesiano (o rectangular), con vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$, y la fuerza neta $\mathbf{F}$ puede ser escrita entonces como

$$\mathbf{F} = F_x\,\hat{\mathbf{x}} + F_y\,\hat{\mathbf{y}} + F_z\,\hat{\mathbf{z}} \tag{1.31}$$

y el vector posición $\mathbf{r}$ como

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{1.32}$$

Como vimos en la Sección 1.2, este desarrollo de $\mathbf{r}$ en términos de sus componentes cartesianas es especialmente fácil de derivar porque los vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ son constantes. Por esto, podemos derivar (1.32) dos veces para conseguir el sencillo resultado

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\,\hat{\mathbf{x}} + \ddot{y}\,\hat{\mathbf{y}} + \ddot{z}\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{1.33}$$

Es decir, las tres componentes cartesianas de $\ddot{\mathbf{r}}$ son justo las derivadas apropiadas de las tres coordenadas x, y, z de $\mathbf{r}$, y la segunda ley (1.30) se convierte en

$$F_x\,\hat{\mathbf{x}} + F_y\,\hat{\mathbf{y}} + F_z\,\hat{\mathbf{z}} = m\ddot{x}\,\hat{\mathbf{x}} + m\ddot{y}\,\hat{\mathbf{y}} + m\ddot{z}\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{1.34}$$

Resolviendo esta ecuación en sus tres componentes separadas, vemos que F_x tiene que igualar $m\ddot{x}$ y lo mismo para las componentes y y z. Esto es, en coordenadas

---

[11] La fuerza $\mathbf{F}$ puede a veces incluir derivadas de $\mathbf{r}$. (Por ejemplo la fuerza magnética sobre una carga en movimiento incluye la velocidad $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$). Muy ocasionalmente la fuerza $\mathbf{F}$ incluye una derivada de orden superior de $\mathbf{r}$, de orden $n > 2$, en cuyo caso la segunda ley es una ecuación diferencial de orden n-ésimo.

cartesianas, la única ecuación vectorial (1.30) es equivalente a las tres ecuaciones separadas:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\ddot{z}. \end{cases} \tag{1.35}$$

Este bonito resultado, de que, en coordenadas cartesianas, la segunda ley de Newton en tres dimensiones es equivalente a tres versiones escalares de la misma ley, es la base de la solución de casi todos los problemas simples de mecánica en coordenadas cartesianas. Veamos un ejemplo para recordar cómo se resuelve este tipo de problemas.

Ejemplo 1.1 *Un bloque se desliza hacia abajo por un plano inclinado*

Consideremos un bloque de masa m que parte del reposo y se acelera hacia abajo por un plano inclinado de coeficiente de rozamiento μ y que forma un ángulo θ con la horizontal. ¿Qué distancia recorrerá en un tiempo t?

Lo primero que debemos hacer es elegir nuestro sistema de referencia. Naturalmente, elegimos el origen espacial en la posición inicial del bloque y el origen del tiempo ($t = 0$) en el momento de comienzo. Como sin duda recordará todo el mundo de algún curso de introducción a la física, la mejor elección de ejes es poner a uno de ellos (el x por ejemplo) apuntando hacia abajo de la pendiente, otro (el y) normal a la pendiente, y el tercero (el z) cruzándola, como se muestra en la Figura 1.9. Esta elección tiene dos ventajas: Primera, porque el bloque resbala de manera rectilínea por la pendiente, el movimiento se realiza completamente en la dirección x, y sólo varía x. (Si hubiéramos escogido el eje x horizontal y el y vertical, entonces ambos x e y variarían). Segunda, dos de las tres fuerzas sobre el bloque son desconocidas (la fuerza normal **N** y el rozamiento **f**; el peso, $\mathbf{w} = m\mathbf{g}$, lo tratamos como conocido), y con nuestra elección de ejes, cada una de las fuerzas desconocidas tiene sólo una componente distinta de cero, porque **N** está en la dirección y y **f** está en la dirección x (negativa).

Estamos ya preparados para aplicar la segunda ley de Newton. El resultado (1.35) significa que podemos analizar las tres componentes separadamente, de la siguiente manera:

No existen fuerzas en la dirección z, así que $F_z = 0$. Como $F_z = m\ddot{z}$, se sigue que $\ddot{z} = 0$, lo cual implica que $\dot{z}$ (o v_z) es constante. Como el bloque comienza desde el reposo, esto significa que $\dot{z}$ es realmente cero para todo t. Con $\dot{z} = 0$, se sigue que z es constante, y, como también comienza en cero, concluimos que $z = 0$ para todo t. Como seguramente habremos imaginado, el movimiento está confinado en el plano xy.

Como el bloque no salta fuera del plano inclinado, sabemos que no hay movimiento en la dirección y. En particular, $\ddot{y} = 0$. Por lo tanto, la segunda ley de

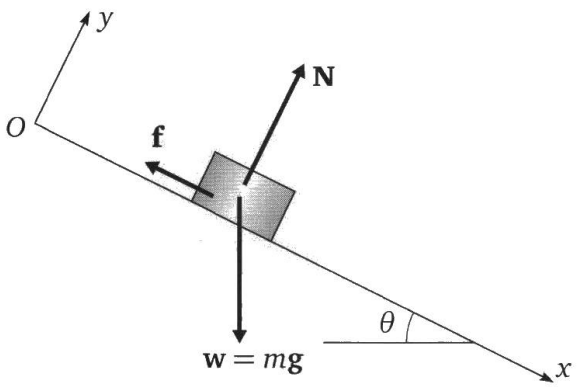


Figura 1.9. Un bloque se desliza hacia abajo por un plano inclinado θ. Las tres fuerzas sobre el bloque son su peso, $\mathbf{w} = m\mathbf{g}$, la fuerza normal que ejerce el plano inclinado, **N**, y la fuerza de rozamiento **f**, cuya magnitud es $f = \mu N$. El eje z no se muestra pero apunta hacia afuera de la página y perpendicularmente a ella, es decir, a través de la pendiente.

Newton implica que la componente y de la fuerza neta es cero; esto es, $F_y = 0$. En la Figura 1.9 vemos que esto implica que

$$F_y = N - mg\cos\theta = 0.$$

Así, la componente y de la segunda ley nos ha mostrado que la fuerza normal desconocida es $N = mg\cos\theta$. Como $f = \mu N$, esto nos dice que la fuerza de rozamiento es $f = \mu mg\cos\theta$, y todas las fuerzas son ahora conocidas. Lo único que queda por hacer es utilizar la componente que queda (la componente x) de la segunda ley para resolver para el movimiento real.

La componente x de la segunda ley, $F_x = m\ddot{x}$, implica (vea la Figura 1.9) que

$$w_x - f = m\ddot{x}$$

o

$$mg\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu mg\cos\theta = m\ddot{x}.$$

Las m se cancelan, y encontramos para la aceleración hacia abajo de la pendiente

$$\ddot{x} = g(\mathrm{sen}\,\theta - \mu\cos\theta). \tag{1.36}$$

Habiendo hallado $\ddot{x}$ y habiendo mostrado que es constante, sólo tenemos que integrar dos veces para encontrar x como una función de t. Primero

$$\dot{x} = g(\mathrm{sen}\,\theta - \mu\cos\theta)t.$$

(Recuerde que $\dot{x} = 0$ inicialmente, así que la constante de integración es cero). Finalmente,

$$x(t) = \tfrac{1}{2}g(\mathrm{sen}\,\theta - \mu\cos\theta)t^2$$

(otra vez la constante de integración es cero) y nuestra resolución está completada.

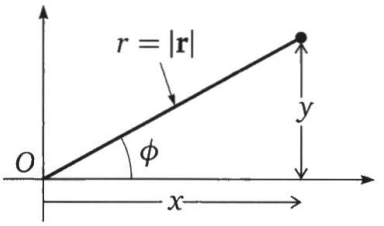


Figura 1.10. Definición de las coordenadas polares r y ϕ.

1.7 Coordenadas polares en dos dimensiones

Mientras que las coordenadas cartesianas tienen el mérito de su simplicidad, vamos a ver ahora que es casi imposible resolver ciertos problemas sin utilizar varios sistemas de coordenadas no cartesianas. Para ilustrar las complejidades de las coordenadas no cartesianas, consideremos la forma de la segunda ley de Newton en un problema de dos dimensiones usando coordenadas polares. Estas coordenadas se definen en la Figura 1.10. En vez de usar las dos coordenadas cartesianas x, y, identificamos la posición de una partícula con su distancia r desde O y el ángulo ϕ medido desde el eje x. Dadas las coordenadas cartesianas x e y, se pueden calcular las coordenadas polares r y ϕ, o al revés, utilizando las relaciones siguientes. (Compruebe que entiende las cuatro ecuaciones.[12])

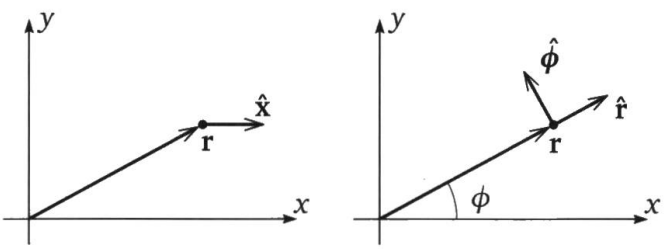


Figura 1.11. **(a)** El vector unitario $\hat{\mathbf{x}}$ apunta en la dirección de aumento de x con y fijo. **(b)** El vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ apunta en la dirección de aumento de r con ϕ fijo; $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ apunta en la dirección de aumento de ϕ con r fijo. Al contrario que $\hat{\mathbf{x}}$, los vectores $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ cambian a medida que el vector de posición $\mathbf{r}$ se mueve.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\phi \end{aligned}\right\} \longleftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \mathrm{arctg}\,(y/x) \end{cases} \tag{1.37}$$

[12] Hay una pequeña sutileza en la ecuación para ϕ: Se debe comprobar que ϕ está en el cuadrante apropiado, porque los cuadrantes primero y tercero producen los mismos valores para y/x (y lo mismo para el segundo y el cuarto). Vea el Problema 1.42.

Igual que sucede con las coordenadas cartesianas, es conveniente introducir dos vectores unitarios, que denotaré por $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Para entender su definición, se debe tener en cuenta que se puede definir el vector unitario $\hat{\mathbf{x}}$ como el vector unitario que apunta en la dirección en la que x aumenta con y fijo, como muestra la Figura 1.11(a). De la misma manera definiremos $\hat{\mathbf{r}}$ como el vector unitario que apunta en la dirección del movimiento cuando r aumenta con ϕ fijo; de la misma manera, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ es el vector unitario que apunta en la dirección del movimiento cuando ϕ aumenta con r fijo. En la Figura 1.11 queda clara una diferencia más importante entre los vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ de coordenadas cartesianas y nuestros nuevos vectores $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Los vectores $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ son los mismos en todos los puntos del plano, mientras que los nuevos vectores $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ cambian sus direcciones a medida que el vector de posición $\mathbf{r}$ se va moviendo. Veremos que esto complica el uso de la segunda ley de Newton en coordenadas polares.

La Figura 1.11 sugiere otra manera de escribir el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$. Como $\hat{\mathbf{r}}$ está en la misma dirección que $\mathbf{r}$, pero tiene magnitud 1, se puede ver que

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \tag{1.38}$$

Este resultado sugiere un segundo papel para la notación con «gorros». Para *cualquier* vector $\mathbf{a}$, podemos definir $\hat{\mathbf{a}}$ como el vector unitario en la dirección de $\mathbf{a}$, concretamente $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$.

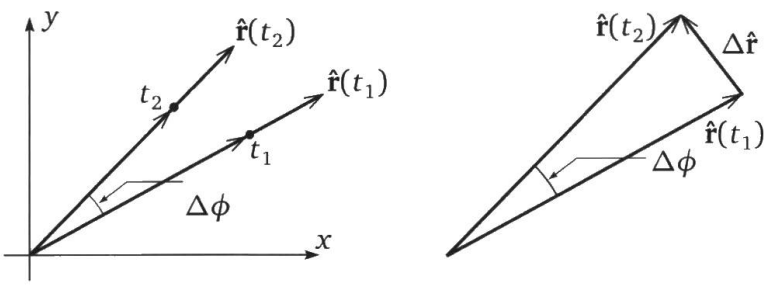
Como los dos vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ son vectores perpendiculares en nuestro espacio de dos dimensiones, cualquier vector se puede expresar en términos de ellos. Por ejemplo, la fuerza neta $\mathbf{F}$ sobre un objeto puede escribirse

$$\mathbf{F} = F_r\hat{\mathbf{r}} + F_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{1.39}$$

Si, por ejemplo, el objeto en cuestión es una piedra que estoy haciendo girar en círculo en el extremo de una cuerda (con mi mano en el origen), entonces F_r sería la tensión de la cuerda y F_ϕ la fuerza de la resistencia del aire que frena la piedra en la dirección tangente. El desarrollo del vector de posición es especialmente sencillo en coordenadas polares. De la Figura 1.11(b) queda claro que

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}. \tag{1.40}$$

Estamos preparados ahora para preguntarnos sobre la forma de la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$, en coordenadas polares. En coordenadas cartesianas, vimos que la componente x de $\ddot{\mathbf{r}}$ es justamente $\ddot{x}$, y esto es lo que llevó al resultado sencillo (1.35). Ahora debemos encontrar las componentes de $\ddot{\mathbf{r}}$ en coordenadas polares; esto es, debemos derivar (1.40) con respecto a t. Aunque (1.40) es muy sencilla, el vector $\hat{\mathbf{r}}$ cambia a medida que $\mathbf{r}$ se mueve. Entonces, cuando derivemos (1.40), elegiremos un término que incluya la derivada de $\hat{\mathbf{r}}$. Nuestra primera tarea es encontrar esta derivada de $\hat{\mathbf{r}}$.



(a) **(b)**

Figura 1.12. **(a)** Posiciones de una partícula en dos instantes sucesivos, t_1 y t_2. A no ser que la partícula se esté moviendo exactamente de manera radial, los vectores unitarios correspondientes $\hat{\mathbf{r}}(t_1)$ y $\hat{\mathbf{r}}(t_2)$ apuntan en direcciones diferentes. **(b)** La variación $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ en $\hat{\mathbf{r}}$ está dada por el triángulo mostrado.

La Figura 1.12(a) muestra la posición de la partícula de interés en dos instantes sucesivos, t_1 y $t_2 = t_1 + \Delta t$. Si los correspondientes ángulos $\phi(t_1)$ y $\phi(t_2)$ son diferentes, entonces los dos vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}(t_1)$ y $\hat{\mathbf{r}}(t_2)$ apuntan en direcciones diferentes. La variación en $\hat{\mathbf{r}}$ se muestra en la Figura 1.12(b), y (como Δt es pequeño) es aproximadamente

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\mathbf{r}} &\approx \Delta\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &\approx \dot{\phi}\,\Delta t\,\hat{\boldsymbol{\phi}}.\end{aligned} \tag{1.41}$$

(Hay que fijarse en el hecho de que la dirección de $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{r}}$, a saber, la dirección de $\hat{\boldsymbol{\phi}}$). Si dividimos ambos miembros por Δt y tomamos el límite cuando $\Delta t \to 0$, entonces $\Delta\hat{\mathbf{r}}/\Delta t \to d\hat{\mathbf{r}}/dt$ y encontramos que

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{1.42}$$

(Para una prueba alternativa de este importante resultado, vea el Problema 1.43). Observe que $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ está en la dirección de $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ y es proporcional a la variación del ángulo ϕ (propiedades ambas que esperaríamos basándonos en la Figura 1.12).

Ahora que conocemos la derivada de $\hat{\mathbf{r}}$, estamos preparados para derivar en la ecuación (1.40). Utilizando la regla del producto, obtenemos dos términos:

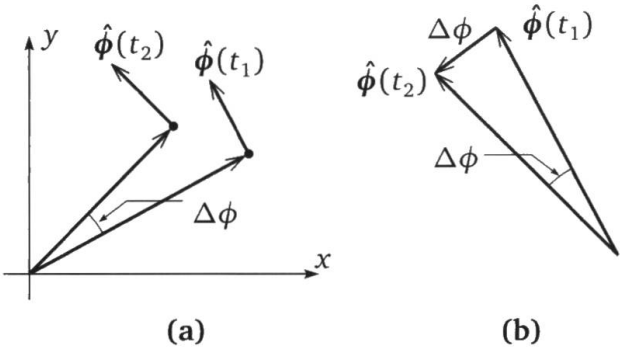
$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt},$$

y sustituyendo (1.42), encontramos para la velocidad $\dot{\mathbf{r}}$, o $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{1.43}$$

A partir de esto podemos sacar las componentes polares de la velocidad:

$$v_r = \dot{r} \quad \text{y} \quad v_\phi = r\dot{\phi} = r\omega \tag{1.44}$$



(a) **(b)**

Figura 1.13. (a) El vector unitario $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ en dos instantes sucesivos t_1 y t_2. **(b)** La variación $\Delta\hat{\boldsymbol{\phi}}$.

donde en la segunda ecuación he introducido la notación tradicional ω para la velocidad angular $\dot{\phi}$. Aunque los resultados en (1.44) deberían ser familiares tras un curso de introducción a la física, son indudablemente más complicados que los correspondientes resultados en coordenadas cartesianas ($v_x = \dot{x}$ y $v_y = \dot{y}$).

Antes de que podamos escribir la segunda ley de Newton, tenemos que derivar una segunda vez para hallar la aceleración:

$$\mathbf{a} \equiv \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}), \tag{1.45}$$

donde la expresión final viene de sustituir (1.43) por $\dot{\mathbf{r}}$. Para completar la derivación en (1.45) debemos calcular la derivada de $\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Este cálculo es completamente análogo al argumento que conduce a (1.42) y es ilustrado en la Figura 1.13. Inspeccionando esta figura, se puede uno convencer a sí mismo de que

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\phi}}}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\mathbf{r}}. \tag{1.46}$$

volviendo a la Ecuación (1.45), podemos ahora llevar a cabo la derivación para obtener los siguientes cinco términos:

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\right) + \left((\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} + r\dot{\phi}\frac{d\hat{\boldsymbol{\phi}}}{dt}\right)$$

o, si usamos (1.42) y (1.46) para reemplazar las derivadas de los dos vectores unitarios,

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{1.47}$$

Este horrible resultado es un poco más fácil de entender si consideramos el caso especial en el que r es constante, como el caso para una piedra que hago girar en el extremos de una cuerda de longitud fija. Con r constante, las dos derivadas de r son cero, y (1.47) tiene sólo dos términos:

$$\mathbf{a} = -r\dot{\phi}^2\hat{\mathbf{r}} + r\ddot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

o

$$\mathbf{a} = -r\omega^2\hat{\mathbf{r}} + r\alpha\hat{\boldsymbol{\phi}},$$

donde $\omega = \dot{\phi}$ es la velocidad angular y $\alpha = \ddot{\phi}$ es la aceleración angular. Este es un resultado familiar de física elemental: cuando una partícula se mueve siguiendo un círculo fijado, tiene una aceleración «centrípeta» hacia adentro $r\omega^2$ (o v^2/r) y una aceleración tangencial, $r\alpha$. No obstante, cuando r no es constante, la aceleración incluye los cuatro términos de (1.47). El primer término, $\ddot{r}$ en la dirección radial es lo que probablemente se esperaría cuando r varía, pero el término final, $2\dot{r}\dot{\phi}$ en la dirección ϕ, es más difícil de comprender. Se llama aceleración de Coriolis, y se discutirá en detalle en el Capítulo 9.

Habiendo calculado la aceleración como en (1.47), podemos escribir finalmente la segunda ley de Newton en términos de las coordenadas polares:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \\ F_\phi = m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}). \end{cases} \tag{1.48}$$

Estas ecuaciones en coordenadas polares no tienen nada que ver con las maravillosamente sencillas ecuaciones (1.35) para coordenadas cartesianas. De hecho, una de las principales razones para tomarse la molestia de volver a escribir la mecánica de Newton en la formulación lagrangiana (Capítulo 7) es que esta última es capaz de manejar coordenadas no rectangulares tan fácilmente como rectangulares.

Quizá dé la sensación justificada de que la segunda ley en coordenadas polares es tan complicada que no habría ocasión de utilizarla. Sin embargo, en realidad hay muchos problemas que se resuelven mucho más fácilmente usando coordenadas polares, y voy a concluir esta sección con un ejemplo elemental.

Ejemplo 1.2 *Un monopatín oscilante*

En un parque de monopatines una pista de «medio cañón» en forma de U consiste en una rampa de hormigón con una sección semicircular de radio $R = 5$ m, como se muestra en la Figura 1.14. Se sujeta un monopatín sin rozamiento en un lado de la rampa apuntando hacia abajo y se suelta en un instante determinado. Discutir el movimiento subsiguiente utilizando la segunda ley de Newton. En particular, si se suelta el monopatín desde una distancia pequeña del punto más bajo, ¿cuánto tiempo tardará en regresar al punto de partida?

Como el monopatín está obligado a moverse siguiendo una trayectoria circular, este problema se resuelve más fácilmente utilizando coordenadas polares con origen O en el centro del canal, como se muestra en la figura. (En algún punto del siguiente cálculo, estaría bien intentar escribir la segunda ley en coordenadas cartesianas y observar el lío que se arma). Con esta elección de coordenadas polares, la coordenada r del monopatín es constante, $r = R$, y la posición del mismo queda completamente

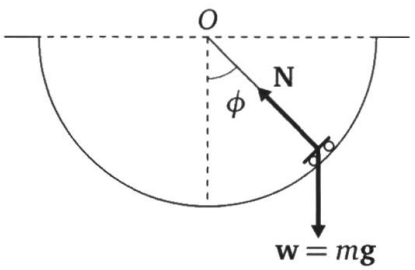


Figura 1.14. Un monopatín en una rampa semicircular de radio R. La posición de la tabla del monopatín se especifica mediante el ángulo ϕ medido desde abajo. Las dos fuerzas sobre la tabla son su peso $\mathbf{w} = m\mathbf{g}$ y la fuerza normal $\mathbf{N}$.

determinada por el ángulo ϕ. Con r constante, la segunda ley (1.48) adopta la forma relativamente sencilla

$$F_r = -mR\dot{\phi}^2 \tag{1.49}$$

y

$$F_\phi = mR\ddot{\phi}. \tag{1.50}$$

Las dos fuerzas sobre el monopatín son su peso $\mathbf{w} = m\mathbf{g}$ y la fuerza normal $\mathbf{N}$ de la pared, tal como se muestra en la Figura 1.14. Las componentes de la fuerza neta $\mathbf{F} = \mathbf{w} + \mathbf{N}$ se obtienen fácilmente;

$$F_r = mg\cos\phi - N \quad \text{y} \quad F_\phi = -mg\,\text{sen}\,\phi.$$

Sustituyendo F_r en (1.49) obtenemos una ecuación en las variables N, ϕ y $\dot{\phi}$. Afortunadamente, no estamos realmente interesados en N, y (aún más afortunadamente) cuando sustituimos F_ϕ en (1.50) obtenemos una ecuación en la que no aparece N para nada:

$$-mg\,\text{sen}\,\phi = mR\ddot{\phi}$$

o, cancelando las m y reorganizando,

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{R}\,\text{sen}\,\phi. \tag{1.51}$$

La ecuación (1.51) es la ecuación diferencial para $\phi(t)$ que determina el movimiento del monopatín. Cualitativamente, se puede ver fácilmente el tipo de movimiento que implica. Primero, si $\phi = 0$, (1.51) implica que $\ddot{\phi} = 0$. Por lo tanto, si colocamos la tabla en reposo ($\dot{\phi} = 0$) en el punto $\phi = 0$, nunca se moverá (a no ser que alguien la empuje); esto es, $\phi = 0$ es una posición de equilibrio, como se puede haber adivinado. Después, supongamos que en algún momento, ϕ no es cero y, para concretar, supongamos que $\phi > 0$; es decir, el monopatín está en el lado derecho del medio cañón. En este caso, (1.51) implica que $\ddot{\phi} < 0$, así que la aceleración está dirigida hacia la izquierda. Si la tabla se mueve hacia la derecha debe frenarse y en algún

momento comenzar a moverse hacia la izquierda.[13] Una vez que se está moviendo hacia la izquierda, se acelera y vuelve al fondo, donde se mueve hacia la izquierda. Tan pronto como la tabla está en la izquierda, el argumento se invierten ($\phi < 0$, así que $\ddot{\phi} > 0$) y la tabla debe finalmente retornar al fondo y moverse hacia la derecha otra vez. En otras palabras, la ecuación diferencial (1.51) implica que el monopatín oscila atrás y adelante, de derecha a izquierda y otra vez a la izquierda.

La ecuación del movimiento (1.51) no se puede resolver en términos de funciones elementales, tales como polinomios, funciones trigonométricas, o logaritmos y exponenciales.[14] Así, si queremos más información cuantitativa sobre el movimiento, el modo más fácil de obtenerla es usar un ordenador para resolverla numéricamente (vea el Problema 1.50). Sin embargo, si el ángulo inicial ϕ_0 es *pequeño*, podemos usar la aproximación de ángulos pequeños

$$\operatorname{sen}\phi \approx \phi \tag{1.52}$$

y, con esta aproximación, (1.51) se convierte en

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{R}\phi \tag{1.53}$$

la cual *puede* ser resuelta usando funciones elementales. [En este punto, nos hemos dado cuenta seguramente de que nuestra discusión del problema del monopatín es paralela al análisis del péndulo simple. En particular, la aproximación del ángulo pequeño (1.52) es lo que permite resolver el péndulo simple en un curso de física elemental. Este paralelismo no es, por supuesto, una casualidad. Matemáticamente los dos problemas son equivalentes]. Si definimos el parámetro

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}, \tag{1.54}$$

entonces (1.53) se convierte

$$\ddot{\phi} = -\omega^2\phi. \tag{1.55}$$

Esta es la ecuación del movimiento para nuestro monopatín en la aproximación de ángulo pequeño. Me gustaría discutir su solución en detalle para introducir varias ideas que estaremos usando una y otra vez en lo que sigue. (Si se han estudiado

---

[13] Estoy dando por supuesto que no alcanza el punto más alto y salta fuera de la rampa. Como partió del reposo dentro de la rampa, esto es correcto. Para probar esta afirmación más fácilmente se usa la conservación de la energía, la cual no analizaremos hasta más adelante. Quizás, por ahora, podamos estar de acuerdo en aceptarla como materia de sentido común.

[14] Realmente la solución de (1.51) es una función elíptica de Jacobi. No obstante, tomaré el punto de vista de que para la mayoría de nosotros la función de Jacobi no es «elemental».

ecuaciones diferenciales antes, los siguientes tres párrafos se pueden ver como un repaso rápido).

Primero observamos que es fácil encontrar dos soluciones de la ecuación (1.55) mediante la inspección (es decir, mediante una búsqueda inspirada). La función $\phi(t) = A\ \text{sen}(\omega t)$ es claramente una solución para cualquier valor de la constante A. [Derivando $\text{sen}(\omega t)$ sale un factor de ω y el seno se convierte en un coseno; derivando de nuevo aparece otra ω fuera y el coseno vuelve a cambiar a $-\text{sen}$. Entonces la solución propuesta satisface $\ddot{\phi} = -\omega^2\phi$]. De manera similar, la función $\phi(t) = B\cos(\omega t)$ es otra solución para cualquier constante B. Todavía más: como se puede comprobar fácilmente, la suma de estas dos soluciones es también una solución. Así, hemos encontrado toda una familia de soluciones:

$$\phi(t) = A\,\text{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t) \tag{1.56}$$

es solución para cualesquiera de los valores de las dos constantes A y B.

Quiero ahora argumentar que *toda* solución de la ecuación de movimiento (1.55) tiene la forma (1.56). En otras palabras, (1.56) es la *solución general*: hemos encontrado *todas* las soluciones, y no necesitamos buscar más. Para tener alguna idea de por qué sucede esto, advirtamos que la ecuación diferencial (1.55) es una condición sobre la segunda derivada $\ddot{\phi}$ de la función desconocida ϕ. Ahora bien, si nos hubieran dicho lo que $\ddot{\phi}$ es realmente, entonces sabemos de cálculo elemental que podemos hallar ϕ mediante dos integraciones, y el resultado contendría dos constantes desconocidas (las dos constantes de integración) que tendrían que ser determinadas examinando (por ejemplo) los valores iniciales de ϕ y $\dot{\phi}$. En otras palabras, el conocimiento de $\ddot{\phi}$ nos diría que la propia ϕ pertenece a una familia de funciones que contienen precisamente dos constantes indeterminadas. Por supuesto, la ecuación diferencial (1.55) no nos dice realmente $\ddot{\phi}$ (es una ecuación para $\ddot{\phi}$ en términos de ϕ. Sin embargo, es posible que tal ecuación implicaría que ϕ pertenece a una familia de funciones que contienen precisamente dos constantes indeterminadas. Si se ha estudiado ecuaciones diferenciales, se sabe que este es el caso; si no se ha estudiado esto, entonces habrá que aceptarlo como un hecho plausible: para cualquier ecuación diferencial de segundo orden (en una clase grande de ecuaciones «razonables», entre ellas (1.55) y todas las ecuaciones que nos encontraremos en este libro), todas las soluciones pertenecen a una familia de funciones que contienen precisamente dos constantes independientes, como A y B en (1.56). (De manera más general, las soluciones de una ecuación de n-ésimo orden contienen precisamente n constantes independientes).

Este teorema arroja nueva luz para nuestra solución (1.56). Ya vimos que cualquier función de la forma (1.56) es una solución de la ecuación del movimiento. Nuestro teorema ahora garantiza que *toda* solución de la ecuación de movimiento tiene esta forma. El mismo argumento se aplica a todas las ecuaciones diferenciales de segundo orden que nos encontremos. Si de alguna manera podemos hallar una

solución como (1.56) que tenga dos constantes arbitrarias, entonces eso nos garantizará que hemos hallado la solución de general para nuestra ecuación. Todo lo que resta por hacer es precisar las dos constantes A y B para nuestro monopatín. Para hacerlo, debemos fijarnos en las condiciones iniciales. En $t = 0$, la ecuación (1.56) implica que $\phi = B$. Por lo que B es justo el valor inicial de ϕ, al que estamos llamando ϕ_0, así que $B = \phi_0$. En $t = 0$, la ecuación (1.56) implica que $\dot{\phi} = \omega A$. Como la tabla partió del reposo, esto significa que $A = 0$, y nuestra solución es

$$\phi(t) = \phi_0 \cos(\omega t). \tag{1.57}$$

La primera cosa a tener en cuenta sobre esta solución es que, como habíamos anticipado con razonamientos básicos, $\phi(t)$ oscila, moviéndose periódica e indefinidamente de positivo a negativo y otra vez a positivo. En particular, la tabla primero vuelve a su posición inicial ϕ_0 cuando $\omega t = 2\pi$. El tiempo que dura esto se llama periodo del movimiento y se denota por τ. Así, nuestra conclusión es que el periodo de las oscilaciones del monopatín es

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}. \tag{1.58}$$

Los datos son $R = 5$ m, y $g = 9{,}8$ m/s^2. Sustituyendo estos valores, concluimos que el monopatín vuelve a su punto de partida en un tiempo $\tau = 4{,}5$ segundos.

Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 1

Productos escalar y vectorial

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} = rs\cos\theta = r_x s_x + r_y s_y + r_z s_z \qquad \text{[Ecs. (1.6) y (1.7)]}$$

$$\mathbf{r}\times\mathbf{s} = (r_y s_z - r_z s_y,\, r_z s_x - r_x s_z,\, r_x s_y - r_y s_x) = \det\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ r_x & r_y & r_z \\ s_x & s_y & s_z \end{bmatrix} \qquad \text{[Ec. (1.9)]}$$

Sistemas inerciales

Un sistema inercial es cualquier sistema de referencia para el que es válida la primera ley de Newton, es decir, un sistema no acelerado ni en rotación.

Vectores unitarios de un sistema de coordenadas

Si (ξ, η, ζ) son un sistema de coordenadas ortogonales, entonces

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \text{ vector unitario en la dirección de incremento de } \xi \text{ con } \eta \text{ y } \zeta \text{ fijos}$$

y así sucesivamente, y cada vector $\mathbf{s}$ puede desarrollarse como $\mathbf{s} = s_\xi\hat{\boldsymbol{\xi}} + s_\eta\hat{\boldsymbol{\eta}} + s_\zeta\hat{\boldsymbol{\zeta}}$.

La segunda ley de Newton en varios sistemas de coordenadas

Forma vectorial	Cartesianas (x,y,z)	2D-Polares (r,ϕ)	Polares cilíndricas (ρ,ϕ,z)
$\mathbf{F}=m\ddot{\mathbf{r}}$	$\begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\ddot{z} \end{cases}$	$\begin{cases} F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \\ F_\phi = m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) \end{cases}$	$\begin{cases} F_r = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \\ F_\phi = m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \\ F_z = m\ddot{z} \end{cases}$
	Ec. (1.35)	Ec. (1.48)	Problema 1.47 o 1.48

Problemas para el Capítulo 1

Los problemas para cada capítulo están preparados de acuerdo con el número de sección. Un problema listado para una sección dada requiere el entendimiento de dicha sección y las anteriores, pero no de las que van a continuación. En una misma sección los problemas están listados aproximadamente en orden creciente de dificultad. Una única estrella (⋆) se debe asociar a problemas de resolución directa en los que basta un solo concepto principal. Dos estrellas (⋆⋆) identifican problemas que son un poco más difíciles y normalmente incluyen más de un concepto. Tres estrellas (⋆⋆⋆) indican problemas que son bastante más difíciles, bien porque son intrínsecamente difíciles o porque suponen largos cálculos. No hace falta decir que estas distinciones son difíciles de delimitar y que son sólo aproximadas.

Los problemas que requieren el uso de ordenador están señalados así: [Ordenador]. Estos están clasificados casi siempre como ⋆⋆⋆ basándose en que normalmente lleva mucho tiempo preparar el código (especialmente si el lector está aprendiendo el lenguaje a la vez que este curso de Mecánica).

Sección 1.2 Espacio y tiempo

1.1 ⋆ Dados dos vectores $\mathbf{b}=\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ y $\mathbf{c}=\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{z}}$ encontrar $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $5\mathbf{b}+2\mathbf{c}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ y $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$.

1.2 ⋆ Dos vectores están dados como $\mathbf{b}=(1,\ 2,\ 3)$ y $\mathbf{c}=(3,\ 2,\ 1)$. (Recordar que estos enunciados son sólo una manera compacta de dar las componentes de los vectores). Encontrar $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $5\mathbf{b}-2\mathbf{c}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ y $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$.

1.3 ⋆ Aplicando dos veces el teorema de Pitágoras (la típica versión en dos dimensiones), probar que la longitud r de un vector de tres dimensiones $\mathbf{r}=(x,y,z)$ satisface $r^2=x^2+y^2+z^2$.

1.4 ⋆ Una de las muchas aplicaciones del producto escalar es para encontrar el ángulo entre dos vectores dados. Encontrar el ángulo entre los vectores $\mathbf{b}=(1,\ 2,\ 4)$ y $\mathbf{c}=(4,\ 2,\ 1)$ evaluando su producto escalar.

1.5 ⋆ Hallar el ángulo entre una diagonal central de un cubo y cualquiera de sus otras diagonales laterales. [*Ayuda:* Escoger un cubo de lado 1 y una esquina en O y la esquina opuesta en el punto $(1,\ 1,\ 1)$. Escribir el vector que representa una diagonal central y otro que represente una diagonal lateral, y hallar entonces el ángulo entre ellos como en el Problema 1.4].

1.6 ⋆ Mediante la evaluación de su producto escalar, hallar los valores del escalar s para los cuales los dos vectores $\mathbf{b}=\hat{\mathbf{x}}+s\hat{\mathbf{y}}$ y $\mathbf{c}=\hat{\mathbf{x}}-s\hat{\mathbf{y}}$ son ortogonales. (Recordar que dos vectores son ortogonales si y sólo si su producto punto es cero). Explicar las respuestas con un dibujo.

1.7 ⋆ Probar que las dos definiciones del producto escalar $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}$ como $rs\cos\theta$ (1.6) y $\sum r_i s_i$ (1.7) son iguales. Una manera de hacer esto es elegir el eje x en la dirección de $\mathbf{r}$. [Estrictamente hablando se debe comprobar primero que la definición (1.7) es independiente de la elección de los ejes. Si interesan ese tipo de sutilezas, ver Problema 1.16].

1.8 ⋆ **(a)** Usar la definición (1.7) para probar que el producto escalar es distributivo, esto es, $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}$. **(b)** Si $\mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$ son vectores que dependen del tiempo, probar que la regla

del producto para diferenciar productos se aplica a $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$, es decir, que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) = \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{s}.$$

1.9 ⋆ En trigonometría elemental, se habrá visto probablemente la ley de los cosenos para un triángulo de lados a, b y c, que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los lados a y b. Mostrar que la ley de los cosenos es una consecuencia inmediata de la identidad $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = a^2 + b^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

1.10 ⋆ Una partícula se mueve en un círculo (de centro O y radio R) con velocidad angular constante ω en el sentido de las agujas del reloj. El círculo está situado en el plano xy y la partícula está en el eje x en el instante $t = 0$. Mostrar que la posición de la partícula está dada por

$$\mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{x}} R\cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}} R\,\mathrm{sen}(\omega t).$$

Hallar la velocidad y la aceleración de la partícula. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la aceleración? Relacionar los resultados con propiedades bien conocidas de movimiento circular uniforme.

1.11 ⋆ La posición de una partícula en movimiento está dada como una función del tiempo t:

$$\mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{x}}\, b\cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}\, c\,\mathrm{sen}(\omega t),$$

donde b, c y ω son constantes. Describir la órbita de la partícula.

1.12 ⋆ La posición de una partícula en movimiento está dada como una función del tiempo t:

$$\mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{x}}\, b\cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}\, c\,\mathrm{sen}(\omega t) + \hat{\mathbf{z}}\, v_0 t$$

donde b, c, v_0 y ω son constantes. Describir la órbita de la partícula.

1.13 ⋆ Sea $\mathbf{u}$ un vector unitario arbitrario fijo. Mostrar que cualquier vector $\mathbf{b}$ satisface la igualdad

$$b^2 = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{b})^2 + (\mathbf{u} \times \mathbf{b})^2.$$

Explicar este resultado en palabras, con la ayuda de un dibujo.

1.14 ⋆ Probar que para cualesquiera dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$,

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq (a+b).$$

[*Ayuda:* Calcular $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2$ y compararlo con $(a+b)^2$]. Explicar por qué a esto se le llama la desigualdad triangular.

1.15 ⋆ Demostrar que la definición (1.9) del producto vectorial es equivalente a la definición elemental de que $\mathbf{r}\times\mathbf{s}$ es perpendicular tanto a $\mathbf{r}$ como a $\mathbf{s}$, con magnitud $rs\,\mathrm{sen}\,\theta$ y dirección dada por la regla de la mano derecha. [*Ayuda:* Es un hecho (aunque un poco difícil de probar), que la definición (1.9) es independiente de la elección de ejes. Por lo tanto se pueden escoger ejes tales que $\mathbf{r}$ apunte en la dirección del eje x y $\mathbf{s}$ pertenezca al plano xy].

1.16 ⋆⋆ **(a)** Definiendo el producto escalar $\mathbf{r}\cdot,\mathbf{s}$ mediante la ecuación(1.7), $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \sum r_i s_i$, mostrar que el teorema de Pitágoras implica que la magnitud de cualquier vector $\mathbf{r}$ es $r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}$. **(b)** Es claro que la longitud de un vector no depende de la elección de los ejes de coordenadas. Así el resultado de la parte (a) garantiza que el producto escalar $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$, tal como está definido por (1.7), es el mismo para cualquier elección de ejes ortogonales. Utilizar esto para probar que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$, tal como está definido en (1.7), es el mismo para cualquier elección de ejes ortogonales. [*Ayuda:* Considerar la longitud del vector $\mathbf{r}+\mathbf{s}$].

1.17 ⋆⋆ **(a)** Probar que el producto vectorial $\mathbf{r} \times \mathbf{s}$ como está definido en (1.9) es distributivo; es decir, que $\mathbf{r} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) + (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$. **(b)** Probar la regla del producto

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{s}) = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{s}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{s}.$$

Tener cuidado con el orden de los factores.

1.18 ⋆⋆ Los tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son los tres lados del triángulo ABC con ángulos α, β, γ como se muestra en la Figura 1.15. **(a)** Probar que el área del triángulo está dada por cualquiera de estas tres expresiones:

$$\text{área} = \tfrac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \tfrac{1}{2}|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \tfrac{1}{2}|\mathbf{c} \times \mathbf{a}|.$$

(b) Usar la igualdad de estas tres expresiones para probar la conocida ley de los senos, que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

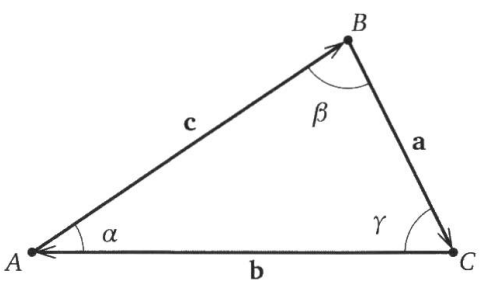


Figura 1.15. Triángulo para el Problema 1.18.

1.19 ⋆⋆ Si $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}$ denotan la posición, velocidad y aceleración de una partícula, probar que

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r})] = \dot{\mathbf{a}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}).$$

1.20 ⋆⋆ Los tres vectores $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ apuntan desde el origen O a las tres esquinas de un triángulo. Usar el resultado del Problema 1.18 para demostrar que el área del triángulo está dada por

$$(\text{área del triángulo}) = \tfrac{1}{2}|(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{B})|.$$

1.21 ⋆⋆ Un paralelepípedo (un sólido de seis caras con las caras opuestas paralelas) tiene una esquina en el origen O y los tres bordes que salen de O definidos por los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Mostrar que el volumen del paralelepípedo es $|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$.

1.22 ⋆⋆ Los dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ están en el plano xy y forman ángulos α y β con el eje x. **(a)** Mediante la evaluación de $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ de dos maneras [a saber, usando (1.6) y (1.7)] probar la conocida igualdad trigonométrica

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

(b) De la misma manera, mediante la evaluación de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ probar que

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

1.23 ⋆⋆ El vector desconocido $\mathbf{v}$ satisface $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = \lambda$ y $\mathbf{b} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$, donde λ, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son fijos y conocidos. Hallar $\mathbf{v}$ en términos de λ, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$.

Sección 1.4 Primera y segunda leyes de Newton; sistemas inerciales

1.24 ⋆ En caso de no haber estudiado ecuaciones diferenciales antes, introduciré las ideas necesarias según se vayan necesitando. Este es un ejercicio sencillo para comenzar: hallar la solución general de la ecuación de primer orden $df/dt = f$ para un función desconocida $f(t)$. [Existen varias maneras de hacer esto. Una es reescribir la ecuación como $df/f = dt$ y después integrar ambos lados]. ¿Cuántas constantes arbitrarias contiene la solución general? [La respuesta debe ilustrar el importante teorema general de que la solución de cualquier ecuación diferencial de n-ésimo orden (para un conjunto grande de ecuaciones «razonables») contiene n constantes arbitrarias].

1.25 ⋆ Contestar a las mismas preguntas que en el Problema 1.24, pero para la ecuación diferencial $df/dt = -3f$.

1.26 ⋆⋆ El distintivo de un sistema de referencia inercial es que cualquier objeto sometido a una fuerza neta cero viajará a lo largo de una línea recta con velocidad constante. Para ilustrar esto, considerar lo siguiente: estoy situado sobre un suelo en el origen de un sistema inercial $\mathcal{S}$ y empujo un cajón sin rozamiento hacia el norte. **(a)** Escribir las coordenadas x e y del cajón como funciones del tiempo vistas desde mi sistema inercial (tomar los ejes x e y apuntando hacia el este y el norte respectivamente). Ahora considerar dos observadores más, el primero está en reposo en un sistema $\mathcal{S}'$ que viaja con velocidad constante v hacia el este relativo a $\mathcal{S}$, y el segundo está en reposo en un sistema $\mathcal{S}''$ que viaja con *aceleración* constante hacia el este relativo a $\mathcal{S}$ (los tres sistemas coinciden en el momento en que empujo el cajón, y $\mathcal{S}''$ están en reposo relativo a $\mathcal{S}$ en el mismo instante). **(b)** Hallar las coordenadas x', y' del cajón y describir su trayectoria vista desde el sistema $\mathcal{S}'$. **(c)** Hacer lo mismo para $\mathcal{S}''$. ¿Cuál de los sistemas es inercial?

1.27 ⋆⋆ La característica de un sistema de referencia inercial es que cualquier objeto sometido a una fuerza neta cero viajará a lo largo de una línea recta con velocidad constante. Para ilustrar esto, considerar el siguiente experimento: estoy situado en el suelo (que tomaremos como un sistema inercial) al lado de una plataforma giratoria horizontal perfectamente plana, que rota con velocidad angular constante ω. Me inclino y empujo un cajón sin rozamiento de tal manera que se deslice por la plataforma, directamente hacia el centro. El cajón está sometido a una fuerza neta cero y, visto desde mi sistema inercial, viaja en línea recta. Describir la trayectoria del cajón observada por alguien sentado en reposo sobre la plataforma. Esto requiere pensar con cuidado, pero se debe ser capaz de obtener una imagen cualitativa. Para una imagen cuantitativa, ayuda utilizar coordenadas polares; ver Problema 1.46.

Sección 1.5 La tercera ley y la conservación del momento

1.28 ⋆ Seguir los pasos de la ecuación (1.25) a (1.29) en la prueba de la conservación del momento, pero tratar el caso en el que $N = 3$ y escribir todos los sumandos explícitamente para asegurarse de que se entienden las diferentes manipulaciones.

1.29 ⋆ Hacer las mismas tareas que en el Problema 1.28 pero para el caso de cuatro partículas ($N = 4$).

1.30 ⋆ Leyes de conservación, como la de conservación del momento, muchas veces proporcionan una sorprendente cantidad de información sobre el posible desenlace de un experimento. Este es quizá el ejemplo más sencillo: dos objetos de masas m_1 y m_2 no están sometidos a fuerzas externas. El objeto 1 viaja con velocidad $\mathbf{v}$ cuando colisiona con el objeto 2, que se encuentra en reposo. Los dos objetos permanecen juntos y se mueven con velocidad común $\mathbf{v}'$. Utilizar la conservación del momento para encontrar $\mathbf{v}'$ en términos de $\mathbf{v}$, m_1 y m_2.

1.31 ⋆ En la Sección 1.5 demostramos que la tercera ley de Newton implica la conservación del momento. Demostrar lo contrario, que si la ley de conservación del momento se aplica a cada grupo posible de partículas, entonces las fuerzas entre las partículas deben cumplir la tercera ley. [*Ayuda:* No importa cuántas partículas tenga el sistema, siempre se puede centrar la atención en tan solo dos de ellas (llamándolas 1 y 2). La ley de la conservación del momento dice que

si no existen fuerzas externas sobre este par de partículas, entonces su momento total debe ser constante. Usar esto para probar que $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$].

1.32 ⋆⋆ Si se tiene algo de experiencia en electromagnetismo, se puede hacer el siguiente problema que aborda la curiosa situación ilustrada en la Figura 1.8. Los campos eléctrico y magnético en un punto $\mathbf{r}_1$ debidos a la carga q_2 situada en $\mathbf{r}_2$ que se mueve con velocidad constante $\mathbf{v}_2$ (con $v_2 \ll c$) son[15]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_2}{s^2}\hat{\mathbf{s}} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{q_2}{s^2}\mathbf{v}_2 \times \hat{\mathbf{s}}$$

donde $\mathbf{s} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ es el vector que apunta desde $\mathbf{r}_2$ a $\mathbf{r}_1$. (Las primeras de estas se deben reconocer como la ley de Coulomb). Si $\mathbf{F}_{12}^{\text{el}}$ y $\mathbf{F}_{12}^{\text{mag}}$ denotan las fuerzas eléctrica y magnética sobre una carga q_1 situada en $\mathbf{r}_1$ con velocidad $\mathbf{v}_1$, demostrar que $F_{12}^{\text{mag}} \leq (v_1 v_2/c^2)F_{12}^{\text{el}}$. Esto quiere decir que en el dominio no relativista es legítimo ignorar la fuerza magnética entre dos cargas en movimiento.

1.33 ⋆⋆⋆ Si se tiene algo de experiencia en electromagnetismo y con cálculo vectorial, probar que las fuerzas magnéticas, $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{21}$, entre dos lazos de corriente continua cumplen la tercera ley de Newton. [*Ayudas:* Considerar que las dos corrientes son I_1 e I_2 y que los puntos típicos en los dos lazos son $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$. Si $d\mathbf{r}_1$ y $d\mathbf{r}_2$ son segmentos cortos de los lazos, entonces, de acuerdo con la ley de Biot-Savart, la fuerza sobre $d\mathbf{r}_1$ debida a $d\mathbf{r}_2$ es

$$\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I_1 I_2}{s^2}\, d\mathbf{r}_1 \times (d\mathbf{r}_2 \times \hat{\mathbf{s}})$$

donde $\mathbf{s} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. La fuerza $\mathbf{F}_{12}$ se halla integrando ésta en los dos lazos. Es necesario usar la regla «*BAC* − *CAB*» para simplificar el producto triple].

1.34 ⋆⋆⋆ Probar que en ausencia de fuerzas externas el momento *angular* (definido como $\mathbf{L} = \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha$) de un sistema de N partículas se conserva. [*Ayudas*: Es necesario imitar el razonamiento desde (1.25) hasta (1.29). En este caso se necesita más que la tercera ley de Newton: además es necesario asumir que las fuerzas entre las partículas son *centrales*; esto es, $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ actúa a lo largo de la línea que une las partículas α y β. Una discusión completa sobre el momento angular aparece en el Capítulo 3].

Sección 1.6 La segunda ley de Newton en coordenadas cartesianas

1.35 ⋆ Una pelota de golf es golpeada desde el nivel del suelo con velocidad v_o en dirección este y con un ángulo θ por encima de la horizontal. Despreciando la resistencia del aire, usar la segunda ley de Newton (1.35) para encontrar la posición como una función del tiempo, utilizando coordenadas con x medida al este, y al norte y z verticalmente hacia arriba. Hallar el tiempo que tarda la pelota de golf en volver al suelo y la distancia que viaja en ese tiempo.

1.36 ⋆ Un avión, que vuela horizontalmente a velocidad constante v_o y a una altura h sobre el mar, debe dejar caer un paquete con provisiones a un náufrago que está en una balsa. **(a)** Escribir la segunda ley de Newton para el paquete que cae desde el avión, suponiendo que se puede despreciar la resistencia del aire. Resolver las ecuaciones para dar la posición del paquete en vuelo como una función del tiempo t. **(b)** ¿A qué distancia anterior a la balsa (medida horizontalmente) debe arrojar el piloto el paquete para acertar en la balsa? ¿Cuál es esta distancia si $v_o = 50$ m/s, $h = 100$ m y $g \approx 10$ m/s^2? **(c)** ¿En qué intervalo de tiempo ($\pm\Delta t$) debe el piloto dejar caer el paquete si debe aterrizar en un entorno de ±10 m de la balsa?

1.37 ⋆ Un estudiante golpea un cajón sin rozamiento con velocidad inicial v_o, de tal manera que desliza en línea recta hacia arriba por un plano inclinado un ángulo θ sobre la horizontal. **(a)** Es-

[15] Ver, por ejemplo, David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3ª ed., Prentice Hall, (1999), p. 440.

cribir la segunda ley de Newton para el cajón y resolverla para dar la posición como una función del tiempo. **(b)** ¿Cuánto tardará el cajón en volver a su punto de partida?

1.38 ⋆ Se apoya una plancha rectangular sobre el suelo horizontal y después se empuja la plancha por uno de los bordes hasta que queda en ángulo θ con la horizontal. Escoger el origen en cualquiera de las dos esquinas que tocan el suelo, el eje x apuntando a lo largo del borde inferior de la plancha, el eje y apuntando por la pendiente, y el eje z normal en la plancha. Entonces se le da una patada a un cajón sin rozamiento que está en reposo en O de tal manera que se desliza por la plancha con velocidad inicial $(v_{ox}, v_{oy}, 0)$. Escribir la segunda ley de Newton usando las coordenadas dadas y hallar después el tiempo que tarda el cajón en volver al nivel del suelo y la distancia a la que está de O en ese momento.

1.39 ⋆⋆ Una pelota es arrojada con velocidad inicial v_0 hacia arriba por un plano inclinado. El plano está inclinado un ángulo ϕ por encima de la horizontal, y la velocidad inicial de la pelota forma un ángulo θ por encima del plano. Elegir los ejes con x medido hacia arriba por la pendiente, y normal a la pendiente, y z cruzándola. Escribir la segunda ley de Newton usando estos ejes y hallar la posición de la pelota en función del tiempo. Mostrar que la pelota aterriza a una distancia $R = 2v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos(\theta + \phi)/(g\cos^2\phi)$ medida desde su punto de lanzamiento. Mostrar que para v_0 y ϕ dadas, el máximo alcance posible por el plano inclinado es $R_{\max} = v_0^2/[g(1+\operatorname{sen}\phi)]$.

1.40 ⋆⋆⋆ Un cañón dispara una pelota con un ángulo θ por encima del suelo horizontal. **(a)** Despreciando la resistencia del aire, usar la segunda ley de Newton para encontrar la posición de la pelota en función del tiempo. (Considerar los siguientes ejes: x medido horizontalmente, y medido verticalmente). **(b)** Sea $r(t)$ la distancia de la pelota con respecto al cañón. ¿Cuál es el valor más grande posible que puede tomar θ si $r(t)$ aumenta con el vuelo de la pelota? [*Ayuda:* Utilizando la solución de la parte (a) se puede escribir r^2 como $x^2 + y^2$, y entonces encontrar la condición de que r^2 siempre aumenta].

Sección 1.7 Coordenadas polares en dos dimensiones

1.41 ⋆ Un astronauta que está en el espacio, en ausencia de gravedad, tiene una masa m sujeta al extremo de una cuerda de longitud R y la hace girar en un círculo con velocidad angular constante ω. Escribir la segunda ley de Newton (1.48) en coordenadas polares y hallar la tensión en la cuerda.

1.42 ⋆ Probar que las transformaciones de coordenadas rectangulares a polares y viceversa están dadas por las ecuaciones (1.37). Explicar por qué la ecuación para ϕ no es del todo completa y dar una versión completa.

1.43 ⋆ **(a)** Probar que el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ de coordenadas polares en dos dimensiones es igual a

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\operatorname{sen}\phi$$

y hallar la expresión correspondiente para $\hat{\boldsymbol{\phi}}$. **(b)** Suponiendo que ϕ depende del tiempo t, diferenciar las respuestas de la parte (a) para dar una prueba alternativa de los resultados (1.42) y (1.46) para las derivadas temporales $\dot{\hat{\mathbf{r}}}$ y $\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}}$.

1.44 ⋆ Verificar por sustitución directa que la función $\phi(t) = A\operatorname{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)$ de (1.56) es una solución de la ecuación diferencial de segundo orden (1.55), $\ddot{\phi} = -\omega^2\phi$. (Como esta solución involucra dos constantes arbitrarias (los coeficientes del seno y del coseno) es de hecho la solución general).

1.45 ⋆⋆ Probar que si $\mathbf{v}(t)$ es cualquier vector que depende del tiempo (por ejemplo la velocidad de una partícula en movimiento) pero con *magnitud constante*, entonces $\dot{\mathbf{v}}(t)$ es ortogonal a $\mathbf{v}(t)$. Probar lo contrario, que si $\dot{\mathbf{v}}(t)$ es ortogonal a $\mathbf{v}(t)$, entonces $|\mathbf{v}(t)|$ es constante. [*Ayuda:* Considerar la derivada de $\mathbf{v}^2$]. Este es un resultado muy práctico. Explica por qué, en polares en dos dimensiones, $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ debe hallarse en la dirección de $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ y viceversa. También muestra que la

velocidad de una partícula cargada en un campo magnético es constante, porque la aceleración es perpendicular a la velocidad.

1.46 ⋆⋆ Considerar el experimento del Problema 1.27, en el cual un cajón sin rozamiento se desliza por una plataforma giratoria siguiendo una línea recta que pasa por el centro O. **(a)** Escribir las coordenadas polares r, ϕ del cajón como funciones del tiempo, medidas en el sistema inercial $\mathcal{S}$ de un observador en el suelo. (Suponer que el cajón fue lanzado a lo largo del eje $\phi = 0$ en $t = 0$). **(b)** Ahora escribir las coordenadas polares r', ϕ' del cajón medidas por un observador (sistema $\mathcal{S}'$) en reposo sobre la plataforma giratoria. (Elegir estas coordenadas de tal manera que ϕ y ϕ' coincidan en $t = 0$). Describir y esbozar la trayectoria vista por este segundo observador. ¿Es inercial el sistema $\mathcal{S}'$?

1.47 ⋆⋆ La posición de un punto P en tres dimensiones está dada por el vector $\mathbf{r} = (x, y, z)$ en coordenadas rectangulares (o cartesianas). La misma posición puede ser especificada por **coordenadas cilíndricas**, ρ, ϕ, z, que están definidas como sigue: P' denota la proyección de P sobre el plano xy; es decir, P' tiene coordenadas cartesianas $(x, y, 0)$. Entonces ρ y ϕ están definidas como las coordenadas en dos dimensiones P' en el plano xy, mientras que z es la tercera coordenada cartesiana, invariable. **(a)** Hacer un esbozo para ilustrar las tres coordenadas cilíndricas. Dar expresiones para ρ, ϕ, z en términos de las coordenadas cartesianas x, y, z. Explicar con palabras qué es ρ («ρ es la distancia de P de _____»). Hay muchas variantes en la notación. Por ejemplo, algunas personas utilizan r en lugar de ρ. Explicar por qué este uso de r no es muy recomendable. **(b)** Describir los tres vectores unitarios $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ y escribir el desarrollo del vector de posición $\mathbf{r}$ en términos de estos vectores unitarios. **(c)** Derivar la última respuesta dos veces para encontrar las componentes cilíndricas de la aceleración $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ de la partícula. Para hacer esto, se necesitará saber las derivadas temporales de $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ y $\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Se pueden obtener de los resultados correspondientes en dos dimensiones (1.42) y (1.46), o se pueden derivar directamente como en el Problema 1.48.

1.48 ⋆⋆ Hallar expresiones para los vectores unitarios $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ en coordenadas polares cilíndricas (Problema 1.47) en término de las cartesianas $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$. Diferenciar estas expresiones con respecto al tiempo para hallar $d\hat{\boldsymbol{\rho}}/dt$, $d\hat{\boldsymbol{\phi}}/dt$ y $d\hat{\mathbf{z}}/dt$.

1.49 ⋆⋆ Imaginar dos cilíndricos concéntricos, centrados en el eje vertical z, con radios $R \pm \epsilon$, donde ϵ es muy pequeño. Se inserta un pequeño cajón sin rozamiento de espesor 2ϵ entre los dos cilindros, de tal manera que se puede considerar una masa puntual que puede moverse libremente a una distancia fija del eje vertical. Si usamos coordenadas polares cilíndricas (ρ, ϕ, z) para su posición (Problema 1.47), entonces ρ está fijo en $\rho = R$, mientras que ϕ y z puede variar. Escribir y resolver la segunda ley de Newton para el movimiento general del cajón, incluyendo los efectos de la gravedad. Describir el movimiento del cajón.

1.50 ⋆⋆⋆ [Ordenador] La ecuación diferencial (1.51) para el monopatín del Ejemplo 1.2 no se puede resolver en términos de funciones elementales, pero se resuelve numéricamente de manera sencilla. **(a)** Si se tiene acceso a programas como Mathematica, Maple o Matlab, que pueden resolver ecuaciones diferenciales numéricamente, resolver la ecuación diferencial para el caso en que la tabla se suelta desde $\phi_0 = 20$ grados, usando los valores $R = 5$ m y $g = 9{,}8$ m/s^2. Hacer una gráfica de ϕ respecto al tiempo para dos o tres períodos. **(b)** En el mismo gráfico, representar la solución aproximada (1.57) con el mismo $\phi_0 = 20°$. Comentar las dos gráficas. Nota: si no se ha usado el cálculo numérico antes, se necesitará aprender la sintaxis necesaria. Por ejemplo, en Mathematica se necesitará aprender la sintaxis para «NDSolve» y cómo representar la solución que proporciona. Lleva algún tiempo, pero es algo que merece la pena aprender.

1.51 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Repetir todo el Problema 1.50 pero usando los valores iniciales $\phi_0 = \pi/2$.

CAPÍTULO 2

Proyectiles y partículas cargadas

En este capítulo presento dos temas: el movimiento de proyectiles sometidos a las fuerzas de la gravedad y de la resistencia del aire, y el movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos uniformes. Ambos problemas se pueden resolver utilizando las leyes de Newton en coordenadas cartesianas, y ambos nos permiten repasar e introducir algunos conceptos importantes de matemáticas. Sobre todo, ambos son problemas de gran interés práctico.

2.1 Resistencia del aire

La mayoría de los cursos introductorios de física dedican algún tiempo al estudio del movimiento de proyectiles, pero casi siempre ignoran la resistencia del aire. En muchos problemas es una aproximación excelente; en otros, la resistencia del aire es obviamente importante y necesitamos saber cómo tenerla en cuenta. De manera más general, sea o no importante la resistencia del aire, necesitamos alguna técnica para estimar cuál es su importancia real.

Comencemos repasando algunas de las propiedades básicas de la **fuerza de resistencia**, **f**, del aire, u otro medio, a través del cual se está moviendo el objeto. (Generalmente hablaré de «resistencia del aire» porque el aire es el medio a través del cual se mueven la mayoría de los proyectiles, pero las mismas consideraciones aplican a otros gases y muchas veces a los líquidos también). El hecho más obvio sobre la resistencia del aire, bien conocido por todo aquel que monta en bicicleta, es que depende de la velocidad, v, del objeto involucrado. Además, para muchos objetos, la dirección de la fuerza debida al movimiento a través del aire es opuesta a la velocidad **v**. Para ciertos objetos, tales como una esfera que no rota,

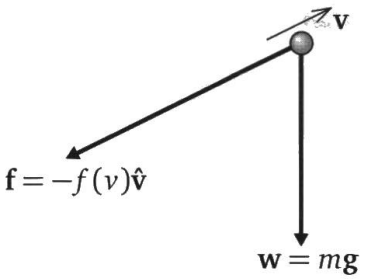


Figura 2.1. Un proyectil está sometido a dos fuerzas, la fuerza de la gravedad, $\mathbf{w} = m\mathbf{g}$, y la fuerza de la resistencia del aire, $\mathbf{f} = -f(v)\hat{\mathbf{v}}$.

esto es cierto exactamente, y para muchos es una buena aproximación. No obstante, se debe ser consciente de que hay situaciones en las que es totalmente falso: la fuerza del aire sobre el ala de un avión tiene una fuerte componente lateral, llamada **sustentación**, sin la cual ningún avión podría volar. Sin embargo, supondremos que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{v}$ apuntan en direcciones opuestas; esto es, consideraremos sólo objetos para los que la fuerza lateral es cero, o al menos suficientemente pequeña para ser ignorada. La situación se ilustra en la Figura 2.1 y está indicada por la expresión

$$\mathbf{f} = -f(v)\hat{\mathbf{v}}, \tag{2.1}$$

donde $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ denota al vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$, y $f(v)$ es la magnitud de $\mathbf{f}$.

La función $f(v)$ que da la magnitud de la resistencia del aire varía con v de manera complicada, especialmente cuando la velocidad del objeto se aproxima a la del sonido. Sin embargo, a velocidades más bajas muchas veces es una buena aproximación escribir[1]

$$f(v) = bv + cv^2 = f_{\text{lin}} + f_{\text{cuad}} \tag{2.2}$$

donde f_{lin} y f_{cuad} son los términos lineal y cuadrático respectivamente,

$$f_{\text{lin}} = bv \quad \text{y} \quad f_{\text{cuad}} = cv^2. \tag{2.3}$$

Los orígenes físicos de estos dos términos son bastante diferentes: el término lineal, f_{lin}, proviene de la resistencia viscosa del medio y es generalmente proporcional a la viscosidad del medio y al tamaño lineal del proyectil (Problema 2.2). El término

[1] Matemáticamente, la expresión(2.2) es, en cierto sentido, obvia. Se espera que cualquier función razonable tenga un desarrollo en serie de Taylor, $f = a + bv + cv^2 + \cdots$. Para v, suficientemente pequeña, los primeros tres términos deberían proporcionar una buena aproximación, y, como $f = 0$ cuando $v = 0$ el término constante, a, debe ser cero.

cuadrático, f_{cuad}, proviene de que la partícula tiene que acelerar la masa de aire con la que está chocando continuamente; f_{cuad} es proporcional a la densidad del medio y la sección de paso del proyectil (Problema 2.4). En particular, para un proyectil esférico (una bala de cañón, una pelota de béisbol o una gota de lluvia), los coeficientes b y c en (2.2) tienen la forma

$$b = \beta D \quad \text{y} \quad c = \gamma D^2 \tag{2.4}$$

donde D es el diámetro de la esfera y los coeficientes β y γ dependen de la naturaleza del medio. Para un proyectil esférico en aire a presión y temperatura estándares (STP), se tienen los valores aproximados

$$\beta = 1{,}6 \times 10^{-4}\,\text{N} \cdot \text{s/m}^2 \tag{2.5}$$

y

$$\gamma = 0{,}25\,\text{N} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4. \tag{2.6}$$

(Para calcular estas dos constantes, véanse los Problemas 2.2 y 2.4). Es necesario recordar que estos valores son válidos sólo para una esfera que se mueve a través del aire en condiciones de STP. Sin embargo, proporcionan por lo menos una idea aproximada de la importancia de la fuerza de resistencia incluso para cuerpos no esféricos que se mueven a través de diferentes gases a cualesquiera temperaturas y presiones normales.

Con frecuencia, podemos despreciar uno de los términos en (2.2) comparándolo con el otro, y esto simplifica la tarea de resolver la segunda ley de Newton. Para decidir si sucede esto en un determinado problema, y qué término despreciar, necesitamos comparar los tamaños de los dos términos:

$$\frac{f_{\text{cuad}}}{f_{\text{lin}}} = \frac{cv^2}{bv} = \frac{\gamma D}{\beta} v = \left(1{,}6 \times 10^3 \,\frac{\text{s}}{\text{m}^2}\right) Dv \tag{2.7}$$

si usamos los valores (2.5) y (2.6) para una esfera en aire. En un problema dado, tenemos sólo que sustituir los valores de D y v en la expresión para saber si uno de los términos se puede despreciar, tal como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1 *Una pelota de béisbol y algunas gotas de un líquido*

Establecer la importancia relativa de las resistencias lineal y cuadrática sobre una pelota de béisbol de diámetro $D = 7$ cm, que viaja a una modesta $v = 5$ m/s. Hacer lo mismo para una gota de lluvia ($D = 1$ mm y $v = 0{,}6$ m/s) y para una gotita de aceite utilizada en el experimento de la gota de aceite de Millikan ($D = 1{,}5\,\mu$m y $v = 5 \times 10^{-5}$ m/s).

Cuando se sustituyen los números para la pelota de béisbol en (2.7) (asegurándose de convertir el diámetro a metros), obtenemos

$$\frac{f_{\text{cuad}}}{f_{\text{lin}}} \approx 600 \qquad \text{[pelota de béisbol]}. \tag{2.8}$$

Para esta pelota, el término lineal es claramente despreciable y sólo es necesario considerar el término cuadrático. Si la pelota viaja más deprisa, la razón $f_{\text{cuad}}/f_{\text{lin}}$ es todavía mayor. A velocidades más lentas la razón es menos pronunciada, pero incluso a 1 m/s la razón es 100. De hecho, si v es suficientemente pequeña como para que el término lineal sea comparable al cuadrático, ambos términos se pueden despreciar. Entonces, para pelotas de béisbol y objetos similares, es casi siempre seguro despreciar f_{lin} y tomar la fuerza de resistencia

$$\mathbf{f} = -cv^2\hat{\mathbf{v}}. \tag{2.9}$$

Para la gota de lluvia, los números dan

$$\frac{f_{\text{cuad}}}{f_{\text{lin}}} \approx 1 \qquad \text{[gota de lluvia]}. \tag{2.10}$$

Entonces para esta gota de lluvia los dos términos son comparables y no pueden ser despreciados (lo que hace que la resolución del movimiento sea más difícil). Si la gota fuera mucho más grande o estuviera moviéndose mucho más rápidamente, entonces el término lineal se podría despreciar; y si la gota fuera mucho más pequeña o estuviera moviéndose mucho más despacio, entonces el término cuadrático se podría despreciar. Pero en general, con gotas de lluvia y objetos similares, vamos a tener que considerar ambos f_{lin} y f_{cuad}.

Para la gota de aceite en el experimento de Millikan los números dan

$$\frac{f_{\text{cuad}}}{f_{\text{lin}}} \approx 10^{-7} \qquad \text{[gota de aceite de Millikan]}. \tag{2.11}$$

En este caso, el término cuadrático es totalmente despreciable, y podemos tomar

$$\mathbf{f} = -bv\hat{\mathbf{v}} = -b\mathbf{v}, \tag{2.12}$$

donde la segunda expresión aparece porque, por supuesto, $v\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$.

La moraleja de este ejemplo es clara: primero, hay objetos para los cuales la fuerza de resistencia es predominantemente lineal, y la fuerza cuadrática se puede despreciar (especialmente, gotas muy pequeñas en aire, pero también objetos un po-

co más grandes en fluidos muy viscosos, como una bola de rodamiento que se mueve a través de miel fluida). Por otro lado, para la mayoría de los proyectiles, tales como pelotas de golf, balas de cañón, e incluso un humano en caída libre, la fuerza de resistencia dominante es cuadrática, y se puede despreciar el término lineal. Este es un hecho desafortunado porque el problema lineal es mucho más fácil de resolver que el cuadrático. En las siguientes dos secciones, discutiré el caso lineal, precisamente porque es el más fácil. Sin embargo el caso cuadrático *tiene* aplicaciones prácticas, y las matemáticas necesarias para resolverlo se usan ampliamente en muchos campos. En la Sección 2.4 consideraré el caso más difícil, pero más común, de la resistencia cuadrática.

Para concluir esta sección introductoria, debo mencionar el número de Reynolds, un parámetro importante que aparece muchas veces en tratamientos más avanzados de movimientos de fluidos. Como ya he mencionado, la resistencia lineal f_{lin} se puede relacionar con la viscosidad del fluido a través del cual se mueven nuestros proyectiles, y el término cuadrático f_{cuad} está relacionado con la inercia (y por tanto con la densidad) del fluido. Entonces uno puede relacionar la razón $f_{\text{cuad}}/f_{\text{lin}}$ con los parámetros fundamentales η, la viscosidad, y ϱ, la densidad, del fluido (vea el Problema 2.3). El resultado es que la razón $f_{\text{cuad}}/f_{\text{lin}}$ es aproximadamente del mismo orden de magnitud que el número sin dimensiones $R = Dv\varrho/\eta$, llamado **número de Reynolds**. Entonces una manera rápida y general de resumir la anterior discusión es decir que la resistencia cuadrática f_{cuad} es dominante cuando el número de Reynolds R es grande, mientras que el término lineal domina cuando R es pequeño.

2.2 Resistencia lineal del aire

Consideremos primero un proyectil para el cual la fuerza de resistencia cuadrática es despreciable, de tal manera que la fuerza de la resistencia del aire está dada por (2.12). Veremos directamente que, como la fuerza de resistencia es lineal en $\mathbf{v}$, las ecuaciones de movimiento son muy fáciles de resolver. Las dos fuerzas sobre el proyectil son el peso $\mathbf{w} = m\mathbf{g}$ y la fuerza de resistencia $\mathbf{f} = -b\mathbf{v}$, como se muestra en la Figura 2.2. Por tanto la segunda ley, $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, establece que

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v}. \tag{2.13}$$

Un hecho interesante de esta forma es que, como ninguna de las fuerzas depende de $\mathbf{r}$, la ecuación de movimiento no involucra a $\mathbf{r}$ directamente (sólo las derivadas primera y segunda de $\mathbf{r}$). De hecho, podemos reescribir $\ddot{\mathbf{r}}$ como $\dot{\mathbf{v}}$, y (2.13) se convierte en

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v}, \tag{2.14}$$

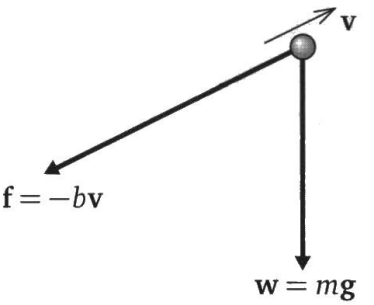


Figura 2.2. Las dos fuerzas que actúan sobre un proyectil para el que la fuerza de la resistencia del aire es lineal con la velocidad, $\mathbf{f} = -b\mathbf{v}$.

una ecuación diferencial de primer orden para **v**. Esta simplificación se puede hacer porque las fuerzas dependen sólo de **v** y no de **r**. Esto significa que tenemos que resolver sólo una ecuación diferencial de primer orden para **v** y entonces integrar **v** para hallar **r**. Quizás la característica simplificadora más importante de la resistencia lineal es que la ecuación de movimiento se separa en sus componentes con particular facilidad. Por ejemplo, con x medido a la derecha e y verticalmente hacia abajo, (2.14) proporciona

$$m\dot{v}_x = -bv_x \tag{2.15}$$

y

$$m\dot{v}_y = mg - bv_y. \tag{2.16}$$

Esto es, tenemos dos ecuaciones separadas, una para v_x y otra para v_y; en la ecuación para v_x no aparece v_y y viceversa. Es importante darse cuenta de que esto sucedió sólo porque la fuerza de resistencia era lineal en **v**. Por ejemplo, si la fuerza de resistencia fuera cuadrática,

$$\mathbf{f} = -cv^2\hat{\mathbf{v}} = -cv\mathbf{v} = -c\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,\mathbf{v}, \tag{2.17}$$

entonces en (2.14) tendríamos que reemplazar el término $-b\mathbf{v}$ por (2.17). En lugar de las dos ecuaciones (2.15) y (2.16), tendríamos

$$\left.\begin{aligned} m\dot{v}_x &= -c\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,v_x \\ m\dot{v}_y &= mg - c\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,v_y. \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Aquí, cada ecuación incluye *ambas* variables, v_x y v_y. Estas dos ecuaciones diferenciales *acopladas* son mucho más difíciles de resolver que las ecuaciones desacopladas del caso lineal.

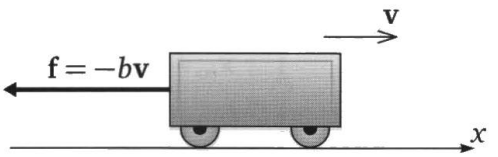


Figura 2.3. Un carro se mueve por una pista sin rozamiento en un medio que produce una fuerza de resistencia lineal.

Como están desacopladas, podemos resolver cada ecuación para resistencias lineales separadamente y después poner las dos soluciones juntas. Más aún, cada ecuación define un problema que es interesante por sí mismo. La ecuación (2.15) es la ecuación de movimiento para un objeto (un carro con ruedas sin rozamiento, por ejemplo) deslizándose horizontalmente en un medio que produce resistencia lineal. La ecuación (2.16) describe un objeto (una diminuta gota de aceite, por ejemplo) que cae verticalmente con resistencia lineal del aire. Resolveré independientemente estos dos problemas separados.

Movimiento horizontal con resistencia lineal

Consideremos un objeto como el carro de la Figura 2.3 que se desliza horizontalmente en un medio linealmente resistivo. Supondré que en $t = 0$ el carro está en $x = 0$ con velocidad $v_x = v_{xo}$. La única fuerza que actúa sobre el carro es la resistencia $\mathbf{f} = -b\mathbf{v}$, por tanto el carro se frena inevitablemente. El ritmo de desaceleración viene determinado por (2.15), que tiene la forma general

$$\dot{v}_x = -kv_x, \tag{2.19}$$

donde k es una abreviatura temporal para $k = b/m$. Esta es una ecuación diferencial de primer orden en v_x, cuya solución general debe contener exactamente una constante arbitraria. La ecuación establece que la derivada de v_x es igual a $-k$ veces v_x, y la única función con esta propiedad es la función exponencial

$$v_x(t) = Ae^{-kt} \tag{2.20}$$

que satisface (2.19) para cualquier valor de la constante A (Problemas 1.24 y 1.25). Como esta solución contiene una constante arbitraria, es la solución *general* de nuestra ecuación diferencial de primer orden; es decir, *cualquier* solución debe tener esta forma. En nuestro caso, sabemos que $v_x(0) = v_{xo}$, así que $A = v_{xo}$, y concluimos que

$$v_x(t) = v_{xo}e^{-kt} = v_{xo}e^{-t/\tau}, \tag{2.21}$$

donde he introducido el parámetro conveniente

$$\tau = 1/k = m/b \qquad \text{[para la resistencia lineal]}. \tag{2.22}$$

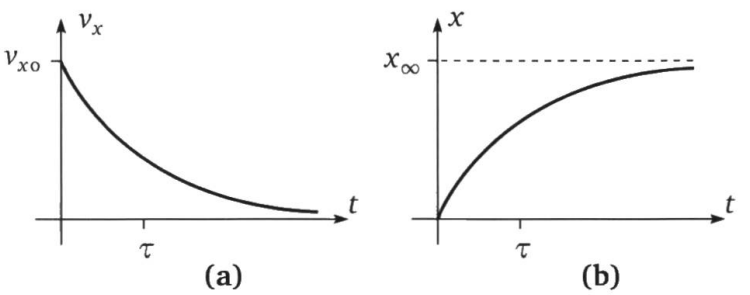


Figura 2.4. **(a)** La velocidad v_x como una función del tiempo, t, para un carro que se mueve horizontalmente con una fuerza resistiva lineal. Cuando $t \to \infty$, v_x tiende a cero exponencialmente. **(b)** La posición x como un función de t para el mismo carro. Cuando $t \to \infty$, $x \to x_\infty = v_{xo}\tau$.

Vemos que nuestro carro se frena de manera exponencial, como muestra la Figura 2.4(a). El parámetro τ tiene dimensiones de tiempo (como se debería comprobar), y se puede ver de (2.21) que cuando $t = \tau$, la velocidad es $1/e$ de su valor inicial; esto es, τ es el tiempo «$1/e$» para la velocidad que decrece exponencialmente. Como $t \to \infty$, la velocidad tiende a cero.

Para hallar la posición como función del tiempo, sólo tenemos que integrar la velocidad (2.21). Este tipo de integraciones se pueden llevar a cabo usando la integral definida o indefinida. La integral definida tiene la ventaja de que automáticamente tiene en cuenta la constante de integración: porque $v_x = dx/dt$,

$$\int_0^t v_x(t')\,dt' = x(t) - x(0).$$

(advierta que he llamado t' a la variable «muda» de integración para evitar confusión con el límite superior t). Por tanto

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t v_{xo} e^{-t'/\tau}\,dt' \\ &= 0 + \left[-v_{xo}\tau e^{-t'/\tau}\right]_0^t \\ &= x_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \end{aligned} \tag{2.23}$$

En la segunda línea he utilizado nuestra suposición de que $x = 0$ cuando $t = 0$. Y en la última he introducido el parámetro

$$x_\infty = v_{xo}\tau, \tag{2.24}$$

que es el límite de $x(t)$ cuando $t \to \infty$. Concluimos que, a medida que el carro se frena, su posición se aproxima a x_∞ asintóticamente, como muestra la Figura 2.4(b).

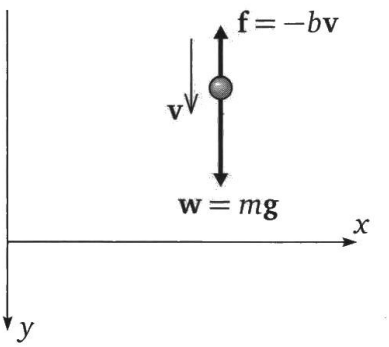


Figura 2.5. Fuerzas que actúan sobre un proyectil lanzado verticalmente hacia abajo y que está sometido a resistencia lineal del aire.

Movimiento vertical con resistencia lineal

Consideremos un proyectil que está sometido a resistencia lineal del aire y es lanzado verticalmente hacia abajo. Las dos fuerzas que actúan sobre el proyectil son la gravedad y la resistencia del aire, como se muestra en la Figura 2.5. Si medimos y verticalmente hacia abajo, la única componente interesante de la ecuación de movimiento es la componente y, que es

$$m\dot{v}_y = mg - bv_y\,. \tag{2.25}$$

Con la velocidad hacia abajo ($v_y > 0$), la fuerza de retardo es hacia arriba, mientras que la fuerza de la gravedad es hacia abajo. Si v_y es pequeña, la fuerza de la gravedad es más importante que la fuerza de resistencia, y el objeto que cae se acelera en su movimiento hacia abajo. Esto continuará hasta que la fuerza de resistencia equilibre al peso. La velocidad a la cual esto ocurre se encuentra fácilmente haciendo (2.25) igual a cero, para dar $v_y = mg/b$ o

$$v_y = v_{\text{lím}}$$

donde he definido la **velocidad límite**

$$v_{\text{lím}} = \frac{mg}{b} \qquad \text{[para la resistencia lineal]}. \tag{2.26}$$

La velocidad límite es la velocidad a la cual nuestro proyectil finalmente caerá, si le da tiempo a hacerlo. Como depende de m y b, es diferente para diferentes cuerpos. Por ejemplo, si dos objetos tienen la misma forma y tamaño (b la misma para ambos), el objeto más pesado (m más grande) tendrá la velocidad límite más alta, tal como se esperaría. Como $v_{\text{lím}}$ es inversamente proporcional al coeficiente b de la resistencia del aire, podemos ver $v_{\text{lím}}$ como una medida inversa de la importancia de la resistencia del aire (cuanto mayor sea la resistencia del aire, menor será $v_{\text{lím}}$), otra vez justo como se esperaría.

Ejemplo 2.2 *Velocidad límite de gotas pequeñas de líquido*

Hallar la velocidad límite de una diminuta gota de aceite en el experimento de Millikan de la gota de aceite (diámetro $D = 1{,}5\,\mu$m y densidad $\varrho = 840\,\text{kg/m}^3$). Hacer lo mismo para una pequeña gota de niebla con diámetro $D = 0{,}2$ mm.

Del Ejemplo 2.1 sabemos que la resistencia lineal es dominante para estos objetos, de tal manera que la velocidad límite está dada por (2.26). Según (2.4), $b = \beta D$ donde $\beta = 1{,}6 \times 10^{-4}$ (en unidades SI). La masa de la gota es $m = \varrho\,\pi D^3/6$. Por lo tanto (2.26) se convierte en

$$v_{\text{lím}} = \frac{\varrho\,\pi D^2 g}{6\beta} \qquad \text{[para la resistencia lineal]}. \tag{2.27}$$

Lo que nos muestra este resultado tan interesante es que, para una densidad dada, la velocidad límite es proporcional a D^2. Esto supone que, cuando la resistencia del aire adquiere importancia, una esfera grande caerá más deprisa que una esfera pequeña de la misma densidad.[2]

Insertando los números, para una gota de aceite encontramos

$$v_{\text{lím}} = \frac{(840) \times \pi \times (1{,}5 \times 10^{-6})^2 \times (9{,}8)}{6 \times (1{,}6 \times 10^{-4})} = 6{,}1 \times 10^{-5}\,\text{m/s} \qquad \text{[gota de aceite]}.$$

En el experimento Millikian de la gota de aceite, las gotas caen tan despacio que su velocidad se puede medir mirándolas con un microscopio.

Insertando los números para una gota de niebla, de manera similar encontramos

$$v_{\text{lím}} = 1{,}3\,\text{m/s} \qquad \text{[gota de niebla]}. \tag{2.28}$$

Esta velocidad es representativa para una llovizna fina. Para una gota de agua más grande, la velocidad límite sería apreciablemente mayor, pero con una gota más grande (y por tanto más rápida), la resistencia cuadrática tendría que ser incluida en el cálculo para obtener un valor fiable para $v_{\text{lím}}$.

Hasta ahora hemos discutido sobre la velocidad límite de un proyectil (en movimiento vertical) pero ahora debemos discutir sobre cómo el proyectil se aproxima a esa velocidad. Esto viene determinado mediante la ecuación de movimiento (2.25), que podemos reescribir de la siguiente manera

[2] Estamos suponiendo que la fuerza de resistencia es lineal, pero es la misma conclusión cualitativa a la que se llega para una fuerza de resistencia cuadrática. (Problema 2.24).

$$m\dot{v}_y = -b(v_y - v_{\text{lím}}). \tag{2.29}$$

(Recuerde que $v_{\text{lím}} = mg/b$). Esta ecuación diferencial puede resolverse de diferentes maneras. (Para una alternativa vea el Problema 2.9). Quizá lo más sencillo sea indicar que es casi igual que la ecuación (2.15) para el movimiento horizontal, excepto que ahora en el segundo miembro tenemos $(v_y - v_{\text{lím}})$ en vez de v_x. La solución para el caso horizontal era la función exponencial (2.20). El truco para resolver nuestra nueva ecuación vertical (2.29) es introducir la nueva variable $u = (v_y - v_{\text{lím}})$, que satisface $m\dot{u} = -bu$ (porque $v_{\text{lím}}$ es constante). Como esto es *exactamente* igual que la ecuación (2.15) para el movimiento horizontal, la solución para u es la misma exponencial, $u = Ae^{-t/\tau}$. [Recordemos que la constante k en (2.20) se convirtió en $k = 1/\tau$]. Por lo tanto,

$$v_y - v_{\text{lím}} = Ae^{-t/\tau}.$$

Cuando $t = 0$, $v_y = v_{yo}$, así que $A = v_{yo} - v_{\text{lím}}$ y nuestra solución final para v_y como una función de t es

$$v_y(t) = v_{\text{lím}} + (v_{yo} - v_{\text{lím}})e^{-t/\tau} \tag{2.30}$$

$$= v_{yo}e^{-t/\tau} + v_{\text{lím}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \tag{2.31}$$

Esta segunda expresión da $v_y(t)$ como la suma de dos términos: el primero es igual a v_{yo} cuando $t = 0$, pero se vuelve cero mientras t aumenta; el segundo es igual a cero cuando $t = 0$, pero se acerca a $v_{\text{lím}}$ cuando $t \to \infty$. En particular, cuando $t \to \infty$,

$$v_y(t) \to v_{\text{lím}} \tag{2.32}$$

Justo como se había anticipado.

Examinemos el resultado (2.31) con un poco más de detalle para el caso en que $v_{yo} = 0$; es decir, el proyectil se deja caer desde el reposo. En este caso (2.31) se escribe

$$v_y(t) = v_{\text{lím}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \tag{2.33}$$

Este resultado aparece en la Figura 2.6, donde vemos que v_y comienza desde 0 y tiende a la velocidad límite, $v_y \to v_{\text{lím}}$, asintóticamente cuando $t \to \infty$. La importancia del tiempo τ para un cuerpo que cae se deduce fácilmente de (2.33). Cuando $t = \tau$, vemos que

$$v_y = v_{\text{lím}}(1 - e^{-1}) = 0{,}63v_{\text{lím}}.$$

Esto es, en un tiempo τ, el objeto alcanza el 63 % de la velocidad límite. Cálculos similares dan los siguientes resultados:

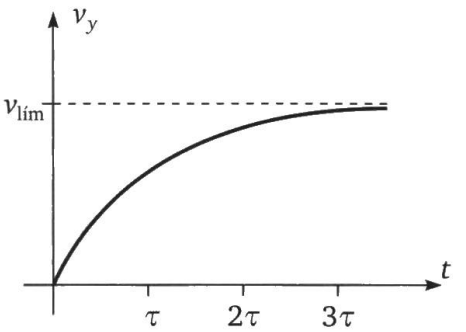


Figura 2.6. Cuando un objeto se deja caer en un medio con resistencia lineal, v_y tiende a su valor límite $v_{\text{lím}}$ como se muestra.

tiempo t	porcentaje de $v_{\text{lím}}$
0	0
τ	63 %
2τ	86 %
3τ	95 %

Por supuesto, la velocidad del objeto nunca alcanza realmente $v_{\text{lím}}$, pero τ es una buena medida de la rapidez con la que la velocidad se aproxima a $v_{\text{lím}}$. En particular, cuando $t = 3\tau$ la velocidad es el 95 % de $v_{\text{lím}}$, y para muchos propósitos podemos decir que después de un tiempo 3τ la velocidad es fundamentalmente igual a $v_{\text{lím}}$.

Ejemplo 2.3 *Tiempo característico para dos gotas de líquido*

Hallar los tiempos característicos, τ, para la gota de aceite y la gota de niebla del Ejemplo 2.2.

El tiempo característico τ fue definido en (2.22) como $\tau = m/b$, y $v_{\text{lím}}$ fue definida en (2.26) como $v_{\text{lím}} = mg/b$. Por tanto tenemos la útil relación

$$v_{\text{lím}} = g\tau. \tag{2.34}$$

Advierta que esta relación nos permite interpretar $v_{\text{lím}}$ como la velocidad que *adquiriría* un objeto que cae en un tiempo τ, *si tuviera un aceleración constante igual a* g. Advierta también que, como $v_{\text{lím}}$, el tiempo τ es un indicador inverso de la importancia de la resistencia del aire: cuando el coeficiente b de la resistencia del aire es pequeño, ambos $v_{\text{lím}}$ y τ son grandes; cuando b es grande, ambos $v_{\text{lím}}$ y τ son pequeños. Para nuestras intenciones actuales, la importancia de (2.34) es que, como ya hemos encontrado las velocidades límite de las dos gotas, podemos hallar inmediatamente los valores de τ. Para la gota de aceite de Millikan, obtuvimos que $v_{\text{lím}} = 6{,}1 \times 10^{-5}$ m/s, por lo tanto

$$\tau = \frac{v_{\text{lím}}}{g} = \frac{6{,}1 \times 10^{-5}}{9{,}8} = 6{,}2 \times 10^{-6}\,\text{s} \qquad \text{[gota de aceite]}.$$

Después de caer durante sólo 20 microsegundos, esta gota de aceite habrá adquirido el 95 % de su velocidad límite. Para casi cualquier propósito, la gota de aceite *siempre* viaja a su velocidad límite.

Para la gota de niebla del Ejemplo 2.2, la velocidad límite era $v_{\text{lím}} = 1{,}3$ m/s y así $\tau = v_{\text{lím}}/g \approx 0{,}13$ s. Después de unos 0,4 s, la gota habrá adquirido el 95 % de su velocidad límite.

Parta o no del reposo el objeto que cae, podemos hallar su posición y como una función del tiempo mediante la integración de la conocida forma (2.30) de v_y,

$$v_y(t) = v_{\text{lím}} + (v_{yo} - v_{\text{lím}})e^{-t/\tau}.$$

Suponiendo que la posición inicial del proyectil es $y = 0$, se sigue inmediatamente que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t v_y(t')\,dt' \\ &= v_{\text{lím}}t + (v_{yo} - v_{\text{lím}})\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Esta ecuación para $y(t)$ se puede combinar ahora con la ecuación (2.23) para $x(t)$ de manera que nos proporcione la órbita de cualquier proyectil que se mueva tanto horizontal como verticalmente en un medio lineal.

2.3 Trayectoria y alcance en un medio lineal

Vimos al principio de la última sección que la ecuación de movimiento para un proyectil que se mueve en cualquier dirección se divide en dos ecuaciones separadas, una para el movimiento horizontal y otra para el vertical [Ecuaciones (2.15) y (2.16)]. Hemos resuelto cada una de estas ecuaciones separadas en (2.23) y (2.35), y ahora podemos poner juntas estas soluciones para obtener la trayectoria de un proyectil arbitrario que se mueva en cualquier dirección. En esta discusión es ligeramente más conveniente medir y verticalmente *hacia arriba*, en cuyo caso debemos cambiar el signo de $v_{\text{lím}}$. (Es importante entender bien este punto). Entonces las dos ecuaciones de la órbita se transforman en

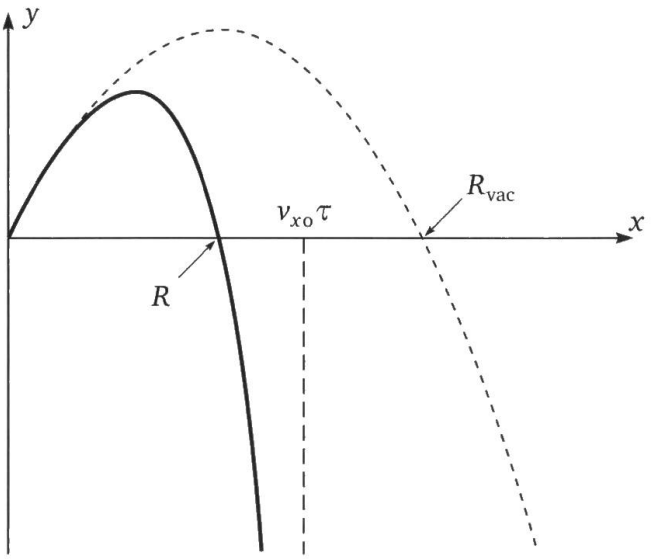


Figura 2.7. Trayectoria de un proyectil sometido a una fuerza de resistencia lineal (curva continua) y la correspondiente trayectoria en el vacío (curva a trazos). Al principio las dos curvas son muy parecidas, pero a medida que t aumenta, la resistencia del aire frena el proyectil y tira de su trayectoria hacia abajo, con una asíntota vertical en $x = v_{xo}\tau$. El alcance horizontal del proyectil se denomina R, y el correspondiente alcance en el vacío R_{vac}.

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= v_{xo}\tau\left(1-e^{-t/\tau}\right) \\ y(t) &= (v_{yo}+v_{lím})\tau\left(1-e^{-t/\tau}\right)-v_{lím}t. \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

Se puede eliminar t de estas dos ecuaciones despejándola de la primera y sustituyéndola en la segunda. (Vea el Problema 2.17). El resultado es la ecuación para la trayectoria:

$$y = \frac{v_{yo}+v_{lím}}{v_{xo}}x + v_{lím}\tau\ln\left(1-\frac{x}{v_{xo}\tau}\right). \tag{2.37}$$

Esta ecuación es probablemente demasiado complicada para ser especialmente aclaratoria, pero la he dibujado como la curva continua en la Figura 2.7, con la ayuda de la cual se pueden entender algunas de las características de (2.37). Por ejemplo, si se observa el segundo término del segundo miembro de (2.37), se ve que a medida que $x \to v_{xo}\tau$ el argumento de la función logarítmica tiende a cero; por consiguiente, el término logarítmico y por tanto y tienden ambos a $-\infty$. Esto es, la trayectoria tiene una asíntota vertical en $x = v_{xo}\tau$, como se puede ver en el dibujo. Se deja como ejercicio (Problema 2.19) comprobar que si se suprime la resistencia del aire ($v_{lím}$ y τ se aproximan ambos a infinito), la trayectoria definida por (2.37) se aproxima de hecho a la trayectoria a trazos correspondiente a una resistencia nula del aire.

Alcance horizontal

Un problema estándar (y bastante interesante) en los cursos de física elemental es demostrar que el alcance horizontal R de un proyectil (sometido a una resistencia del aire nula por supuesto) es

$$R_{\text{vac}} = \frac{2v_{xo}v_{yo}}{g} \qquad \text{[resistencia del aire nula]} \tag{2.38}$$

donde R_{vac} denota el alcance en el vacío. Veamos cómo se ve modificado este resultado por la resistencia del aire.

El alcance R es el valor de x cuando y dada por (2.37) es cero. Por tanto R es la solución de la ecuación

$$\frac{v_{yo} + v_{\text{lím}}}{v_{xo}} R + v_{\text{lím}}\tau \ln\left(1 - \frac{R}{v_{xo}\tau}\right) = 0. \tag{2.39}$$

Esta es una ecuación trascendente y no se puede resolver analíticamente, esto es, en términos de funciones elementales bien conocidas como logaritmos, senos y cosenos. Para una elección dada de los parámetros, se puede resolver numéricamente con un ordenador (Problema 2.22), pero esta aproximación normalmente proporciona poca información sobre cómo la solución depende de los parámetros. Muchas veces una buena alternativa es encontrar alguna aproximación que permita una solución analítica *aproximada*. (Antes de la llegada de los ordenadores, esta era muchas veces la única manera de entender lo que pasaba). En el caso que nos ocupa, muchas veces está claro que los efectos de la resistencia del aire deben ser *pequeños*. Esto significa que tanto $v_{\text{lím}}$ como τ son grandes y el segundo término en el argumento de la función logaritmo es pequeño (porque tiene τ en el denominador). Esto sugiere desarrollar el logaritmo en serie de Taylor (vea el Problema 2.18):

$$\ln(1-\epsilon) = -\left(\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon^2 + \tfrac{1}{3}\epsilon^3 + \cdots\right). \tag{2.40}$$

Se puede usar este desarrollo para el término del logaritmo en (2.39), y, como τ es suficientemente grande, se pueden seguramente despreciar los términos después de ϵ^3. Esto conduce a la ecuación

$$\left[\frac{v_{yo} + v_{\text{lím}}}{v_{xo}}\right] R - v_{\text{lím}}\tau \left[\frac{R}{v_{xo}\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{v_{xo}\tau}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{R}{v_{xo}\tau}\right)^3\right] = 0. \tag{2.41}$$

Esta ecuación se puede arreglar rápidamente. Primero, el segundo término en el primer paréntesis se cancela con el primer término en el segundo. Después, todos los términos contienen un factor de R. Esto implica que una solución es $R = 0$, la cual

es correcta (la altura y es cero cuando $x = 0$). Sin embargo, esta no es la solución que nos interesa, y podemos sacar fuera el factor común R. Un pequeño reajuste (y sustituir $v_{\text{lím}}/\tau$ por g) nos permite reescribir la ecuación como

$$R = \frac{2v_{xo}v_{yo}}{g} - \frac{2}{3v_{xo}\tau}R^2. \tag{2.42}$$

Puede parecer una manera rebuscada de escribir una ecuación cuadrática para R, pero nos conduce rápidamente a la solución aproximada deseada. El punto es que el segundo término del segundo miembro es muy pequeño (en el numerador R es casi seguro menor que R_{vac} y estamos suponiendo que τ en el denominador es muy grande). Por tanto, como primera aproximación obtenemos

$$R \approx \frac{2v_{xo}v_{yo}}{g} = R_{\text{vac}}. \tag{2.43}$$

Esto es justo lo que esperábamos: para resistencia del aire baja, el alcance está cerca de R_{vac}. Pero con la ayuda de (2.42) ahora podemos obtener una segunda aproximación mejor. El último término de (2.42) es la corrección necesaria para R_{vac}; como ya es pequeño, casi seguro estaremos satisfechos con un valor aproximado para esta corrección. Entonces, evaluando el último término de (2.42), podemos sustituir R por el valor aproximado $R \approx R_{\text{vac}}$, obtenemos como segunda aproximación [recuerde que el primer término en (2.42) es justo R_{vac}]

$$\begin{aligned} R &\approx R_{\text{vac}} - \frac{2}{3v_{xo}\tau}(R_{\text{vac}})^2 \\ &= R_{\text{vac}}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{v_{yo}}{v_{\text{lím}}}\right). \end{aligned} \tag{2.44}$$

(Para obtener la segunda línea, he reemplazado el segundo R_{vac} en la línea anterior por $2v_{xo}v_{yo}/g$ y τg por $v_{\text{lím}}$). Advierta que la corrección para la resistencia del aire siempre hace que R sea menor que R_{vac}, tal como se esperaría. Observe también que la corrección depende sólo de la razón $v_{yo}/v_{\text{lím}}$. De manera más general, es fácil ver (Problema 2.32) que la importancia de la resistencia del aire está indicada por la razón $v/v_{\text{lím}}$ entre la velocidad del proyectil y la velocidad límite. Si $v/v_{\text{lím}} \ll 1$ durante el vuelo, el efecto de la resistencia del aire es muy pequeño; si $v/v_{\text{lím}}$ está alrededor de 1 ó más, la resistencia del aire es casi seguro importante [y la aproximación (2.44) no es buena].

Ejemplo 2.4 *Alcance de bolas metálicas pequeñas*

Golpeo ligeramente una diminuta bola de metal de diámetro $d = 0{,}2$ mm y $\mathbf{v} = 1$ m/s con un ángulo de 45°. Hallar su alcance horizontal suponiendo que la bola es de oro (densidad $\varrho \approx 16\,\mathrm{g/cm^3}$). ¿Qué pasaría si fuera de aluminio (densidad $\varrho \approx 2{,}7\,\mathrm{g/cm^3}$)?

En ausencia de resistencia del aire, ambas bolas tendrían el mismo alcance,

$$R_{\mathrm{vac}} = \frac{2v_{xo}v_{yo}}{g} = 10{,}2\,\mathrm{cm}.$$

Para el oro, la ecuación (2.27) proporciona (como se puede comprobar) $v_{\mathrm{lím}} \approx 21$ m/s. Entonces el término de corrección en (2.44) es

$$\frac{4}{3}\frac{v_{yo}}{v_{\mathrm{lím}}} = \frac{4}{3} \times \frac{0{,}71}{21} \approx 0{,}05.$$

Es decir, la resistencia del aire reduce el alcance en un 5% a cerca de 9,7 cm. La densidad del aluminio es aproximadamente una sexta parte de la del oro. Por tanto la velocidad límite es también una sexta parte, y la corrección para el aluminio es 6 veces mayor o cerca de un 30%, lo que da un alcance de unos 7 cm. Para la bola de oro la corrección a causa de la resistencia del aire es bastante pequeña y se podría quizá despreciar; para la bola de aluminio, la corrección es también pequeña, pero ciertamente no despreciable.

2.4 Resistencia cuadrática del aire

En las últimas dos secciones hemos desarrollado una teoría bastante completa de proyectiles sometidos a una fuerza de resistencia lineal, $\mathbf{f} = -b\mathbf{v}$. Mientras *podemos* encontrar ejemplos de proyectiles para los cuales la resistencia es lineal (sobre todo objetos muy pequeños, como la gota de aceite de Millikan), para la mayoría de los ejemplos más obvios de proyectiles (pelotas de béisbol, de fútbol, balas de cañón y cosas parecidas) es una mucho mejor aproximación decir que la resistencia es puramente cuadrática, $\mathbf{f} = -cv^2\hat{\mathbf{v}}$. Debemos, por tanto, desarrollar la teoría correspondiente para la fuerza de resistencia cuadrática. Aparentemente, las dos teorías no son tan diferentes, ya que en ambos casos debemos resolver la ecuación diferencial

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} + \mathbf{f}, \tag{2.45}$$

y en ambos casos ésta es una ecuación diferencial de primer orden para la velocidad $\mathbf{v}$, con $\mathbf{f}$ que depende de una manera relativamente sencilla de $\mathbf{v}$. Sin embargo,

existe una diferencia importante. En el caso lineal ($\mathbf{f} = -b\mathbf{v}$), la ecuación (2.45) es una ecuación diferencial *lineal*, ya que los términos en los que aparece $\mathbf{v}$ son todos lineales para $\mathbf{v}$ o sus derivadas. En el caso cuadrático, la ecuación (2.45) es, por supuesto, no lineal. Y resulta que la teoría matemática de ecuaciones diferenciales no lineales es bastante más complicada que la teoría lineal. Como asunto práctico, veremos que para el caso de un proyectil general que se mueve en las direcciones x e y, la ecuación (2.45) no puede resolverse en términos de funciones elementales si la resistencia es cuadrática. A nivel más general, en el Capítulo 12 veremos que para sistemas más complicados, la no linealidad puede llevar al sorprendente fenómeno del caos, aunque esto no sucede en el caso que nos ocupa.

En esta sección, empezaré con los dos mismos casos especiales discutidos en la Sección 2.2, un cuerpo que es forzado a moverse horizontalmente, como un tren sobre una vía horizontal, y un cuerpo que se mueve verticalmente, como una piedra que cae desde una ventana (ambos ya con fuerza de resistencia cuadrática). Veremos que en estos dos sencillos casos, la ecuación diferencial (2.45) *puede* ser resuelta por métodos elementales, y las soluciones introducen técnicas importantes y resultados interesantes. Después hablaré brevemente sobre el caso general (movimiento tanto en sentido vertical como horizontal) que sólo puede ser resuelto numéricamente.

Movimiento horizontal con resistencia cuadrática

Consideremos un cuerpo que se mueve horizontalmente (en la dirección x positiva) y que está sometido a una resistencia cuadrática y ninguna otra fuerza. Por ejemplo, podríamos imaginar un ciclista de competición, que ha cruzado la línea de meta y se deja llevar sin pedalear hacia donde está su equipo; el ciclista está bajo la influencia de la resistencia del aire. Suponiendo que la bicicleta está bien lubricada y las ruedas bien hinchadas, podemos ignorar el rozamiento ordinario,[3] y, excepto para velocidades muy bajas, la resistencia del aire es puramente cuadrática. La componente x de la ecuación de movimiento es por tanto (pondré v en lugar de v_x para abreviar)

$$m\frac{dv}{dt} = -cv^2. \tag{2.46}$$

Si dividimos por v^2 y multiplicamos por dt, obtenemos una ecuación en la que la variable v sólo aparece en el primer miembro y t sólo aparece en el segundo:[4]

---

[3] Como discutiré brevemente, a medida que el ciclista se va frenando hasta detenerse, la resistencia del aire se reduce, y finalmente el rozamiento pasa a ser la fuerza dominante. Sin embargo, a velocidades cercanas a 15 kilómetros por hora o más, es una buena aproximación ignorar todo menos la resistencia cuadrática del aire.

[4] Para pasar de (2.46) a (2.47), he tratado la derivada dv/dt como si fuera el cociente de dos números separados, dv y dt. Como seguramente todo el mundo sepa, esta manera de proceder no

$$m\frac{dv}{v^2} = -c\,dt. \tag{2.47}$$

Este truco (reajustar una ecuación diferencial de tal manera que sólo una variable aparezca en el primer miembro y la otra en el segundo) se llama **separación de variables**. Cuando es posible, la separación de variables es muchas veces la manera más simple de resolver una ecuación diferencial de primer orden, ya que la solución se puede hallar mediante una simple integración en ambos miembros.

Integrando la ecuación (2.47) llegamos a

$$m\int_{v_0}^{v}\frac{dv'}{v'^2} = -c\int_0^t dt'$$

donde v_0 es la velocidad inicial en $t = 0$. Observe que he escrito ambos miembros como integrales definidas, con los límites apropiados, así que no me tengo que preocupar por las constantes de integración. También he renombrado las variables de integración como v' y t' para evitar confusión con los límites superiores v y t. Las dos integrales se pueden evaluar fácilmente, y obtener

$$m\left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v}\right) = -ct \tag{2.48}$$

o, resolviendo para v,

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + cv_0t/m} = \frac{v_0}{1 + t/\tau} \tag{2.49}$$

donde he introducido la constante τ para la combinación de constantes

$$\tau = \frac{m}{cv_0} \qquad \text{[para la resistencia cuadrática]}. \tag{2.50}$$

Como se puede comprobar fácilmente, τ es un tiempo, con la importancia de que cuando $t = \tau$ la velocidad es $v = v_0/2$. Advierta que este parámetro τ es diferente

---

es estrictamente correcta. Sin embargo, se puede justificar de dos maneras. Primero, en la teoría de *formas diferenciales*, es de hecho cierto que dv y dt están definidos como formas (diferenciales) separadas, tales que su cociente es la derivada dv/dt. Afortunadamente, no es necesario conocer esta teoría. Pero sabemos también que dv/dt es el límite de $\Delta v/\Delta t$, cuando tanto Δv como Δt se hacen pequeños, y adoptaré el punto de vista de que dv es sólo una forma abreviada para Δv (y análogamente dt para Δt), *entendiendo que se ha escogido lo suficientemente pequeño como para que el cociente dv/dt esté dentro de la precisión requerida de la derivada real*. Con esta idea, (2.47), con dv en un lado y dt en el otro, tiene sentido perfectamente.

del τ introducido en (2.22) para el movimiento sometido a resistencia lineal del aire; no obstante, ambos parámetros tienen la misma importancia general como indicadores del tiempo para que la resistencia del aire ralentice el movimiento de manera apreciable.

Para hallar la posición de la bicicleta x, sólo tenemos que integrar v para llegar a (como el lector debe comprobar)

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v(t')\,dt' \\ &= v_0\tau \ln(1 + t/\tau), \end{aligned} \tag{2.51}$$

si tomamos la posición inicial x_0 como cero. La Figura 2.8 muestra nuestros resultados para v y x como funciones de t. Es interesante comparar estas gráficas con las correspondientes gráficas de la Figura 2.4 para un cuerpo que se mueve horizontalmente pero sometido a resistencia lineal. A simple vista, las dos gráficas para la velocidad parecen similares. En particular, ambas tienden a cero cuando $t \to \infty$. Pero en el caso lineal v tiende a cero *exponencialmente*, mientras que en el caso cuadrático hace lo propio pero muy despacio, como $1/t$. Esta diferencia en el comportamiento de v se pone de manifiesto de manera bastante acusada en el comportamiento de x. En el caso lineal, vimos que x tiende a un límite finito cuando $t \to \infty$, pero está claro de (2.51) que en el caso cuadrático x aumenta sin límite cuando $t \to \infty$.

La llamativa diferencia en el comportamiento de x para resistencias cuadráticas y lineales es fácil de entender cualitativamente. En el caso cuadrático, la resistencia es proporcional a v^2. Por eso, cuando v se hace pequeño, la resistencia se hace *muy* pequeña (tan pequeña que no puede frenar por completo la bicicleta para cualquier valor finito de x). Este comportamiento inesperado sirve para poner de manifiesto que una fuerza de resistencia que es proporcional a v^2 a *todas* las velocidades no es realista. Aunque la resistencia lineal y el rozamiento ordinario son muy pequeños,

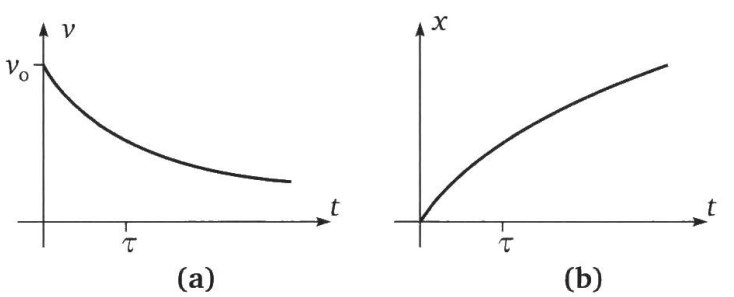


Figura 2.8. Movimiento de un cuerpo, tal como una bicicleta (sin pedalear), que se desliza horizontalmente y está sometido a resistencia del aires cuadrática. **(a)** La velocidad está dada por (2.49) y tiende a cero como $1/t$ cuando $t \to \infty$. **(b)** La posición está dada por (2.51) y tiende a infinito cuando $t \to \infty$.

como $v \to 0$ debe finalmente ser más importante que el término de v^2, no pueden ser ignorados. En particular, uno u otro de estos dos términos (rozamiento en el caso de una bicicleta) asegura que ningún cuerpo real puede deslizar hasta infinito.

Movimiento vertical con resistencia cuadrática

El problema de un objeto que se mueve verticalmente con una fuerza de resistencia cuadrática se puede resolver de forma muy parecida al caso horizontal. Consideremos una pelota de béisbol que se deja caer desde una ventana de una torre alta. Si medimos la coordenada y verticalmente hacia abajo, la ecuación de movimiento es (ahora pondré v en lugar de v_y para abreviar)

$$m\dot{v} = mg - cv^2. \tag{2.52}$$

Antes de resolver esta ecuación, consideremos la velocidad límite de la pelota, la velocidad a la cual los dos términos del segundo miembro de (2.52) justo se equilibran. Claramente ésta debe satisfacer $cv^2 = mg$, cuya solución es

$$v_{\text{lím}} = \sqrt{\frac{mg}{c}}. \tag{2.53}$$

Para cualquier objeto dado (dadas m, g y c), esto nos permite calcular la velocidad límite. Por ejemplo, para una pelota de béisbol resulta (como veremos en un momento) $v_{\text{lím}} \approx 35$ m/s, o cerca de 126 kilómetros por hora.

Podemos arreglar un poco la ecuación de movimiento (2.52) utilizando (2.53) para reemplazar c por $mg/v_{\text{lím}}^2$ y cancelando los factores de m:

$$\dot{v} = g\left(1 - \frac{v^2}{v_{\text{lím}}^2}\right). \tag{2.54}$$

Esta ecuación se puede resolver por separación de variables, igual que en el caso de movimiento horizontal. Primero podemos reescribirla como

$$\frac{dv}{1 - v^2/v_{\text{lím}}^2} = g\,dt. \tag{2.55}$$

Esta ecuación es la forma separada deseada (sólo v en el primer miembro y sólo t en el segundo) y podemos sencillamente integrar ambos miembros.[5] Suponiendo que

[5] Observe que de hecho cualquier problema unidimensional en el que la fuerza neta dependa sólo de la velocidad se puede resolver por separación de variables, porque la ecuación $m\dot{v} = F(v)$ puede escribirse siempre como $m\,dv/F(v) = dt$. Por supuesto no está garantizado que ésta se

la pelota parte del reposo, los límites de integración son 0 y v a la izquierda y 0 y t a la derecha, y obtenemos (como el lector debería verificar; Problema 2.35)

$$\frac{v_{\text{lím}}}{g}\,\text{arctgh}\left(\frac{v}{v_{\text{lím}}}\right) = t \tag{2.56}$$

donde «arctgh» denota la tangente hiperbólica inversa. Esta particular integral se puede evaluar alternativamente en términos de la función logaritmo natural (Problema 2.37). Sin embargo, las funciones hiperbólicas, senh, cosh, tgh, y sus inversas, arcsenh, arccosh, y arctgh, aparecen tan a menudo en todas las ramas de la física que es realmente conveniente aprender a usarlas. Si no se ha tenido mucho contacto con ellas, quizá una buena recomendación es echar un vistazo a los Problemas 2.33 y 2.34, y estudiar las gráficas de estas funciones.

De la Ecuación (2.56) se puede despejar v para obtener

$$v = v_{\text{lím}}\,\text{tgh}\left(\frac{gt}{v_{\text{lím}}}\right). \tag{2.57}$$

Para encontrar la posición y, podemos simplemente integrar v para obtener

$$y = \frac{(v_{\text{lím}})^2}{g}\ln\left[\cosh\left(\frac{gt}{v_{\text{lím}}}\right)\right]. \tag{2.58}$$

Aunque estas dos fórmulas se pueden simplificar un poco todavía (vea el Problema 2.35), son ya suficientes para hacer el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5 *Una pelota de béisbol soltada desde una torre alta*

Hallar la velocidad límite de una pelota de béisbol (masa $m = 0{,}15$ kg y diámetro $D = 7$ cm). Hacer las gráficas de su velocidad y posición para los primeros seis segundos después de dejarse caer desde una torre alta.

La velocidad límite está dada por (2.53), con el coeficiente de la resistencia del aire c dado por (2.4) como $c = \gamma D^2$, donde $\gamma = 0{,}25\ \text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4$. Por tanto

$$v_{\text{lím}} = \sqrt{\frac{mg}{\gamma D^2}} = \sqrt{\frac{(0{,}15\ \text{kg})\times(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{(0{,}25\ \text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4)\times(0{,}07\ \text{m})^2}} = 35\ \text{m/s} \tag{2.59}$$

pueda integrar analíticamente si $F(v)$ es demasiado complicada, pero sí se garantiza una solución numérica directa en el peor de los casos. Vea el Problema 2.7.

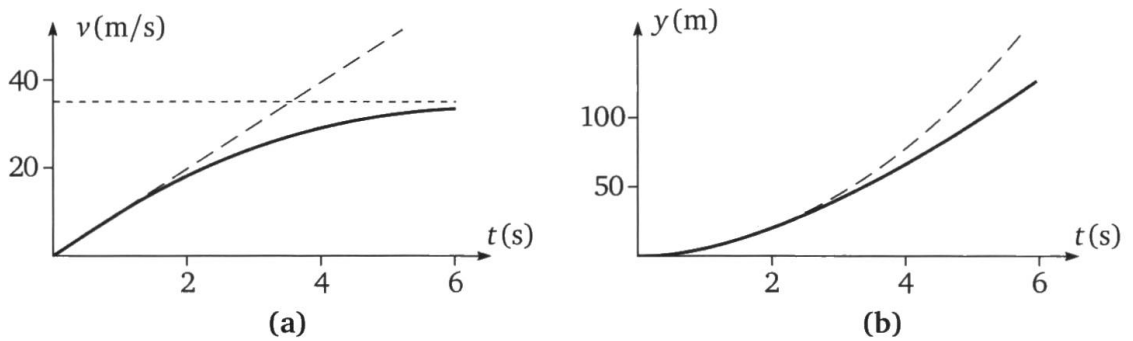


Figura 2.9. Movimiento de una pelota de béisbol que se deja caer desde una torre alta (curvas continuas). El correspondiente movimiento en el vacío se representa con trazos largos. **(a)** La velocidad real tiende a la velocidad límite de la pelota $v_{\text{lím}} = 35$ m/s cuando $t \to \infty$. **(b)** La gráfica de la posición en función del tiempo cae más allá y detrás de la correspondiente gráfica en el vacío. Cuando $t = 6$ s, la pelota de béisbol ha caído unos 130 metros; en el vacío, habría caído unos 180 metros.

o cerca de 126 kilómetros por hora. Es interesante darse cuenta de que los jugadores rápidos de béisbol pueden recibir una pelota considerablemente *más rápida* que $v_{\text{lím}}$. ¡Bajo estas condiciones, la fuerza de resistencia es realmente *mayor* que el peso de la pelota!

Las gráficas de v e y se pueden hacer a mano, pero son, por supuesto, mucho más fáciles de hacer con la ayuda de un programa de ordenador como Mathcad o Mathematica. Sea cual sea el método que escojamos, los resultados se muestran en la Figura 2.9, donde las curvas continuas muestran la velocidad y posición reales mientras que las curvas a trazos largos son los correspondientes valores en el vacío. La velocidad real se estabiliza, aproximándose al valor límite $v_{\text{lím}} = 35$ m/s cuando $t \to \infty$, mientras que la velocidad en el vacío aumentaría sin límite. Inicialmente, la posición aumenta tal como lo haría en el vacío (esto es, $y = \frac{1}{2}gt^2$), pero cae después cuando v aumenta y la resistencia del aire se hace más importante. Finalmente, y se aproxima a una línea recta de la forma $y = v_{\text{lím}}\, t +$ constante. (Vea el Problema 2.35).

Resistencia cuadrática ante movimiento horizontal y vertical

La ecuación del movimiento para un proyectil sometido a resistencia cuadrática,

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= m\mathbf{g} - cv^2\hat{\mathbf{v}} \\ &= m\mathbf{g} - cv\mathbf{v}, \end{aligned} \tag{2.60}$$

se divide en sus componente horizontal y vertical (con y medida verticalmente hacia arriba) para dar

$$\left.\begin{aligned} m\dot{v}_x &= -c\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\, v_x \\ m\dot{v}_y &= -mg - c\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\, v_y. \end{aligned}\right\} \tag{2.61}$$

Son éstas dos ecuaciones diferenciales para las dos funciones desconocidas $v_x(t)$ y $v_y(t)$, pero cada ecuación incluye a *ambas*, a v_x y a v_y. En particular, ninguna ecuación es la misma que para un objeto que se mueve sólo en la dirección x o sólo en la dirección y. Esto significa que no podemos resolver estas dos ecuaciones sencillamente poniendo juntas nuestras dos soluciones separadas para movimiento horizontal y vertical. Peor aún, sucede que las dos ecuaciones (2.61) no se pueden resolver analíticamente en absoluto. La única manera de resolverlas es numéricamente, lo cual sólo se puede hacer para determinadas condiciones iniciales numéricas (esto es, valores especificados de la posición y velocidad iniciales). Esto significa que no podemos encontrar la solución *general*; todo lo que podemos hacer numéricamente es encontrar la solución particular correspondiente a cualesquiera condiciones iniciales escogidas. Antes de discutir algunas propiedades generales de las soluciones de (2.61), obtengamos una de estas soluciones numéricas.

Ejemplo 2.6 *Trayectoria de una pelota de béisbol*

La pelota de béisbol del Ejemplo 2.5 se lanza ahora con una velocidad de 30 m/s (unos 108 km/h) con un ángulo de 50° por encima de la horizontal desde un precipicio elevado. Hallar su trayectoria para los primeros ocho segundos de vuelo y compararla con la correspondiente trayectoria en el vacío. Si la misma pelota se lanzase con la misma velocidad inicial en terreno horizontal, ¿qué distancia recorrería antes de aterrizar? Es decir, ¿cuál sería su alcance horizontal?

Tenemos que resolver las dos ecuaciones diferenciales acopladas (2.61) con las condiciones iniciales

$$v_{xo} = v_o \cos\theta = 19{,}3 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad v_{yo} = v_o \operatorname{sen}\theta = 23{,}0 \text{ m/s}$$

y $x_o = y_o = 0$ (si ponemos el origen en el punto desde el cual se lanza la pelota). Esto se puede hacer con sistemas como Mathematica, Matlab o Maple, o con lenguajes de programación como «C» o Fortran. La Figura 2.10 muestra la trayectoria resultante, obtenida usando la función «NDSolve» en Mathematica.

Existen varios aspectos en la Figura 2.10 que merecen comentario. Es evidente que el efecto de la resistencia del aire es frenar la trayectoria, en comparación con la trayectoria en el vacío (representada por rayas). Por ejemplo podemos observar que en el vacío el punto más alto de la trayectoria se alcanza cuando $t \approx 2{,}3$ la arena está como a 27 m por encima del punto de partida; con resistencia del aire, el punto más alto está justo antes de $t = 2{,}0$ s y está alrededor de 21 m. En el vacío, la

pelota continuaría moviéndose indefinidamente en la dirección x. El efecto de la resistencia del aire es frenar el movimiento horizontal de tal manera que x nunca se mueve hacia la derecha de una asíntota vertical cuando se aproxima a $x = 100$ m.

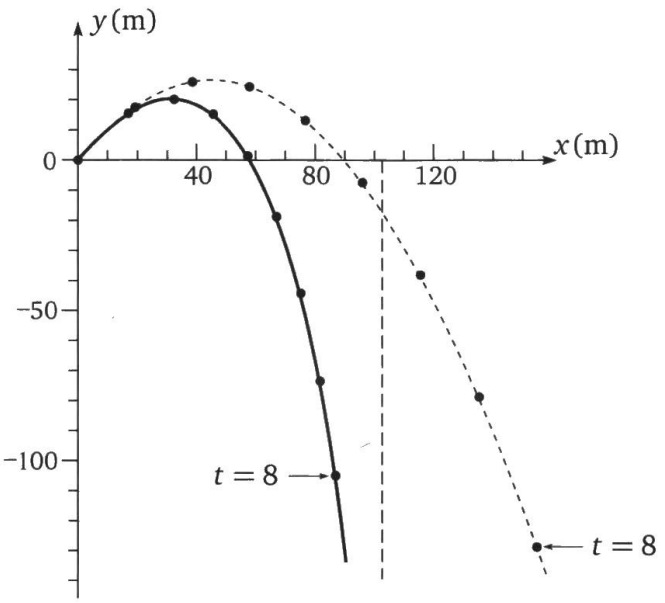


Figura 2.10. Trayectoria de una pelota de béisbol arrojada desde un precipicio y con resistencia del aire cuadrática (curva continua). La velocidad inicial es 30 m/s a 50° sobre la horizontal; la velocidad límite es 35 m/s. La curva discontinua muestra la trayectoria correspondiente en el vacío. Los puntos muestran la posición de la pelota a intervalos de un segundo. La resistencia del aire frena el movimiento horizontal por lo que la pelota se acerca hacia una asíntota vertical a poco más de $x = 100$ metros.

El alcance horizontal de la pelota de béisbol se puede leer fácilmente en la figura como el valor del x cuando y vuelve a cero. Podemos ver que $R \approx 59$ m, en contraposición al alcance en el vacío, $R_{\text{vac}} \approx 90$ m. En este ejemplo, el efecto de la resistencia del aire es bastante grande, como bien podíamos suponer: la pelota fue arrojada con una velocidad sólo ligeramente menor que la velocidad límite (30 en comparación con 35 m/s), y esto significa que la fuerza de la resistencia del aire es solo ligeramente menor que la de la gravedad. Siendo este el caso, podemos suponer que la resistencia del aire cambiará la trayectoria de manera significativa.

Este ejemplo ilustra varios de los aspectos generales del movimiento de proyectiles con fuerza de resistencia cuadrática. Aunque no podemos resolver analíticamente las ecuaciones de movimiento (2.61) de este problema, *podemos* usar las ecuaciones para demostrar varias características generales de la trayectoria. Por ejemplo, comprobamos que la pelota de béisbol alcanzó una altura máxima más baja y en menos tiempo que si hubiera estado en el vacío. Es fácil demostrar que siempre será este

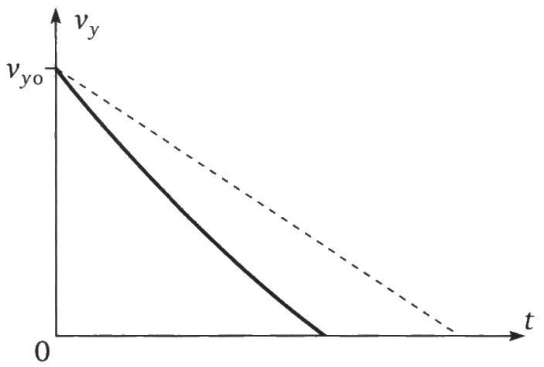


Figura 2.11. Gráfica de v_y frente a t para un proyectil lanzado hacia arriba ($v_{yo} > 0$) y sometido a resistencia cuadrática (curva continua). La línea rayada (pendiente $= -g$) es la gráfica correspondiente a la ausencia de resistencia del aire. El proyectil se mueve hacia arriba hasta que alcanza su altura máxima $v_y = 0$. Durante este tiempo, la fuerza de resistencia es hacia abajo y la aceleración hacia abajo siempre es mayor que g. Por lo tanto, la curva se inclina más que la línea rayada, y el proyectil alcanza su punto más alto en menos tiempo que si estuviera en el vacío. Ya que bajo la curva hay menos superficie que bajo la línea rayada, la altura máxima del proyectil es menor de lo que lo sería en el vacío.

el caso: siempre que el proyectil se mueva hacia arriba ($v_y > 0$), la fuerza de la resistencia del aire tendrá una componente *hacia abajo* y. Entonces la aceleración hacia abajo es mayor que g (su valor en el vacío). Por lo tanto una gráfica de v_y frente a t se va hacia abajo de v_{yo} más rápidamente de lo que lo haría en el vacío, tal como muestra la Figura 2.11. Esto garantiza que v_y alcanza el cero antes de lo que lo haría en el vacío, y que la pelota viaja menos distancia (en la dirección y) antes de alcanzar el punto más alto. Esto es, la pelota alcanza antes el punto más alto, y éste está más bajo de lo que estaría en el vacío.

Afirmé que la pelota de béisbol del Ejemplo 2.6 se aproxima a una asíntota vertical cuando $t \to \infty$, y podemos ahora demostrar que este siempre es el caso. Primero, es fácil convencerse de que una vez que la pelota comienza a moverse hacia abajo, continúa acelerándose hacia abajo, y v_y se aproxima a $-v_{\text{lím}}$ cuando $t \to \infty$. Al mismo tiempo v_x continúa decreciendo y se aproxima a cero. Entonces la raíz cuadrada en ambas ecuaciones (2.61) tiende a $v_{\text{lím}}$. En particular, cuando t es grande, la ecuación para v_x se puede aproximar, por ejemplo, por

$$\dot{v}_x \approx -\frac{cv_{\text{lím}}}{m} v_x = -kv_x$$

La solución de esta ecuación es, por supuesto, una función exponencial, $v_x = Ae^{-kt}$, y vemos que v_x tiende a cero muy rápidamente (exponencialmente) cuando $t \to \infty$. Esto garantiza que x, que es la integral de v_x,

$$x(t) = \int_0^t v_x(t')\,dt',$$

tienda a un límite finito cuando $t \to \infty$, y la trayectoria tiene una asíntota vertical finita como se había enunciado.

2.5 Movimiento de una carga en un campo magnético uniforme

Otra aplicación interesante de las leyes de Newton, y que (como el movimiento de proyectiles) me permite introducir algunos métodos matemáticos importantes, es el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético. Consideraré una partícula de carga q (que tomaré normalmente positiva) y que se mueve en un campo magnético uniforme **B** que apunta en la dirección z como muestra la Figura 2.12. La fuerza neta sobre la partícula es justo la fuerza magnética

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{2.62}$$

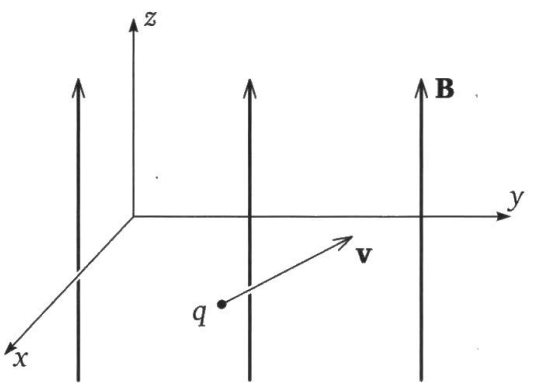


Figura 2.12. Partícula cargada que se mueve en un campo magnético uniforme que apunta en la dirección z.

así que la ecuación de movimiento se puede escribir como

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times B. \tag{2.63}$$

[Como sucede con los proyectiles, la fuerza depende sólo de la velocidad (no de la posición), así que la segunda ley se reduce a una ecuación diferencial de primer orden para **v**].

Tal como sucede en muchas ocasiones, la manera más fácil de resolver la ecuación de movimiento es hacerlo por componentes. Las componentes de **v** y **B** son

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

y

$$\mathbf{B} = (0, 0, B),$$

de la cual podemos leer las componentes de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (v_y B, -v_x B, 0).$$

Entonces las tres componentes de (2.63) son

$$m\dot{v}_x = qBv_y \tag{2.64}$$
$$m\dot{v}_y = -qBv_x \tag{2.65}$$
$$m\dot{v}_z = 0. \tag{2.66}$$

La última de ellas dice simplemente que v_z, la componente de la velocidad de la partícula en la dirección de **B**, es constante:

$$v_z = \text{constante},$$

un resultado que podíamos haber anticipado, ya que la fuerza magnética es siempre perpendicular a **B**. Como v_z es constante, prestaremos más atención a v_x y v_y. De hecho, podemos incluso pensar en ellas como componentes de un vector de dos dimensiones (v_x, v_y), el cual es justo la proyección de **v** sobre el plano xy, y se puede llamar *velocidad transversal*,

$$(v_x, v_y) = \text{velocidad transversal}.$$

Para simplificar las ecuaciones (2.64) y (2.65) para v_x y v_y, voy a definir el parámetro

$$\omega = \frac{qB}{m}, \tag{2.67}$$

que tiene dimensiones de inverso de tiempo y se llama **frecuencia ciclotrón**. Con esta notación, las ecuaciones (2.64) y (2.65) se convierten en

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}_x &= \omega v_y \\ \dot{v}_y &= -\omega v_x. \end{aligned}\right\} \tag{2.68}$$

Estas dos ecuaciones diferenciales acopladas se pueden resolver de muchas maneras diferentes. Me gustaría describir una que hace uso de números complejos. Aunque quizá no sea la manera más fácil, sorprendentemente este método es de amplia aplicación en muchas áreas de la física (para ver una solución alternativa que evita los números complejos, vea el Problema 2.54).

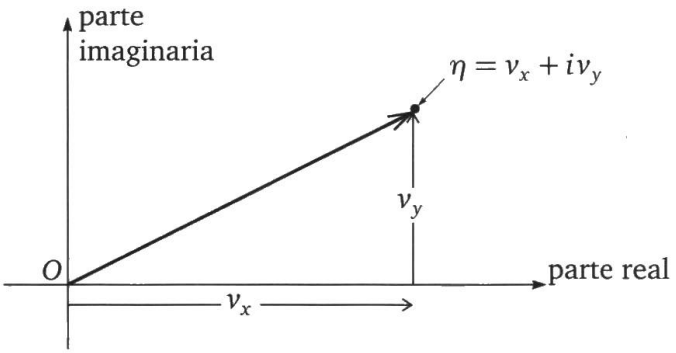


Figura 2.13. El número complejo $\eta = v_x + iv_y$ se representa por un punto en el plano complejo. La flecha que apunta desde O a η es literalmente una imagen del vector velocidad transversal (v_x, v_y).

Las dos variables v_x y v_y son, por supuesto, números reales. Sin embargo, no hay nada que nos impida definir un número complejo

$$\eta = v_x + iv_y, \tag{2.69}$$

donde i indica la raíz cuadrada de -1 (llamada j por casi todos los ingenieros), $i = \sqrt{-1}$ (y η es la letra griega eta). Si dibujamos el número complejo η en el plano complejo, o diagrama de Argand, entonces sus dos componentes son v_x y v_y como se muestra en la Figura 2.13; en otras palabras, la representación de η en el plano complejo es una imagen de la velocidad transversal en dos dimensiones (v_x, v_y).

Las ventajas de introducir el número complejo η se ponen de manifiesto cuando evaluamos su derivada. Usando (2.68), llegamos a que

$$\dot{\eta} = \dot{v}_x + i\dot{v}_y = \omega v_y - i\omega v_x = -i\omega(v_x + iv_y)$$

o

$$\dot{\eta} = -i\omega\eta. \tag{2.70}$$

Vemos que las dos ecuaciones acopladas para v_x y v_y se han convertido en una única ecuación para el número complejo η. Todavía más, ahora es una ecuación de forma familiar $\dot{u} = ku$, cuya solución sabemos que es de tipo exponencial $u = Ae^{kt}$. Entonces podemos escribir inmediatamente la solución para η:

$$\eta = Ae^{-i\omega t}. \tag{2.71}$$

Antes de discutir el significado de esta solución, me gustaría repasar algunas propiedades de las exponenciales complejas en la siguiente sección. Si se está muy familiarizado con estas ideas, se puede saltar directamente esta parte.

2.6 Exponenciales complejas

Mientras que seguramente la función exponencial e^x para una variable real x sea familiar para todo el mundo, puede que no lo sea tanto e^z cuando z es compleja.[6] Para el caso real existen varias definiciones posibles de e^x (por ejemplo, como la función que es igual a su propia derivada). La definición que se aplica más fácilmente al caso complejo es la de la serie de Taylor (vea el Problema 2.18)

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots . \tag{2.72}$$

Para cualquier valor de z, real o complejo, grande o pequeño, esta serie converge para dar un valor bien definido para e^z. Diferenciándola, se puede ver fácilmente que tiene la propiedad esperada de que es igual a su propia derivada. Y se puede demostrar (esto ya no tan fácilmente) que tiene todas las demás propiedades típicas de las funciones exponenciales; por ejemplo, que $e^z e^w = e^{(z+w)}$. (Vea los Problemas 2.50 y 2.51). En particular, la función Ae^{kz} (con A y k constantes cualesquiera, reales o complejas) tiene la propiedad de que

$$\frac{d}{dz}\left(Ae^{kz}\right) = k\left(Ae^{kz}\right). \tag{2.73}$$

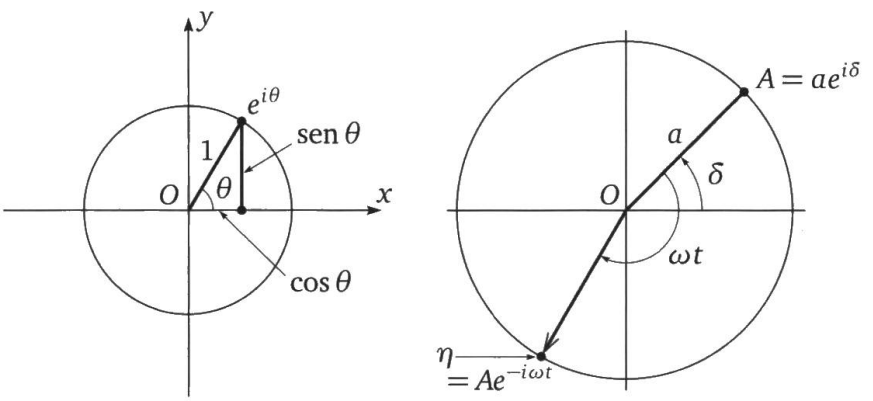
Como satisface esta misma ecuación sea cual sea el valor de A, es, de hecho, la solución general de la ecuación de primer orden $df/dz = kf$. Al final de la última sección, introduje el número complejo $\eta(t)$ y mostré que cumplía la ecuación $\dot{\eta} = -i\omega\eta$. Podemos justificarnos ahora diciendo que esto garantiza que η debe ser la función exponencial anticipada en (2.71).

Estaremos particularmente interesados en la exponencial de un número imaginario puro, esto es, $e^{i\theta}$ donde θ es un número real. La serie de Taylor (2.72) para esta función es

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots . \tag{2.74}$$

Teniendo en cuenta que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, y así sucesivamente, se puede ver que todas las potencias pares en esta serie son reales, mientras que todas las potencias impares son puramente imaginarias. Reagrupando convenientemente, podemos reescribir (2.74) para obtener

[6] Para ver un repaso de algunas propiedades elementales de los números complejos, vea los Problemas 2.45 a 2.49.



(a) (b)

Figura 2.14. **(a)** La fórmula de Euler, (2.76), implica que el número complejo $e^{i\theta}$ está sobre el círculo unitario (el círculo con radio 1, centrado en el origen O) con ángulo polar θ. **(b)** La constante compleja $A = ae^{i\delta}$ está sobre un círculo de radio a con ángulo polar δ. La función $\eta(t) = Ae^{-i\omega t}$ está sobre el mismo círculo pero con ángulo polar $(\delta - \omega t)$ y se mueve en el sentido de las agujas del reloj alrededor del círculo a medida que t avanza.

$$e^{i\theta} = \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right] + i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right]. \tag{2.75}$$

La serie en el primer paréntesis es la serie de Taylor para $\cos\theta$, y en el segundo paréntesis es $\operatorname{sen}\theta$ (Problema 2.18). Con lo que hemos probado la importante relación:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta. \tag{2.76}$$

Este resultado, conocido como **fórmula de Euler**, se ilustra en la Figura 2.14(a). Observe especialmente que el número complejo $e^{i\theta}$ tiene ángulo polar θ y, como $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, la magnitud de $e^{i\theta}$ es 1; esto es, $e^{i\theta}$ está sobre el *círculo unitario*, el círculo con radio 1 centrado en O.

Nuestro interés principal es en un número complejo de la forma $\eta = Ae^{-i\omega t}$. El coeficiente A es un número complejo fijo, que se puede expresar como $A = ae^{i\delta}$, donde $a = |A|$ es la magnitud, y δ es el ángulo polar de A, como se muestra en la Figura 2.14(b). (Vea el Problema 2.45). El número η se puede por tanto escribir como

$$\eta = Ae^{-i\omega t} = ae^{i\delta}e^{-i\omega t} = ae^{i(\delta - \omega t)}. \tag{2.77}$$

Entonces η tiene la misma magnitud que A (a saber, a), pero tiene ángulo polar igual a $(\delta - \omega t)$, como se muestra en la Figura 2.14(b). Como función de t, el número η se mueve en el sentido de las agujas del reloj alrededor del círculo de radio a con velocidad angular ω.

Es importante entender bien el papel de la constante compleja $A = ae^{i\delta}$ en (2.77): si sucede que A es igual a 1, entonces η sería justo $\eta = e^{-i\omega t}$, que se apoya sobre el círculo unitario y se mueve en sentido de las agujas del reloj con velocidad angular ω, comenzando el eje real ($\eta = 1$) cuando $t = 0$. Si $A = a$ es real pero no igual a 1, entonces simplemente agranda el círculo unitario a un círculo de radio a, alrededor del cual η se mueve con la misma velocidad angular comenzando desde el eje real, en $\eta = a$ cuando $t = 0$. Finalmente, si $A = ae^{i\delta}$, entonces el efecto del ángulo δ es rotar η a través del ángulo fijo δ, de tal manera que η comience en $t = 0$ con ángulo polar δ.

Armados con estos resultados matemáticos, podemos ahora volver a la partícula cargada en un campo magnético.

2.7 Solución para la carga en un campo B

Matemáticamente, la solución para la velocidad **v** de nuestra partícula cargada en un campo B es completa, y todo lo que queda es interpretarla físicamente. Ya sabemos que v_z, la componente a lo largo de **B**, es constante. Las componentes (v_x, v_y) transversales a **B** las hemos representado por el número complejo $\eta = v_x + iv_y$, y hemos visto que la segunda ley de Newton implica que η tiene la dependencia temporal $\eta = Ae^{-i\omega t}$, y se mueve uniformemente alrededor del círculo de la Figura 2.14(b). Ahora, la flecha mostrada en esa figura, que apunta desde O hasta η, es de hecho una representación gráfica de la velocidad transversal (v_x, v_y). Por lo tanto esta velocidad transversal cambia de dirección, girando en sentido de las agujas del reloj, con velocidad angular constante[7] $\omega = qB/m$ y con magnitud constante. Como v_z es constante, esto sugiere que la partícula realiza un movimiento en espiral o en hélice. Para verificar esto, sólo tenemos que integrar **v** para hallar **r** en función de t.

Que v_z sea constante implica que

$$z(t) = z_0 + v_{z0}t. \tag{2.78}$$

El movimiento de x e y se halla más fácilmente introduciendo otro número complejo

$$\xi = x + iy$$

donde ξ es la letra griega xi. En el plano complejo, ξ es una imagen de la posición transversal (x, y). Claramente, la derivada de ξ es η, esto es, $\dot{\xi} = \eta$. Por tanto,

[7] Estoy suponiendo que la carga q es positiva; si q es negativa, entonces $\omega = qB/m$ es negativa, lo que significa que la velocidad transversal gira en sentido contrario a las agujas del reloj.

$$\xi = \int \eta\, dt = \int Ae^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{iA}{\omega} e^{-i\omega t} + \text{constante}. \tag{2.79}$$

Si renombramos el coeficiente iA/ω como C y la constante de integración como $X + iY$, esto implica que

$$x + iy = Ce^{-i\omega t} + (X + iY).$$

Redefiniendo nuestro origen de tal manera que el eje z pase por el punto (X, Y), podemos eliminar el término constante del segundo miembro para obtener

$$x + iy = Ce^{-i\omega t}, \tag{2.80}$$

y, haciendo $t = 0$, podemos identificar la constante C que falta como

$$C = x_0 + iy_0.$$

Este resultado se ilustra en la Figura 2.15. Vemos en ella que la posición transversal (x, y) se mueve en el sentido de las agujas del reloj alrededor de un círculo con velocidad angular $\omega = qB/m$. Mientras que z dada por (2.78) aumenta continuamente, de tal modo que la partícula describe realmente una hélice uniforme cuyo eje es paralelo al campo magnético.

Existen muchos ejemplos de movimiento helicoidal de una partícula cargada en el seno de un campo magnético; por ejemplo, las partículas de los rayos cósmicos (partículas cargadas procedentes del espacio que chocan contra la Tierra) pueden quedar

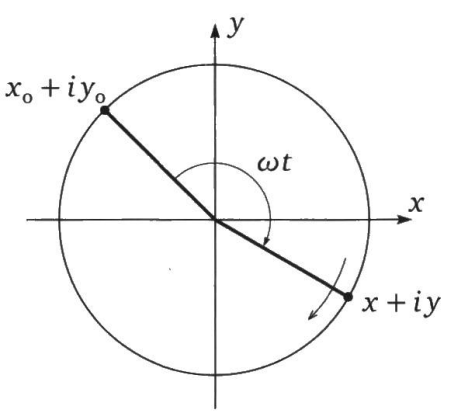


Figura 2.15. Movimiento de una carga en un campo magnético uniforme en la dirección z. La posición transversal (x, y) se mueve alrededor de un círculo, como se muestra, mientras que la coordenada z se mueve con velocidad constante entrando o saliendo de la página.

atrapadas por el campo magnético de la tierra y moverse en espiral hacia el norte o el sur a lo largo de las líneas del campo. Si la componente z de la velocidad resulta ser cero, entonces la espiral se reduce a un círculo. En el ciclotrón, un dispositivo para acelerar partículas cargadas a energías altas, las partículas son atrapadas en órbitas circulares de esta manera. Son aceleradas lentamente mediante la aplicación periódica convenientemente ajustada de un campo eléctrico. La frecuencia angular de la órbita es, por supuesto, $\omega = qB/m$ (que por eso recibe el nombre de frecuencia ciclotrón). El radio de la órbita es

$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}. \tag{2.81}$$

Este radio aumenta a medida que las partículas se aceleran, de tal manera que finalmente emergen por el borde exterior de los imanes circulares que producen el campo magnético.

El mismo método que hemos usado aquí para una carga en un campo magnético se puede usar también para una partícula en campos magnéticos *y eléctricos*, pero como esta complicación no añade nada interesante al método de resolución, la dejaré como ejercicio para el lector en los Problemas 2.53 y 2.55.

Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 2

Resistencias lineal y cuadrática

En el caso de que la velocidad v sea bastante menor que la del sonido, la magnitud de la fuerza de resistencia $\mathbf{f} = -f(v)\hat{\mathbf{v}}$ sobre un objeto que se mueve a través de un fluido se aproxima normalmente bien con

$$f(v) = f_{\text{lin}} + f_{\text{cuad}}$$

donde

$$f_{\text{lin}} = bv = \beta D v \quad \text{y} \quad f_{\text{cuad}} = cv^2 = \gamma D^2 v^2. \qquad \text{[Ecs. (2.2) a (2.6)]}$$

Aquí D denota el tamaño lineal del objeto. Para una esfera, D es el diámetro y, para una esfera que se mueve a través de aire en condiciones STP, $\beta = 1{,}6 \times 10^{-4}\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2$ y $\gamma = 0{,}25\ \text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4$.

Fuerza de Lorentz sobre una partícula

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \qquad \text{[Ec. (2.62) y Problema 2.53]}$$

Problemas para el Capítulo 2

Los asteriscos indican el nivel aproximado de dificultad, desde los más fáciles (⋆) hasta los más difíciles (⋆ ⋆ ⋆).

Sección 2.1 Resistencia del aire

2.1 ⋆ Cuando una pelota de béisbol vuela por el aire, la razón $f_{\text{cuad}}/f_{\text{lin}}$ entre las fuerzas de resistencia cuadrática y lineal está dada por (2.7). Dada una pelota de béisbol de diámetro 7 cm, hallar la velocidad aproximada v a la cual las dos fuerzas de resistencia son igual de importantes. ¿Para qué rango aproximado de velocidades es seguro tratar la fuerza de resistencia como puramente cuadrática? ¿Es una buena aproximación ignorar el término lineal en condiciones normales? Contestar a las mismas preguntas para el caso de una pelota de playa de diámetro 70 cm.

2.2 ⋆ El origen de la fuerza de resistencia lineal sobre una esfera que se mueve en un fluido es la viscosidad del fluido. De acuerdo con la ley de Stokes, la resistencia viscosa sobre una esfera es

$$f_{\text{lin}} = 3\pi\eta D v \tag{2.82}$$

donde η es la viscosidad[8] del fluido, D el diámetro de la esfera, y v su velocidad. Mostrar que esta expresión reproduce la forma (2.3) para f_{lin}, con b dada por (2.4) como $b = \beta D$. Si la viscosidad del aire en condiciones STP es $\eta = 1{,}7 \times 10^{-5}\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2$, verificar el valor de β dada por (2.5).

2.3 ⋆ **(a)** Las fuerzas de resistencia cuadrática y lineal sobre una esfera que se mueve en un fluido están dadas por (2.84) y (2.82) (Problemas 2.4 y 2.2). Mostrar que la razón entre estas dos clases de fuerza de resistencia se puede escribir de esta manera: $f_{\text{cuad}}/f_{\text{lin}} = R/48$,[9] donde el **número de Reynolds** adimensional R es

$$R = \frac{Dv\varrho}{\eta} \tag{2.83}$$

donde D es el diámetro de la esfera, v su velocidad, y ϱ y η son la velocidad y la viscosidad del fluido. Resulta evidente que el número de Reynolds es una medida de la importancia relativa de los dos tipos de resistencia.[10] Cuando R es muy grande, la resistencia cuadrática es dominante y puede ignorarse la lineal; y sucede lo contrario cuando R es muy pequeño. **(b)** Encontrar el número de Reynolds para una pelota de acero de (2 mm de diámetro) que se mueve a 5 cm/s a través de glicerina (densidad 1,3 g/cm^3 y viscosidad 12 $\text{N}\cdot\text{s/m}^2$ en condiciones STP).

2.4 ⋆ ⋆ El origen de una fuerza de resistencia cuadrática sobre cualquier proyectil que se mueve por un fluido es la inercia del fluido que el proyectil barre. **(a)** Suponiendo que el proyectil tiene una sección de paso A (normal a su velocidad) y velocidad v, y que la densidad del fluido es ϱ, demostrar que el ritmo al que el proyectil desaloja el fluido (masa/tiempo) es $\varrho A v$. **(b)** Asumiendo la simplificación de que todo el fluido es acelerado a la velocidad v del proyectil, demostrar que la fuerza de resistencia neta sobre el proyectil es $\varrho A v^2$. Desde luego no es cierto que todo el fluido que barre el proyectil resulta acelerado hasta la velocidad máxima, v, pero uno podría suponer

---

[8] La viscosidad η de un fluido se define como sigue: Imagine un canal ancho a través del cual fluye el fluido (dirección x) tal que la velocidad v es cero en el fondo ($y = 0$) y aumenta hacia la parte de arriba ($y = h$), de tal manera que capas sucesivas de fluido se deslizan unas con otras con un gradiente de velocidad dv/dy. La fuerza F con la que una superficie A de cualquier capa arrastra el fluido por encima de ella es proporcional a A y a dv/dy, y η se define como la constante de proporcionalidad; esto es, $F = \eta A\, dv/dy$.

[9] El factor numérico 48 es para una esfera. Un factor similar resulta para otros cuerpos, pero el factor numérico es diferente para formas diferentes.

[10] El número de Reynolds normalmente se define mediante (2.83) para el flujo de cualquier objeto, con D definido como la típica dimensión lineal. Uno a veces escucha la afirmación de que R es la razón $f_{\text{cuad}}/f_{\text{lin}}$. Ya que $f_{\text{cuad}}/f_{\text{lin}} = R/48$ para una esfera, esta afirmación estaría mejor expresada como que «R es aproximadamente del orden de $f_{\text{cuad}}/f_{\text{lin}}$».

que la fuerza real tendría la siguiente forma

$$f_{\text{cuad}} = \kappa \varrho A v^2 \tag{2.84}$$

donde κ es un número menor que 1, que dependería de la forma del proyectil, con κ pequeño para un cuerpo aerodinámico, y mayor para un cuerpo con un frontal plano. Esto se demuestra cierto y para una esfera el factor κ resulta ser $\kappa = 1/4$. **(c)** Demostrar que (2.84) reproduce la forma (2.3) para f_{cuad}, cuando c dado por (2.4) como $c = \gamma D^2$. Dado que la densidad del aire en condiciones STP es $\varrho = 1{,}29\ \text{kg/m}^3$ y que $\kappa = 1/4$ para una esfera, verificar el valor de γ dado en (2.6).

Sección 2.2 Resistencia lineal del aire

2.5 ⋆ Supongamos que un proyectil sometido a una fuerza lineal resistiva es arrojado verticalmente hacia abajo con una velocidad v_{yo} que es *mayor* que la velocidad límite $v_{\text{lím}}$. Describir y explicar cómo varía la velocidad con el tiempo, y hacer una gráfica de v_y frente a t para el caso en que $v_{yo} = 2v_{\text{lím}}$.

2.6 ⋆ **(a)** La ecuación (2.33) da la velocidad de un objeto que se deja caer desde el reposo. Inicialmente, cuando v_y es pequeño, la resistencia del aire no debería ser importante y (2.33) debería estar en consonancia con el resultado elemental $v_y = gt$ para la caída libre en el vacío. Demostrar que este es el caso. [*Ayuda:* Recordar la serie de Taylor para $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots$, para la cual los primeros dos o tres términos son desde luego una buena aproximación cuando x es pequeño]. **(b)** La posición del objeto arrojado viene dada por (2.35) con $v_{yo} = 0$. Análogamente, demostrar que ésta se reduce a la conocida $y = \frac{1}{2}gt^2$ cuando t es pequeño.

2.7 ⋆ Existen ciertos problemas sencillos unidimensionales donde la ecuación del movimiento (segunda ley de Newton) siempre puede ser resuelta, o al menos reducida al problema de resolver una integral. Uno de estos (que ya hemos visto un par de veces en este capítulo) es el movimiento de una partícula unidimensional sometida a una fuerza que depende sólo de la velocidad v, esto es, $F = F(v)$. Escribir la segunda ley de Newton y separar las variables escribiéndolas como $m\,dv/F(v) = dt$. Después integrar ambos miembros de esta ecuación y demostrar que

$$t = m \int_{v_o}^{v} \frac{dv'}{F(v')}.$$

Suponiendo que se pueda resolver la integral, ésta proporciona t como función de v. Se puede entonces resolver para obtener v como función de t. Usar este método para resolver el caso especial en que $F(v) = F_o$, una constante, y comentar el resultado obtenido. Este método de *separación de variables* se usa otra vez en los Problemas 2.8 y 2.9.

2.8 ⋆ Una masa m tiene velocidad v_o en el instante $t = 0$ y se desliza por el eje x en un medio en el que la fuerza de resistencia es $F(v) = -cv^{3/2}$. Usar el método del Problema 2.7 para hallar v en términos del tiempo t y los otros parámetros dados. ¿En qué instante (si es que hay alguno) se parará?

2.9 ⋆ Hemos resuelto la ecuación diferencial (2.29), $m\dot{v}_y = -b(v_y - v_{\text{lím}})$, para la velocidad de cualquier objeto que caiga a través de aire, por inspección (una respetable manera de resolver ecuaciones diferenciales). No obstante, uno preferiría a veces un método más sistemático, y he aquí uno. Reescribir la ecuación en la forma «separada»

$$\frac{m\,dv_y}{v_y - v_{\text{lím}}} = -b\,dt$$

e integrar ambos miembros desde tiempo 0 hasta t para encontrar v_y en función de t. Comparar con (2.30).

2.10 ⋆⋆ Para un rodamiento de bola de acero (diámetro 2 mm y densidad 7,8 g/cm^3) que se deja caer en glicerina (densidad 1,3 g/cm^3 y viscosidad 12 N·s/m^2 en condiciones STP), la fuerza de resistencia dominante es la resistencia lineal dada por (2.82) del Problema 2.2. **(a)** Encontrar el tiempo característico τ y la velocidad límite $v_{\text{lím}}$. [Para encontrar la segunda, se debe incluir la fuerza de flotación o empuje de Arquímedes. Esta sólo añade una tercera fuerza al segundo miembro de la ecuación (2.25)]. ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se deja caer desde el reposo hasta que el rodamiento ha alcanzado el 95 % de su velocidad límite? **(b)** Usar (2.82) y (2.84) (con $\kappa = 1/4$ porque el rodamiento de bola es una esfera) para calcular la razón $f_{\text{cuad}}/f_{\text{lin}}$ a la velocidad límite. ¿Era una buena aproximación despreciar f_{cuad}?

2.11 ⋆⋆ Considerar un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad inicial v_0 en un medio lineal. **(a)** Midiendo y *hacia arriba* desde el punto de partida, escribir expresiones para la velocidad $v_y(t)$ y la posición $y(t)$ del objeto. **(b)** Encontrar el tiempo que tarda el objeto en alcanzar su punto más alto y su posición $y_{\text{máx}}$ en ese punto. **(c)** Mostrar que cuando el coeficiente de resistencia tiende a cero, la última respuesta se reduce al resultado bien conocido $y_{\text{máx}} = \frac{1}{2}v_0^2/g$ para un objeto en el vacío. [*Ayuda:* Si la fuerza de resistencia es muy pequeña, la velocidad límite es muy grande, de tal manera que $v_0/v_{\text{lím}}$ es muy pequeña. Usar la serie de Taylor para la función logaritmo natural para aproximar $\ln(1+\delta)$ por $\delta - \frac{1}{2}\delta^2$]. (Para ver un poco más sobre series de Taylor vea el Problema 2.18).

2.12 ⋆⋆ El Problema 2.7 trata sobre un tipo de problemas unidimensionales que se pueden reducir siempre a hacer una integral. He aquí otro más. Mostrar que si la fuerza neta sobre una partícula unidimensional depende sólo de la posición, $F = F(x)$, entonces la segunda ley de Newton se puede resolver para hallar v en función de x dada por

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx'. \tag{2.85}$$

[*Ayuda:* Usar la regla de la cadena para demostrar la siguiente útil relación, a la que podemos llamar la «regla de $v\,dv/dx$»: si se trata v como una función de x, entonces

$$\dot{v} = v\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dx}. \tag{2.86}$$

Usar esto para reescribir la segunda ley de Newton en la forma separada $m\,d(v^2) = 2F(x)\,dx$ y entonces integrar desde x_0 hasta x]. Comentar el resultado obtenido para el caso de que $F(x)$ sea realmente una constante. (Se puede reconocer la solución como un enunciado sobre energía cinética y trabajo, sobre los cuales hablaremos en el Capítulo 4).

2.13 ⋆⋆ Consideremos una masa m obligada a moverse por el eje x y sometida a una fuerza neta $F = -kx$ donde k es una constante positiva. La masa se deja libre desde el reposo en $x = x_0$ en el instante $t = 0$. Usar el resultado (2.85) del Problema 2.12 para encontrar la velocidad de la masa como función de x; esto es, $dx/dt = g(x)$ para alguna función $g(x)$. Separar esto como $dx/g(x) = dt$ e integrar desde tiempo 0 hasta t para encontrar x en función de t. (Quizá se reconozca esta como una forma, aunque no la más sencilla, de resolver el oscilador harmónico simple).

2.14 ⋆⋆⋆ Usar el método del Problema 2.7 para resolver lo siguiente: Una masa m obligada a moverse a lo largo del eje x y sometida a una fuerza $F(v) = -F_0 e^{v/V}$, donde F_0 y V son constantes. **(a)** Hallar $v(t)$ si la velocidad inicial es $v_0 > 0$ en el instante $t = 0$. **(b)** ¿En qué momento se detiene instantáneamente? **(c)** Integrando $v(t)$, se puede hallar $x(t)$. Usando este método hallar la distancia que recorre la masa antes de detenerse instantáneamente.

Sección 2.3 Trayectoria y alcance en un medio lineal

2.15 ⋆ Consideremos un proyectil lanzado con una velocidad (v_{xo}, v_{yo}) desde el suelo horizontal (con x medido horizontalmente e y medido verticalmente hacia arriba). Suponiendo que no hay

resistencia del aire, hallar durante cuánto tiempo se encuentra el proyectil en el aire y demostrar que la distancia que recorre antes de aterrizar (el alcance horizontal) es $2v_{xo}v_{yo}/g$.

2.16 ⋆ Un jugador de golf golpea la pelota con una velocidad v_0 con un ángulo θ sobre el suelo horizontal. Suponiendo que el ángulo θ es fijo y que puede ignorarse la resistencia del aire, ¿cuál es la velocidad mínima $v_0(\text{min})$ para que la pelota pase por encima de una pared de altura h, a una distancia d? La solución puede suponer un problema si el ángulo θ es tal que $\text{tg}\,\theta < h/d$. Explicarlo. ¿Qué es $v_0(\text{min})$ si $\theta = 25°$, $d = 50$ m, y $h = 2$ m?

2.17 ⋆ Las dos ecuaciones (2.36) dan la posición del proyectil (x, y) en función de t. Eliminar t para dar y como una función de x. Verificar la Ecuación (2.37).

2.18 ⋆ El teorema de Taylor afirma que, para cualquier función razonable $f(x)$, el valor de f en un punto $(x + \delta)$ puede expresarse como una serie infinita que incluye f y sus derivadas en el punto x:

$$f(x+\delta) = f(x) + f'(x)\delta + \frac{1}{2!}f''(x)\delta^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)\delta^3 + \cdots \tag{2.87}$$

donde las primas denotan sucesivas derivadas de $f(x)$. (Dependiendo de la función esta serie puede converger para *cualquier* incremento δ o únicamente para valores de δ menores que algunos «radios de convergencia» distintos de cero). Este teorema es enormemente útil, especialmente para pequeños valores de δ, cuando, a menudo, los primeros uno o dos términos de la serie son una excelente aproximación.[11] **(a)** Encontrar la serie de Taylor para $\ln(1 + \delta)$. **(b)** Hacer lo mismo para $\cos\delta$. **(c)** Asimismo para $\text{sen}\,\delta$. **(d)** Y e^{δ}.

2.19 ⋆ Considerar el proyectil de la Sección 2.3. **(a)** Suponiendo que no hay resistencia del aire, escribir la posición (x, y) como una función de t, y eliminar t para dar la trayectoria y como una función de x. **(b)** La trayectoria correcta, incluyendo una fuerza de resistencia lineal, viene dada por (2.37). Demostrar que esto se reduce a la respuesta para la parte (a) cuando «cesa» la resistencia del aire (τ y $v_{\text{lím}} = g\tau$ se aproximan ambos a infinito). [*Ayuda:* Recordar la serie de Taylor (2.40) para $\ln(1-\epsilon)$].

2.20 ⋆⋆ [Ordenador] Usar programas adecuados de trazado de gráficos para trazar gráficas de las trayectorias (2.36) de un proyectil lanzado a 45° por encima de la horizontal y sometido a resistencia del aire lineal, para cuatro valores diferentes del coeficiente de resistencia, desde una resistencia significativa hasta ninguna resistencia en absoluto. Colocar las cuatro trayectorias en la misma gráfica. [*Ayuda:* A falta de números dados, es recomendable escoger valores convenientes. Por ejemplo, por qué no tomar $v_{xo} = v_{yo} = 1$ y $g = 1$. (Esto supone escoger unidades de medida y tiempo tales que estos parámetros tengan valor 1). Con esta selección, la fuerza de la resistencia viene dada por el único parámetro $v_{\text{lím}} = \tau$, por lo que quizá sea recomendable trazar las trayectorias para $v_{\text{lím}} = 0{,}3, 1, 3$ y ∞ (es decir, sin resistencia ninguna), y para tiempos desde $t = 0$ hasta 3. Para el caso en que $v_{\text{lím}} = \infty$, quizá sea recomendable escribir la trayectoria por separado].

2.21 ⋆⋆⋆ Una pistola puede disparar cartuchos en cualquier dirección siempre a la misma velocidad v_0. Ignorando la resistencia del aire y utilizando coordenadas polares cilíndricas con la pistola en el origen y z medido verticalmente hacia arriba, demostrar que la pistola puede alcanzar cualquier objeto dentro de la superficie

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}\rho^2.$$

Describir esta superficie y comentar sus dimensiones.

---

[11] Para más información sobre las series de Taylor, vea, por ejemplo, Mary Boas, *Métodos Matemáticos en las Ciencias Físicas* (Wiley, 1983), p. 22 o Donald McQuarrie, *Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (University Science Books, 2003), p. 94.

2.22 ⋆⋆⋆ [Ordenador] La ecuación (2.39) para el alcance de un proyectil en un medio lineal no se puede resolver analíticamente en términos de funciones elementales. Si se asignan números a los diferentes parámetros, entonces *se puede* resolver numéricamente utilizando cualquiera de los programas Mathematica, Maple y MatLab. Para practicar esto, hacer lo siguiente: considerar un proyectil lanzado formando un ángulo θ por encima de la horizontal con velocidad inicial v_0 en un medio lineal. Elegir unidades tales que $v_0 = 1$ y $g = 1$. Suponer también que la velocidad límite $v_{\text{lím}} = 1$. (Con $v_0 = v_{\text{lím}}$, la resistencia del aire debería ser bastante importante). Sabemos que en el vacío el máximo alcance se obtiene con un ángulo $\theta = \pi/4 \approx 0{,}75$. **(a)** ¿Cuál es el alcance máximo en el vacío? **(b)** Ahora resolver (2.39) para el alcance en el medio dado al mismo ángulo $\theta = 0{,}75$. **(c)** Una vez hecho el cálculo correctamente, repetirlo para alguna selección de valores de θ entre los que probablemente se encuentre el alcance máximo. (Se puede intentar $\theta = 0{,}4, 0{,}5, \ldots, 0{,}8$). **(d)** Basándose en estos resultados, elegir un intervalo más pequeño para θ en el que exista certeza de que se encuentra el máximo y repetir el proceso. Repetirlo de nuevo si es necesario hasta encontrar el alcance máximo y el ángulo correspondiente a dos cifras significativas. Comparar con los valores para el vacío.

Sección 2.4 Resistencia cuadrática del aire

2.23 ⋆ Hallar las velocidades límite en aire de **(a)** un rodamiento de bola de acero de diámetro 3 mm, **(b)** una bala de acero de 16 libras, y **(c)** un paracaidista de 200 libras en caída libre en posición fetal. En todos los casos, se puede suponer sin problemas que la fuerza de resistencia es puramente cuadrática. La densidad del acero es de unos 8 g/cm^3 y se puede tratar el paracaidista como una esfera de densidad 1 g/cm^3.

2.24 ⋆ Considerar una esfera (diámetro D, densidad ϱ_{esfera}) que cae a través del aire (densidad ϱ_{aire}) y suponer que la fuerza de resistencia es puramente cuadrática. **(a)** Usar la ecuación (2.84) del Problema 2.4 (con $\kappa = 1/4$ para una esfera) para demostrar que la velocidad límite es

$$v_{\text{lím}} = \sqrt{\frac{8}{3} D g \frac{\varrho_{\text{esfera}}}{\varrho_{\text{aire}}}}. \tag{2.88}$$

(b) Usar este resultado para mostrar que de dos esferas del mismo tamaño, la más densa caerá finalmente más deprisa. **(c)** Para dos esferas del mismo material, mostrar que la más grande caerá finalmente más deprisa.

2.25 ⋆ Considerar el ciclista de la Sección 2.4 que avanza sin pedalear hasta detenerse y está sometido a la influencia de una fuerza de resistencia cuadrática. Obtener en detalle los resultados (2.49) y (2.51) para su velocidad y posición, y verificar que la constante $\tau = m/cv_0$ es de hecho un tiempo.

2.26 ⋆ Un valor típico para el coeficiente de la resistencia cuadrática del aire sobre un ciclista está alrededor de $c = 0{,}20$ N/(m/s)^2. Suponiendo que la masa total (ciclista más bicicleta) es $m = 80$ kg y que en $t = 0$ el ciclista tiene una velocidad inicial de $v_0 = 20$ m/s (72 km/h) y en ese instante deja de pedalear y avanza bajo la influencia de la resistencia del aire, hallar el tiempo característico $\tau = m/cv_0$. ¿Cuánto tardará en reducir la velocidad a 15 m/s? ¿Y a 10 m/s y 5 m/s? (Por debajo de unos 5 m/s, ciertamente no es razonable despreciar el rozamiento, así que no tiene interés realizar este cálculo a velocidades más bajas).

2.27 ⋆ Golpeo un disco de «hockey» de masa m de manera que suba por un plano inclinado (ángulo de inclinación $= \theta$) con velocidad inicial v_0. No hay rozamiento entre el disco y el plano inclinado, pero hay resistencia del aire con magnitud $f(v) = cv^2$. Escribir y resolver la segunda ley de Newton para la velocidad del disco como función de t en el camino de subida. ¿Cuánto dura este camino de subida?

2.28 ⋆ Una masa m tiene velocidad v_0 en el origen y se desliza por el eje x en un medio en el que la fuerza de resistencia es $F(v) = -cv^{3/2}$. Usar la «regla $v\,dv/dx$» (2.86) del Problema 2.12 para escribir la ecuación de movimiento en la forma separada $m\,v\,dv/F(v) = dx$, y a continuación

integrar ambos miembros para obtener x en términos de v (o viceversa). Mostrar que finalmente recorrerá una distancia $2m\sqrt{v_0}/c$.

2.29 ⋆ La velocidad límite de un paracaidista de 70 kg en caída libre y en la posición de brazos y piernas completamente abiertos (*spread-eagle*) es alrededor de 50 m/s (180 km/h). Encontrar su velocidad a los $t = 1, 5, 10, 20, 30$ segundos después de que salta desde un globo estacionario. Comparar con las correspondientes velocidades si no hubiera resistencia del aire.

2.30 ⋆ Suponer que queremos aproximar el paracaidista del Problema 2.29 como una esfera (no es una aproximación muy prometedora, pero es el tipo de aproximación que a los físicos les gusta hacer a veces). Dada la masa y la velocidad límite, ¿cuál debemos usar para el diámetro de la esfera? ¿Parece la respuesta una respuesta razonable?

2.31 ⋆⋆ Una pelota de baloncesto tiene masa $m = 600$ g y diámetro $D = 24$ cm. **(a)** ¿Cuál es su velocidad límite? **(b)** Si se deja caer desde una torre de 30 m, ¿cuánto tarda en golpear el suelo y cuál es su velocidad cuando lo hace? Comparar con los correspondientes números en el vacío.

2.32 ⋆⋆ Considerar el siguiente enunciado: si durante el vuelo de un proyectil su velocidad es mucho menor que la velocidad límite en todo momento, los efectos de la resistencia del aire son normalmente muy pequeños. **(a)** Sin utilizar las ecuaciones explícitas para la magnitud de $v_{\text{lím}}$, explicar claramente por qué es esto así. **(b)** Mediante el examen de las fórmulas explícitas (2.26) y (2.53) explicar por qué este enunciado de arriba es incluso más útil para el caso de resistencia cuadrática que para el caso lineal. [*Ayuda:* Expresar la razón f/mg entre la resistencia y el peso en términos de la razón $v/v_{\text{lím}}$].

2.33 ⋆⋆ Las funciones hiperbólicas $\cosh z$ y $\operatorname{senh} z$ está definidas de la siguiente manera:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

para cualquier z, real o complejo. **(a)** Esbozar el comportamiento de ambas funciones para un rango apropiado de valores reales de z. **(b)** Mostrar que $\cosh z = \cos(iz)$. ¿Cuál es la relación correspondiente para $\operatorname{senh} z$? **(c)** ¿Cuáles son las derivadas de $\cosh z$ y $\operatorname{senh} z$? ¿Y sus integrales? **(d)** Mostrar que $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$. **(e)** Mostrar que $\int dx/\sqrt{1+x^2} = \operatorname{arcsenh} x$. [*Ayuda:* Una manera de hacer esto es haciendo la sustitución $x = \operatorname{senh} z$].

2.34 ⋆⋆ La función hiperbólica $\operatorname{tgh} z$ está definida como $\operatorname{tgh} z = \operatorname{senh} z/\cosh z$, con $\cosh z$ y $\operatorname{senh} z$ definidos como en el Problema 2.33. **(a)** Probar que $\operatorname{tgh} z = -i \operatorname{tg}(iz)$. **(b)** ¿Cuál es la derivada de $\operatorname{tgh} z$? **(c)** Mostrar que $\int dz \operatorname{tgh} z = \ln \cosh z$. **(d)** Probar que $1 - \operatorname{tgh}^2 z = \operatorname{sech}^2 z$, donde $\operatorname{sech} z = 1/\cosh z$. **(e)** Mostrar que $\int dx/(1-x^2) = \operatorname{arctgh} x$.

2.35 ⋆⋆ **(a)** Describir los detalles de los argumentos que conducen de la ecuación de movimiento (2.52) a las Ecuaciones (2.57) y (2.58) para la velocidad y posición de un objeto que se deja caer sometido a resistencia del aire cuadrática. Asegurarse de calcular las dos integrales involucradas. (Los resultados del Problema 2.34 pueden ayudar). **(b)** Arreglar las dos ecuaciones introduciendo el parámetro $\tau = v_{\text{lím}}/g$. Mostrar que cuando $t = \tau$, v ha alcanzado el 76% de su valor límite. ¿Cuáles son los porcentajes correspondientes cuando $t = 2\tau$ y 3τ? **(c)** Mostrar que cuando $t \gg \tau$, la posición es aproximadamente $y \approx v_{\text{lím}} t + \text{constante}$. [*Ayuda:* La definición de $\cosh x$ (Problema 2.33) proporciona una aproximación simple cuando x es grande]. **(d)** Mostrar que para t pequeño, la ecuación (2.58) para la posición da $y \approx \frac{1}{2} g t^2$. [Usar la serie de Taylor para $\cosh x$ y para $\ln(1+\delta)$].

2.36 ⋆⋆ Considerar la siguiente cita de los *Diálogos sobre las nuevas ciencias* de Galileo:

> Aristóteles dice que «una bola de hierro de 100 libras que cae desde una altura de cien codos alcanza el suelo antes de que una bola de una libra haya caído un solo codo.» Yo digo que llegan al mismo tiempo. Se observa, haciendo el experimento, que la grande gana a la pequeña por dos dedos, esto es, cuando la grande ha alcanzado el suelo, la otra está a dos dedos de él.

Sabemos que el enunciado atribuido a Aristóteles es totalmente falso, pero, ¿cómo es de exacta la predicción de Galileo de que la diferencia relativa sea de dos dedos? **(a)** Dado que la densidad del hierro es de unos 8 g/cm^3, hallar las velocidades límite de las dos bolas de hierro. **(b)** Dado que un codo son unos dos pies, usar la Ecuación (2.58) para hallar el tiempo que tarda la bola más pesada en aterrizar y a continuación la posición de la bola más ligera en ese instante. ¿Cuánta distancia las separa?

2.37 ⋆⋆ El resultado (2.57) para la velocidad de un objeto que cae se encontró integrando la Ecuación (2.55) y la manera más rápida de hacer esto es usar la integral $\int du/(1-u^2) = \operatorname{arctgh} u$. He aquí otra manera de hacerlo: integrar (2.55) usando el método de las «fracciones parciales», escribiendo

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right),$$

que permite hacer la integral en términos de logaritmos naturales. Resolver la ecuación resultante para obtener v en función de t y mostrar que la respuesta está de acuerdo con (2.57).

2.38 ⋆⋆ Un proyectil sometido a resistencia del aire cuadrática se lanza verticalmente *hacia arriba* con velocidad inicial v_0. **(a)** Escribir la ecuación de movimiento para el movimiento hacia arriba y resolverla para obtener v en función de t. **(b)** Mostrar que el tiempo necesario para alcanzar la parte más alta de la trayectoria es

$$t_{\text{más alta}} = (v_{\text{lím}}/g)\operatorname{arctgh}(v_0/v_{\text{lím}}).$$

(c) Para la pelota de béisbol del Ejemplo 2.5 (con $v_{\text{lím}} = 35$ m/s), encontrar $t_{\text{más alta}}$ para los casos en que $v_0 = 1, 10, 20, 30$ y 40 m/s, y comparar con los correspondientes valores en el vacío.

2.39 ⋆⋆ Cuando un ciclista avanza sin pedalear hasta detenerse, está sometido realmente a dos fuerzas, la fuerza cuadrática de la resistencia del aire, $f = -cv^2$ (con c tal como se da en el Problema 2.26), y una fuerza de rozamiento constante f_{roz} de unos 3 N. La primera es dominante a velocidades medias y altas, la segunda a velocidades bajas. (La fuerza de rozamiento es una combinación del rozamiento ordinario en los rodamientos y del rozamiento giratorio de las ruedas sobre la calzada). **(a)** Escribir la ecuación de movimiento cuando el ciclista avanza sin pedalear hasta detenerse. Resolverla mediante separación de variables para obtener t como una función de v. **(b)** Usando los números del Problema 2.26 (y el valor $f_{\text{roz}} = 3$ N dado arriba) estimar cuánto tarda el ciclista en reducir su velocidad desde los 20 m/s iniciales hasta los 15 m/s. ¿Cuánto tarda en reducir la velocidad a 10 y a 5 m/s? ¿Cuánto tarda en detenerse por completo? Si se ha hecho el Problema 2.26, comparar con las respuestas que se dieron en él ignorando por completo el rozamiento.

2.40 ⋆⋆ Considerar un objeto que se desliza horizontalmente (dirección x positiva) sometido a una fuerza de resistencia $f = -bv - cv^2$. Escribir la segunda ley de Newton para este objeto y resolverla para v por separación de variables. Esbozar el comportamiento de v como función de t. Explicar la dependencia temporal para t grande. (¿Qué término de la fuerza es dominante cuando t es grande?)

2.41 ⋆⋆ Se lanza una pelota de béisbol verticalmente hacia arriba con velocidad v_0 y sometida a una resistencia cuadrática de magnitud $f(v) = cv^2$. Escribir la ecuación de movimiento para el viaje de subida (midiendo y verticalmente *hacia arriba*) y mostrar que se puede reescribir como $\dot{v} = -g[1 + (v/v_{\text{lím}})^2]$. Usar la «regla $v\,dv/dx$» (2.86) para escribir $\dot{v}$ como $v\,dv/dy$, y a continuación resolver la ecuación de movimiento por separación de variables (poner todos los términos que incluyan v en un miembro y todos los términos que incluyan y en el otro). Integrar ambos miembros para obtener y en términos de v, y por tanto v como función de y. Mostrar que la altura máxima de la pelota es

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_{\text{lím}}^2}{2g}\ln\left(\frac{v_{\text{lím}}^2 + v_0^2}{v_{\text{lím}}^2}\right). \tag{2.89}$$

Si $v_0 = 20$ m/s (72 km/h) y la pelota tiene los parámetros dados en el Ejemplo 2.5 (página 68), ¿qué es $y_{máx}$? Comparar con el valor en el vacío.

2.42 ⋆⋆ Considerar otra vez la pelota de béisbol del Problema 2.41 y escribir la ecuación de movimiento para el viaje de bajada. (Advertir que con una resistencia cuadrática la ecuación para la bajada es diferente de la de subida, y debe tratarse por separado). Encontrar v en función de y y, dado que el viaje de bajada comienza en $y_{máx}$ tal como se da en (2.89), mostrar que la velocidad con la que vuelve la pelota al suelo es $v_{lím} v_0 / \sqrt{v_{lím}^2 + v_0^2}$. Discutir este resultado para los casos de mucha y muy poca resistencia del aire. ¿Cuál es el valor numérico de esta velocidad para la pelota de béisbol del Problema 2.41? Comparar con el valor en el vacío.

2.43 ⋆⋆⋆ [Ordenador] La pelota de baloncesto del Problema 2.31 se lanza desde una altura de 2 m con velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = 15$ m/s formando un ángulo de 45° por encima de la horizontal. **(a)** Usar programas informáticos adecuados para resolver las ecuaciones de movimiento (2.61) para la posición de la pelota (x, y) y dibujar la trayectoria. Mostrar la trayectoria correspondiente en ausencia de resistencia del aire. **(b)** Usar la gráfica realizada para estimar la distancia que recorre la pelota en la dirección horizontal antes de golpear el suelo. Comparar con el alcance correspondiente en el vacío.

2.44 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Para conseguir una trayectoria precisa de un proyectil se deben tener en cuenta muchas veces varias complicaciones. Por ejemplo, si un proyectil llega muy alto entonces se tiene que considerar la reducción de la resistencia del aire a medida que la densidad atmosférica disminuye. Para ilustrar esto, considerar una bala de cañón (diámetro 15 cm, densidad 7,8 g/cm^3) que es disparada con velocidad inicial 300 m/s formando un ángulo de 50 grados con la horizontal. La fuerza de resistencia es aproximadamente cuadrática, pero como la resistencia es proporcional a la densidad atmosférica y la densidad cae exponencialmente con la altura, la fuerza de resistencia es $f = c(y)v^2$ donde $c(y) = \gamma D^2 \exp(-y/\lambda)$ con γ dada por (2.6) y $\lambda \approx 10\,000$ m. **(a)** Escribir las ecuaciones de movimiento para la bala de cañón y utilizar programas informáticos apropiados para resolver numéricamente para $x(t)$ e $y(t)$ para $0 \le t \le 3{,}5$ s. Trazar la gráfica de la trayectoria de la bala y hallar su alcance horizontal. **(b)** Hacer el mismo cálculo ignorando la variación de la densidad atmosférica [esto es, haciendo $c(y) = c(0)$], y otra vez más ignorando la resistencia del aire por completo. Trazar las gráficas de las tres trayectorias para $0 \le t \le 3{,}5$ s sobre la misma gráfica. Se verá que en este caso la resistencia del aire produce una diferencia enorme y que la variación de la resistencia del aire produce una pequeña, pero no despreciable, diferencia.

Sección 2.6 Exponenciales complejas

2.45 ⋆ **(a)** Utilizando la relación de Euler (2.76), probar que cualquier número complejo $z = x + iy$ se puede escribir de la forma $z = re^{i\theta}$, donde r y θ son reales. Describir el significado de r y θ en relación con el plano complejo. **(b)** Escribir $z = 3 + 4i$ en la forma $z = re^{i\theta}$. **(c)** Escribir $z = 2e^{-i\pi/3}$ en la forma $x + iy$.

2.46 ⋆ Para cualquier número complejo $z = x + iy$, las **partes real** e **imaginaria** están definidas como los números reales $\mathrm{Re}(z) = x$ e $\mathrm{Im}(z) = y$. El **módulo** o **valor absoluto** es $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la **fase** o **ángulo** es el valor de θ cuando z se expresa como $z = re^{i\theta}$. El **complejo conjugado** es $z^* = x - iy$. (Esta última es la notación utilizada por la mayoría de los físicos; la mayoría de los matemáticos utilizan $\bar{z}$). Para cada uno de los siguientes números complejos, encontrar las partes real e imaginaria, el módulo y la fase, y el complejo conjugado, y esbozar z y z^* en el plano complejo:

$$\begin{array}{ll} \textbf{(a)}\ z = 1 + i & \textbf{(b)}\ z = 1 - i\sqrt{3} \\ \textbf{(c)}\ z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} & \textbf{(d)}\ z = 5e^{i\omega t}. \end{array}$$

En la parte (d), ω es una constante y t es el tiempo.

2.47 ⋆ Para cada uno de los siguientes dos pares de números, calcular $z + w$, $z - w$, zw y z/w.

$$\textbf{(a)}\ z = 6 + 8i \ \text{ y } \ w = 3 - 4i \qquad \textbf{(b)}\ z = 8e^{i\pi/3} \ \text{ y } \ w = 4e^{i\pi/6}.$$

Tener en cuenta que para sumar y restar números complejos, la forma $x+iy$ es más conveniente, pero para multiplicar, y especialmente para dividir, la forma $re^{i\theta}$ es más conveniente. En la parte (a), un truco inteligente para encontrar z/w sin convertir a la forma $re^{i\theta}$es multiplicar arriba y abajo por w^*; hacerlo de las dos maneras.

2.48 ⋆ Probar que $|z| = \sqrt{z^* z}$ para cualquier número complejo z.

2.49 ⋆ Considerar el número complejo $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$. **(a)** Mediante la evaluación de z^2 de dos maneras diferentes, probar las identidades trigonométricas $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta$ y $\mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$. **(b)** Usar la misma técnica para encontrar las identidades correspondientes para $\cos 3\theta$ y $\mathrm{sen}\,3\theta$.

2.50 ⋆ Usar la definición de la serie (2.72) de e^z para demostrar que[12] $de^z/dz = e^z$.

2.51 ⋆⋆ Usar la definición de la serie (2.72) de e^z para demostrar que $e^z e^w = e^{z+w}$. [*Ayuda:* Si se escribe el primer miembro como un producto de dos series, se tendrá una enorme suma de términos de tipo $z^n w^m$. Si se agrupan juntos todos los términos para los cuales $n+m$ es igual (llamarlo p) y se utiliza el teorema binomial, se verá que aparece la serie para el segundo miembro].

Sección 2.7 Solución para la carga en un campo B

2.52 ⋆ La velocidad transversal de la partícula en las Secciones 2.5 y 2.7 está contenida en (2.77), porque $\eta = v_x + iv_y$. Tomando las partes real e imaginaria, encontrar expresiones para v_x y v_y por separado. Basándose en estas expresiones, describir la dependencia temporal de la velocidad transversal.

2.53 ⋆ Una partícula cargada de masa m y carga positiva q se mueve a través de campos eléctrico y magnético uniformes, **E** y **B**, los dos apuntando en la dirección z. La fuerza neta sobre la partícula es $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$. Escribir la ecuación de movimiento para la partícula y resolverla para sus tres componentes. Resolver las ecuaciones y describir el movimiento de la partícula.

2.54 ⋆⋆ En la Sección 2.5 resolvimos las ecuaciones de movimiento (2.68) para la velocidad transversal de una carga en un campo magnético mediante el truco de usar el número complejo $\eta = v_x + iv_y$. Como se puede suponer, las ecuaciones se pueden resolver desde luego sin este truco. He aquí una manera: **(a)** Diferenciar la primera de las ecuaciones (2.68) con respecto a t y usar la segunda para obtener una ecuación diferencial de segundo orden para v_x. Esta es una ecuación que el lector debería reconocer [si no es así, consultar la ecuación (1.55)] y se puede escribir su solución general. Una vez que se conoce v_x, (2.68) proporciona v_y. **(b)** Mostrar que la solución general obtenida aquí es la misma que la solución general contenida en (2.77), como la que se obtuvo en el Problema 2.52.

2.55 ⋆⋆⋆ Una partícula cargada de masa m y carga positiva q se mueve a través de campos eléctrico y magnético uniformes, **E** apuntando en la dirección y y **B** en la dirección z (una situación llamada «campos E y B cruzados»). Suponer que la partícula está inicialmente en el origen y se le da un empujón en el instante $t = 0$ por el eje x con $v_x = v_{xo}$ (positiva o negativa). **(a)** Escribir la ecuación de movimiento para la partícula y resolverla para sus tres componentes. Mostrar que el movimiento permanece en el plano $z = 0$. **(b)** Probar que hay un único valor de v_{xo}, llamado «velocidad de deriva» v_{dr}, para el cual la partícula se mueve sin ser desviada por los campos. (Esta es la base de los selectores de velocidad, que seleccionan partículas que viajan a una velocidad determinada de un haz de partículas que van a diferentes velocidades). **(c)** Resolver las ecuaciones de movimiento para obtener la velocidad de la partícula como una función de t, para valores arbitrarios de v_{xo}. [*Ayuda:* Las ecuaciones para (v_x, v_y) deberían ser muy parecidas a las Ecuaciones (2.68) excepto por la sustitución de v_x por una constante. Si se hace el cambio de variables $u_x =$

[12] Si se es del tipo de persona que se preocupa por las sutilezas matemáticas, uno se puede estar preguntando si está permitido diferenciar una serie infinita. Afortunadamente, en el caso de una serie de potencias (que es el caso), existe un teorema que garantiza que la serie se puede diferenciar para cualquier z que esté dentro del «radio de convergencia». Como el radio de convergencia de la serie para e^z es infinito, podemos diferenciarla para *cualquier* valor de z.

$v_x - v_{dr}$ y $u_y = v_y$, las ecuaciones para (u_x, u_y) tendrán exactamente la forma (2.68), cuya solución general es conocida]. **(d)** Integrar la velocidad para encontrar la posición como una función de t y esbozar la trayectoria para varios valores de v_{xo}.

CAPÍTULO 3

Momento y momento angular

En este capítulo y en el siguiente describiré las grandes leyes de conservación del momento, del momento angular y la energía. Estas tres leyes están estrechamente relacionadas entre sí y son probablemente las más importantes del pequeño número de leyes de conservación consideradas piedras angulares de toda la física moderna. Curiosamente, en Mecánica Clásica las dos primeras leyes (momento y momento angular) son muy diferentes de la última (energía). Es tarea relativamente fácil probar las dos primeras a partir de las leyes de Newton (de hecho ya hemos demostrado la conservación del momento); sin embargo, la prueba de la conservación de la energía es sorprendentemente sutil. Discuto el momento y el momento angular en este más bien corto capítulo y la energía en el Capítulo 4, que es apreciablemente más largo.

3.1 Conservación del momento

En el Capítulo 1 estudiamos un sistema de N partículas denotadas por $\alpha = 1, \ldots, N$. Encontramos que siempre que todas las fuerzas internas cumplen la tercera ley de Newton, la tasa de variación del momento lineal total del sistema $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_N = \sum \mathbf{p}_\alpha$ viene determinado completamente por las fuerzas *externas* sobre el sistema:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \tag{3.1}$$

donde $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ denota la fuerza externa total sobre el sistema. Por la tercera ley, todas las fuerzas internas se cancelan en la tasa de variación del momento *total*. En particular, si el sistema es aislado, de tal manera que la fuerza externa total es cero, tenemos el

Principio de conservación del momento

Si la fuerza externa neta $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ sobre un sistema de N-partículas es cero, el momento lineal mecánico total del sistema $\mathbf{P} = \sum m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ es constante.

Si nuestro sistema contiene sólo una partícula ($N = 1$), entonces todas las fuerzas sobre la partícula son externas, y la conservación del momento se reduce a la no muy interesante afirmación de que, en ausencia de cualquier fuerza, el momento de una única partícula es constante, que es justo la primera ley de Newton. Sin embargo, si nuestro sistema tiene dos o más partículas ($N \geq 2$), entonces la conservación del momento lineal es una propiedad no trivial y muchas veces útil, tal como muestra el siguiente ejemplo simple y bien conocido.

Ejemplo 3.1 *Colisión inelástica de dos cuerpos*

Dos cuerpos (dos trozos de masilla, por ejemplo, o dos coches en un choque) tienen masas m_1 y m_2 y velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Los cuerpos colisionan y permanecen juntos después de la colisión, de tal manera que se desplazan como una única unidad, tal como muestra la Figura 3.1. (De una colisión como ésta, en la que los cuerpos quedan unidos, se dice que es *perfectamente inelástica*). Suponiendo que las fuerzas externas son despreciables durante el breve instante de la colisión, hallar la velocidad $\mathbf{v}$ justo después de la colisión.

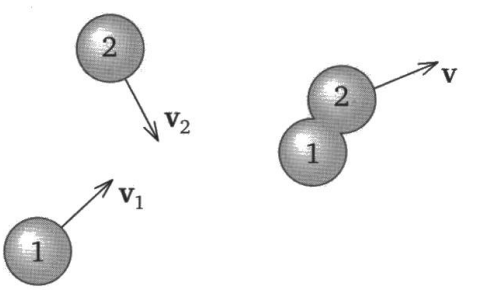


Figura 3.1. Colisión perfectamente inelástica entre dos trozos de masilla.

El momento total inicial, justo antes de la colisión, es

$$\mathbf{P}_{\text{in}} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2\,,$$

y el momento final, justo después de la colisión, es

$$\mathbf{P}_{\text{fin}} = m_1\mathbf{v} + m_2\mathbf{v} = (m_1 + m_2)\mathbf{v}.$$

(Advierta que esta última ecuación ilustra el útil resultado de que, una vez que los dos cuerpos se han unido, se puede hallar su momento considerándolos como un

único cuerpo de masa $m_1 + m_2$). Por conservación del momento, estos dos momentos deben ser iguales, $\mathbf{P}_{\text{fin}} = \mathbf{P}_{\text{in}}$, y se puede resolver fácilmente para obtener la velocidad final,

$$\mathbf{v} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \tag{3.2}$$

Vemos que la velocidad final es justo el promedio ponderado de las velocidades originales $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, ponderadas por las correspondientes masas m_1 y m_2.

Un caso especial importante es cuando uno de los cuerpos está inicialmente en reposo, como cuando un coche a alta velocidad embiste a un coche que se encuentra detenido en un semáforo en rojo. Con $\mathbf{v}_2 = 0$, la ecuación (3.2) se reduce a

$$\mathbf{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v}_1. \tag{3.3}$$

En este caso la velocidad final va siempre en la misma dirección que $\mathbf{v}_1$ pero reducida por el factor $m_1/(m_1 + m_2)$. Al permitir encontrar la velocidad desconocida $\mathbf{v}_1$ de un coche veloz que se ha estrellado contra un coche parado, la policía que investiga choques de coches utiliza el resultado (3.3) en términos de magnitudes que pueden ser medidas después del suceso (la velocidad final $\mathbf{v}$ se puede hallar a partir de las marcas del derrape de los restos combinados).

Este tipo de análisis de colisiones, que utilizan la conservación del momento, es una herramienta importante para resolver muchos y variados problemas que van desde reacciones nucleares hasta colisiones de galaxias, pasando por choques de coches.

3.2 Cohetes

Un ejemplo muy bonito del uso de la conservación del momento es el análisis de la propulsión de los cohetes. El problema básico que resuelve un cohete es el siguiente: si un objeto no tiene ningún agente externo que lo empuje o sobre el cual pueda empujar, ¿cómo puede ponerse en movimiento? Uno se puede poner en la misma tesitura si imagina estar sobre un lago helado perfectamente liso y sin rozamiento. La manera más fácil de llegar a la orilla es quitarse algo que no sea imprescindible, como una bota, y arrojarla lo más fuerte posible en sentido contrario a la orilla. Por la tercera ley de Newton, cuando uno empuja en un sentido la bota, la bota le empuja a uno en sentido contrario. Entonces al arrojar la bota, la fuerza de reacción de ésta sobre uno, le hará retroceder en la dirección opuesta y deslizarse entonces sobre el hielo hasta la orilla. Un cohete hace esencialmente lo mismo. Su motor está diseñado para lanzar el combustible gastado fuera de la parte de atrás del cohete, y por la tercera ley, el combustible empuja al cohete hacia delante.

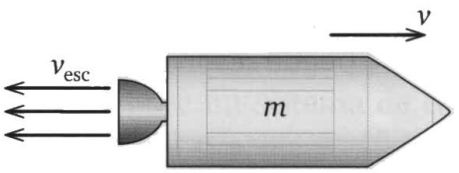


Figura 3.2. Un cohete de masa m viaja hacia la derecha con velocidad v y expulsa combustible gastado con velocidad de escape v_{esc} relativa al cohete.

Para analizar el movimiento de un cohete cuantitativamente debemos examinar el momento total. Consideremos el cohete de la Figura 3.2, que tiene masa m, viaja en la dirección x positiva (así se puede abreviar v_x y poner sólo v) y expulsa el combustible gastado a la velocidad de escape v_{esc} relativa al cohete. Como el cohete está expulsando masa, su masa m está continuamente menguando. En el instante t, el momento es $P(t) = mv$. Poco tiempo después, en[1] $t + dt$, la masa del cohete es $(m + dm)$, donde dm es negativo, y su momento es $(m + dm)(v + dv)$.

El combustible expulsado en el tiempo dt tiene una masa de $(-dm)$ y una velocidad de $v - v_{esc}$ relativa al suelo. Entonces el momento total (cohete más el combustible recién expulsado) en $t + dt$ es

$$P(t + dt) = (m + dm)(v + dv) - dm(v - v_{esc}) = mv + m\,dv + dm\,v_{esc}$$

donde he despreciado el producto doblemente pequeño $dm\,dv$. Por lo tanto, la variación en el momento total es

$$dP = P(t + dt) - P(t) = m\,dv + dm\,v_{esc}. \tag{3.4}$$

Si existe una fuerza neta externa F^{ext} (por ejemplo, la gravedad), esta variación de momento es $F^{ext}\,dt$. (Vea el Problema 3.11). En este caso supondré que no existen fuerzas netas externas, de manera que, P es constante y $dP = 0$. Por lo tanto

$$m\,dv = -dm\,v_{esc}. \tag{3.5}$$

Si dividimos ambos miembros por dt, podemos reescribirlo así

$$m\dot{v} = -\dot{m}v_{esc} \tag{3.6}$$

---

[1] Respecto al uso de cantidades pequeñas como dt y dm, yo recomiendo otra vez la idea de que son incrementos pequeños *pero no cero*, con dt escogido suficientemente pequeño para que dm dividido por dt sea (dentro de la precisión que se haya elegido como deseada) igual a la derivada dm/dt. Si se desean más detalles, consultar la nota al pie que hay justo antes de la ecuación (2.47).

donde $-\dot{m}$ es el ritmo al que el motor del cohete expulsa masa. Esta ecuación parece igual a la segunda ley de Newton ($m\dot{v} = F$) para partículas ordinarias, salvo que el producto $-\dot{m}v_{esc}$ del segundo miembro juega el papel de la fuerza. Por esta razón este producto a menudo se denomina **empuje**:

$$\text{empuje} = -\dot{m}v_{esc}. \tag{3.7}$$

(Como $\dot{m}$ es negativo, el empuje se define como positivo).

La ecuación (3.5) se puede resolver por separación de variables. Dividiendo ambos miembros por m se obtiene

$$dv = -v_{esc}\frac{dm}{m}.$$

Si la velocidad de escape v_{esc} es constante, esta ecuación se puede integrar para llegar a

$$v - v_0 = v_{esc}\ln(m_0/m) \tag{3.8}$$

donde v_0 es la velocidad inicial y m_0 es la masa inicial del cohete (incluido el combustible y la carga). Este resultado pone una restricción importante a la máxima velocidad del cohete. La razón m_0/m es mayor cuando se quema todo el combustible y m es justo la masa del cohete más la carga. Incluso si, por ejemplo, la masa original es un 90% de combustible, esta proporción es sólo 10, y, como $\ln 10 = 2{,}3$, esto supone que la velocidad adquirida, $v - v_0$, no puede ser más de 2,3 veces v_{esc}. Esto significa que los ingenieros de cohetes intentan hacer v_{esc} tan grande como sea posible y también diseñen cohetes multietapa, que pueden desprenderse de los pesados depósitos de combustible de las primeras etapas para reducir la masa total para etapas posteriores.[2]

3.3 El centro de masa

Varias de las ideas de la Sección 3.1 se pueden reformular en términos de la importante noción del centro de masa del sistema. Consideremos un sistema de N partículas, $\alpha = 1,\ldots,N$, con masas m_α y posiciones $\mathbf{r}_\alpha$ medidas respecto a un origen

[2] El desprendimiento de los depósitos de combustible de la etapa 1 reduce las masas inicial y final de la etapa 2 en la misma cantidad. Esto *aumenta* la razón m_0/m cuando aplicamos (3.8) a la etapa 2. Vea el Problema 3.12.

O. El **centro de masa** (o **CM**) de este sistema se define como la posición (relativa al mismo origen O)

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \mathbf{r}_\alpha = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + \cdots + m_N\mathbf{r}_N}{M} \tag{3.9}$$

donde M denota la masa total de todas las partículas, $M = \sum m_\alpha$. La primera cosa importante de esta definición es que es una ecuación vectorial. La posición del CM es un vector $\mathbf{R}$ con tres componentes (X, Y, Z), y la ecuación (3.9) es equivalente a tres ecuaciones que dan estas tres componentes,

$$X = \frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha x_\alpha, \qquad Y = \frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha y_\alpha, \qquad Z = \frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha z_\alpha.$$

De una manera o de otra, la posición $\mathbf{R}$ del CM es una media ponderada de las posiciones $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N$, en la que cada posición $\mathbf{r}_\alpha$ está ponderada por la correspondiente masa m_α. (Análogamente, es la suma de las $\mathbf{r}_\alpha$, cada una multiplicada por la *fracción* de la masa total en $\mathbf{r}_\alpha$).

Para tener una idea intuitiva sobre el CM, puede ayudar considerar el caso de sólo dos partículas ($N = 2$). En este caso, la definición (3.9) reza así

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \tag{3.10}$$

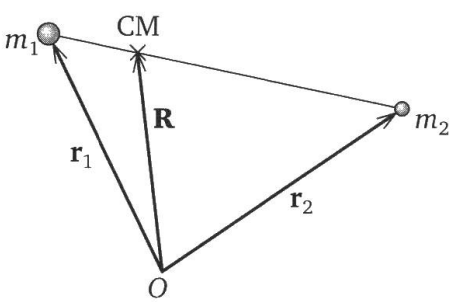


Figura 3.3. El CM de dos partículas está en la posición $\mathbf{R} = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/M$. Se puede demostrar que éste está sobre la recta que une m_1 y m_2, como se muestra, y que las distancias del CM a m_1 y m_2 están en la proporción m_2/m_1.

Es fácil comprobar que la posición del CM tiene varias propiedades familiares. Por ejemplo, se puede demostrar (Problema 3.18) que el CM definido por (3.10) está sobre la recta que une las dos partículas, como se muestra en la Figura 3.3. También es fácil demostrar que las distancias del CM a m_1 y m_2 están en la proporción m_2/m_1, de tal manera que el CM está más cerca de la partícula más masiva. (En la Figura 3.3

esta razón es 1/3). En particular, si m_1 es mucho mayor que m_2, el CM estará muy cerca de $\mathbf{r}_1$. De manera más general, volviendo a la ecuación (3.9) para el CM de N partículas, vemos que si m_1 es mucho mayor que cualquiera de las otras masas (como es el caso del Sol comparado con todos los planetas), entonces $m_1 \approx M$ mientras que $m_\alpha \ll M$ para todas las otras partículas; esto significa que $\mathbf{R}$ está muy cerca de $\mathbf{r}_1$. Entonces, por ejemplo, el CM del sistema solar está muy cerca del Sol.

Podemos ahora escribir el momento total $\mathbf{P}$ de cualquier sistema de N-partículas en términos del CM del sistema como sigue:

$$\mathbf{P} = \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha = M\dot{\mathbf{R}} \tag{3.11}$$

donde la última igualdad es justo la derivada de la definición (3.9) de $\mathbf{R}$ (multiplicada por M). Este importante resultado dice que el momento total de las N partículas es exactamente el mismo que el de una sola partícula de masa M y velocidad igual a aquella del CM.

Obtenemos un resultado todavía más llamativo cuando diferenciamos (3.11). De acuerdo con (3.1), la derivada de $\mathbf{P}$ es justo $\mathbf{F}^{\text{ext}}$. Por lo tanto, (3.11) implica que

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = M\ddot{\mathbf{R}}. \tag{3.12}$$

Esto es, el centro de masa $\mathbf{R}$ se mueve exactamente como si fuera una única partícula de masa M, sometida a la fuerza externa neta sobre el sistema. Este resultado es la razón principal por la que podemos muchas veces tratar medios continuos, como pelotas y planetas, como si fueran partículas puntuales. Siempre que un cuerpo sea pequeño comparado con la escala de su trayectoria, la posición $\mathbf{R}$ de su CM es una buena representante de su localización general, y (3.12) implica que $\mathbf{R}$ se mueve justo como una partícula puntual. Dada la importancia del CM, es necesario no tener problemas en calcular la posición del CM para varios sistemas. Quizá ya se haya practicado muchas veces en introducción a la física o en algún curso de cálculo pero, en caso de no haber sido así, hay varios ejercicios al final de este capítulo. Un punto importante a tener en cuenta es que cuando la masa de un cuerpo está distribuida de manera continua, la suma en la definición (3.9) se convierte en una integral

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\, dm = \frac{1}{M}\int \varrho\, \mathbf{r}\, dV \tag{3.13}$$

donde ϱ es la densidad de masa del cuerpo, dV denota un elemento de volumen, y la integral se realiza a todo el cuerpo (es decir, en todas partes $\varrho \neq 0$). Usaremos integrales parecidas para evaluar el tensor momento de inercia en el Capítulo 10. Entre tanto, aquí hay un ejemplo:

Ejemplo 3.2 *El CM de un cono macizo*

Hallar la posición del CM para el cono macizo uniforme mostrado en la Figura 3.4.

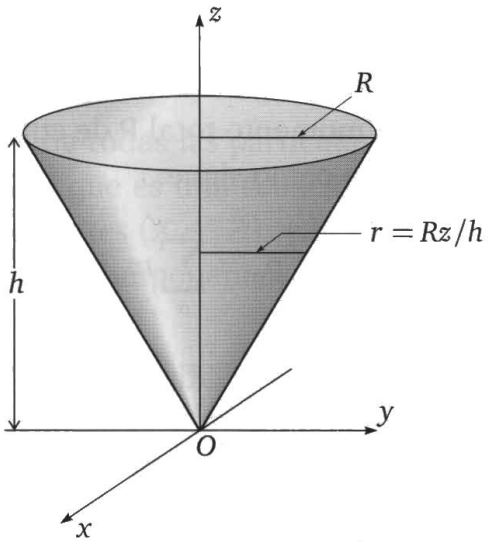


Figura 3.4. Cono macizo, centrado en el eje z, con vértice en el origen y densidad de masa uniforme ϱ. Su altura es h y su base tiene radio R.

Quizá sea obvio por simetría que el CM está situado en el eje de simetría (el eje z), pero esto también se deduce inmediatamente de la integral (3.13). Por ejemplo, si se considera la componente x de esa integral, es fácil ver que la contribución de cualquier punto (x, y, z) cancela exactamente con aquella del punto $(-x, y, z)$. Esto es, la integral para X es cero. Como el mismo argumento aplica a Y, el CM está situado en el eje z. Para hallar la altura Z del CM, debemos evaluar la integral

$$Z = \frac{1}{M}\int \varrho\, z\, dV = \frac{\varrho}{M}\int z\, dx\, dy\, dz$$

donde se puede sacar el factor ϱ fuera de la integral porque ϱ es constante en todo el cono (siempre que entendamos que la integral está limitada al interior del cono) y he cambiado el elemento de volumen dV por $dx\, dy\, dz$. Para cualquier z dado, la integral en x e y se realiza en un círculo de radio $r = Rz/h$, dando un factor de $\pi r^2 = \pi R^2 z^2/h^2$, de tal manera que

$$Z = \frac{\varrho\pi R^2}{Mh^2}\int_0^h z^3 dz = \frac{\varrho\pi R^2}{Mh^2}\frac{h^4}{4} = \frac{3}{4}h$$

donde en el último paso he reemplazado la masa M por ϱ veces el volumen o $M = \frac{1}{3}\varrho\pi R^2 h$. Concluimos que el CM está en el eje del cono a una distancia $\frac{3}{4}h$ desde el vértice (o $\frac{1}{4}h$ desde la base).

3.4 Momento angular para una única partícula

De muchas maneras la conservación del momento angular es paralela a la conservación del momento ordinario (o «lineal»). Sin embargo, me gustaría repasar el formalismo en detalle, primero para una única partícula y después para un sistema de muchas partículas. Esto introducirá varias ideas importantes y algunas matemáticas útiles. El **momento angular** ℓ de una única partícula se define como el vector

$$\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \tag{3.14}$$

Aquí $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ es el producto vectorial del vector de posición de la partícula $\mathbf{r}$, relativo al origen elegido O, y su momento $\mathbf{p}$, como muestra la Figura 3.5. Advierta que como $\mathbf{r}$ depende de la elección del origen, lo mismo es cierto de ℓ: el momento angular ℓ (no así el momento lineal $\mathbf{p}$) depende de la elección del origen, y debemos, estrictamente hablando, referirnos a ℓ como el momento angular *relativo a* O.

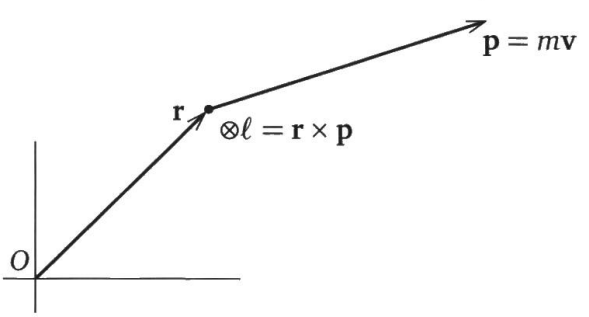


Figura 3.5. Para cualquier partícula con posición $\mathbf{r}$ relativa al origen O y momento $\mathbf{p}$, el momento angular alrededor de O se define como el vector $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. En el caso representado, ℓ apunta hacia dentro de la página.

La tasa de variación temporal de ℓ se halla fácilmente:

$$\dot{\ell} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) + (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}). \tag{3.15}$$

(Se puede comprobar fácilmente que la regla del producto se puede usar para diferenciar productos vectoriales, siempre que se tenga cuidado de mantener los vectores en el orden correcto. Vea el Problema 1.17). En el primer término de la derecha, podemos reemplazar $\mathbf{p}$ por $m\dot{\mathbf{r}}$, y, como el producto vectorial de dos vectores paralelos cualesquiera es cero, el primer término es cero. En el segundo término, podemos reemplazar $\dot{\mathbf{p}}$ por la fuerza neta $\mathbf{F}$ sobre la partícula, y obtenemos

$$\dot{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \equiv \Gamma. \tag{3.16}$$

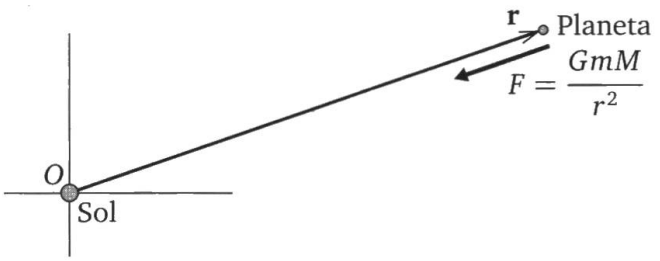


Figura 3.6. Un planeta (de masa m) está sometido a la fuerza central del Sol (de masa M). Si elegimos el origen en el Sol, entonces $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$, y el momento angular del planeta alrededor de O es constante.

Aquí $\boldsymbol{\Gamma}$ (gamma griega mayúscula) es el momento alrededor de O sobre la partícula, definido como $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$. (Otros símbolos utilizados para el momento son τ y $\mathbf{N}$). En palabras, (3.16) dice que la tasa de variación del momento angular de la partícula alrededor del origen O es igual al momento neto aplicado alrededor de O. La ecuación (3.16) es el rotacional análogo de la ecuación $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ para el momento lineal, y (3.16) se describe muchas veces como la forma rotacional de la segunda ley de Newton.

En muchos problemas de una partícula uno puede elegir el origen O de tal manera que el momento neto $\boldsymbol{\Gamma}$ (alrededor del O escogido) sea cero. En este caso, el momento angular de la partícula alrededor de O es constante. Consideremos, por ejemplo, un único planeta (o cometa) orbitando alrededor del Sol. La única fuerza que actúa sobre el planeta es la atracción gravitatoria GmM/r^2 del Sol, como se muestra en la Figura 3.6. Una propiedad crucial de la fuerza gravitatoria es que es **central**, es decir, va en la dirección de la línea que une los dos centros. Esto significa que $\mathbf{F}$ es paralelo (de hecho, antiparalelo) al vector de posición $\mathbf{r}$ medido desde el Sol, y así $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Por tanto si escogemos nuestro origen en el Sol, el momento angular del planeta alrededor de O es constante, un hecho que simplifica enormemente el análisis del movimiento planetario. Por ejemplo, como $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ es constante, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ deben permanecer en un plano fijo; en otras palabras, el planeta orbita confinado en un único plano que contiene al Sol, y el problema se reduce a dos dimensiones, un resultado que explotaremos en el Capítulo 8.

Segunda ley de Kepler

Uno de los primeros triunfos de la Mecánica de Newton residió en que fue capaz de explicar la segunda ley de Kepler como una simple consecuencia de la conservación del momento angular. Las leyes del movimiento de Newton se publicaron en 1687 en su famoso libro *Principia*. Casi ochenta años antes, el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) había publicado sus tres leyes del movimiento planetario.[3]

[3] Las dos primeras leyes de Kepler aparecían en su libro *Astronomia Nova* en 1609 y la tercera en otro libro, *Harmonices Mundi*, publicado en 1619.

Estas leyes se diferencian bastante de las leyes de Newton porque son simplemente descripciones matemáticas del movimiento observado de los planetas. Por ejemplo, la primera ley afirma que los planetas se mueven alrededor del Sol en elipses con el Sol en un foco. Las leyes de Kepler no hacen ningún intento de *explicar* el movimiento planetario en términos de más ideas fundamentales; son sólo informes (informes brillantes, que requieren gran perspicacia, pero sólo informes al fin y al cabo) de los movimientos observados de los planetas. Las tres leyes de Kepler resultan ser consecuencias de las leyes del movimiento de Newton. Deduciré la primera y la tercera de las leyes de Kepler en el Capítulo 8. La segunda estamos preparados para discutirla ahora.

La segunda ley de Kepler se enuncia generalmente como sigue:

Segunda ley de Kepler

Como cada planeta se mueve alrededor del Sol, una línea dibujada desde el planeta hasta el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

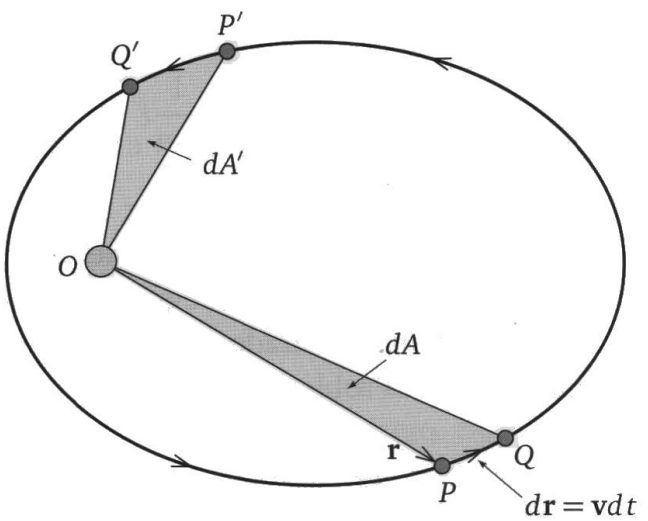


Figura 3.7. Órbita de un planeta con el Sol fijo en O. La segunda ley de Kepler afirma que si los dos pares de puntos P, Q y P', Q' están separados por intervalos de tiempo iguales, $dt = dt'$, entonces las dos áreas dA y dA' son iguales.

Este enunciado más bien curioso, se ilustra en la Figura 3.7, la cual muestra la trayectoria de un planeta o cometa (la ley se aplica a cometas también) que orbita alrededor del Sol que se encuentra en el origen O. (A lo largo de esta discusión, haré la aproximación de que el Sol está fijo; veremos cómo permitir el pequeñísimo movimiento del Sol en el Capítulo 8). El área «barrida» por el planeta cuando se mueve entre dos puntos cualesquiera P y Q es justo el área del triángulo OPQ. (Estrictamente hablando el «triángulo» es el área entre las dos líneas OP y OQ y el *arco* PQ. Sin embargo, es

suficiente considerar pares de puntos P y Q que están próximos, en cuyo caso la diferencia entre el arco PQ y la línea recta PQ es despreciable). Denotaré el tiempo transcurrido entre la visita del planeta a P y Q por dt y el área correspondiente de OPQ por dA. La segunda ley de Kepler afirma que si elegimos cualquier otro par de puntos P' y Q' separados por el mismo intervalo temporal ($dt' = dt$), entonces el área $OP'Q'$ será la misma que OPQ, o $dA' = dA$. Análogamente podremos dividir ambos miembros de esta igualdad por dt y afirmar que el *ritmo* al que el planeta barre el área, dA/dt, es el mismo en todos los puntos de la órbita; esto es, dA/dt es constante.

Para probar este resultado, nos percatamos primero de que la línea OP es justo el vector de posición $\mathbf{r}$, y PQ es el desplazamiento $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt$. Ahora bien, es una propiedad bien conocida del producto vectorial que si dos lados del triángulo están dados por vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, entonces el área del triángulo es $\frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. (Vea el Problema 3.24). Por tanto el área del triángulo OPQ es

$$dA = \tfrac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\,dt|.$$

Sustituyendo $\mathbf{v}$ por $\mathbf{p}/m$ y dividiendo ambos miembros por dt, encontramos que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}|\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = \frac{1}{2m}\ell \tag{3.17}$$

donde ℓ denota la magnitud del momento angular $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Como el momento angular del planeta alrededor del Sol se conserva, esto establece que dA/dt es constante, lo cual, como hemos visto, es el contenido de la segunda ley de Kepler.

Una prueba alternativa del mismo resultado añade alguna perspicacia adicional: es un ejercicio directo mostrar que (Problema 3.27)

$$\ell = mr^2\omega \tag{3.18}$$

donde $\omega = \dot{\phi}$ es la velocidad angular del planeta alrededor del Sol. Y es un ejercicio geométrico, igualmente simple, mostrar que el ritmo de barrido de área es

$$dA/dt = \tfrac{1}{2}r^2\omega. \tag{3.19}$$

La comparación de (3.18) y (3.19) muestra que ℓ es constante si y sólo si dA/dt es constante. Esto es, la conservación del momento angular es exactamente equivalente a la segunda ley de Kepler. Además, vemos que a medida que el planeta (o cometa) se aproxima más cerca del Sol (r disminuyendo) su velocidad angular ω necesariamente aumenta. Específicamente, ω es inversamente proporcional a r^2; por ejemplo, si el valor de r en el punto P' es la mitad que en P, entonces la velocidad angular ω en P' es cuatro veces aquella en P.

Es interesante darse cuenta de que nuestra prueba de la segunda ley de Kepler dependía sólo del hecho de que la fuerza gravitatoria es central y por tanto de que el momento angular del planeta alrededor del Sol es constante. Por eso la segunda ley de Kepler es cierta para un objeto que se mueve bajo la influencia de *cualquier* fuerza central. En contraste, veremos en el Capítulo 8 que la primera y la tercera leyes (en particular la primera, que dice que las órbitas son elipses con el Sol situado un foco) dependen de la naturaleza inverso-cuadrada de la fuerza gravitatoria y no son ciertas para otras leyes de fuerza.

3.5 Momento angular para varias partículas

Discutamos ahora un sistema de N partículas, $\alpha = 1, 2, \ldots, N$, cada una con su momento angular $\boldsymbol{\ell}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha$ (con todas las $\mathbf{r}_\alpha$ medidas desde el mismo origen O, por supuesto). Definimos el **momento angular total L** como

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{\ell}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha. \tag{3.20}$$

Diferenciando con respecto a t y usando el resultado (3.16), encontramos que

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{\alpha} \dot{\boldsymbol{\ell}}_\alpha = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha, \tag{3.21}$$

donde, como de costumbre, $\mathbf{F}_\alpha$ denota la fuerza neta sobre la partícula α. Este resultado muestra que la tasa de variación de $\mathbf{L}$ es justo el momento neto sobre el sistema completo, un importante resultado por sí mismo. Sin embargo, mi interés ahora es separar los efectos de las fuerzas internas y externas. Como en la ecuación (1.25) escribimos $\mathbf{F}_\alpha$ como

$$(\text{fuerza neta sobre la partícula } \alpha) = \mathbf{F}_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}_{\alpha\beta} + \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} \tag{3.22}$$

donde, como antes, $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ denota la fuerza ejercida sobre la partícula α por la partícula β, y $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$ es la fuerza neta ejercida sobre la partícula α por todos los agentes exteriores a nuestro sistema de N partículas. Sustituyendo en (3.21), encontramos que

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}. \tag{3.23}$$

La ecuación (3.23) corresponde a la ecuación (1.27) de nuestra anterior discusión del momento lineal del Capítulo 1, y podemos rehacerla casi de la misma manera que aquí, con un giro adicional interesante. Podemos reagrupar los términos de la doble suma, emparejando cada término $\alpha\beta$ con el correspondiente término $\beta\alpha$, para obtener[4]

$$\sum_{\alpha}\sum_{\beta\neq\alpha}\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha}\sum_{\beta>\alpha}(\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_{\alpha\beta} + \mathbf{r}_\beta \times \mathbf{F}_{\beta\alpha}). \tag{3.24}$$

Si suponemos que todas las fuerzas internas cumplen la tercera ley ($\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}_{\beta\alpha}$), entonces podemos reescribir la suma del segundo miembro como

$$\sum_{\alpha}\sum_{\beta>\alpha}(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \times \mathbf{F}_{\alpha\beta}. \tag{3.25}$$

Para entender esta suma, debemos, por ejemplo, examinar el vector $(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) = \mathbf{r}_{\alpha\beta}$. Esto se ilustra en la Figura 3.8, donde vemos que $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$ es el vector que apunta hacia la partícula α desde la partícula β. Si, además, para cumplir la tercera ley, las fuerzas $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ son todas *centrales*, entonces los dos vectores $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$ y $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ apuntan en la misma dirección, y su producto vectorial es cero.

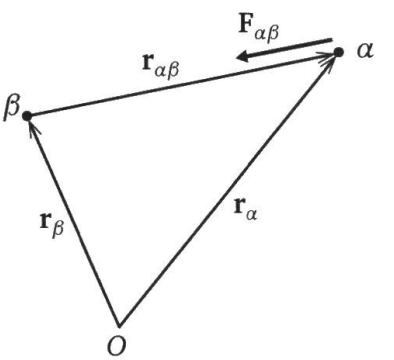


Figura 3.8. El vector $\mathbf{r}_{\alpha\beta} = (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)$ apunta a la partícula α desde la partícula β. Si la fuerza $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ es central (apunta en la línea que une α y β), entonces $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$ y $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ son colineales y su producto vectorial es cero.

Volviendo a la ecuación (3.23), concluimos que, asumiendo que nuestras diferentes suposiciones son válidas, la doble suma en (3.23) es cero. La única suma que queda es justo el momento externo neto, y concluimos que

$$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}}. \tag{3.26}$$

En particular, si el momento externo neto es cero, tenemos el

[4] Asegúrese de que entiende lo que ha pasado aquí. Por ejemplo, he emparejado el término $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}$ con el término $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}$.

Principio de conservación del momento angular

Si el momento externo neto sobre un sistema de N partículas es cero, el momento angular total del sistema $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha$ es constante.

La validez de este principio depende de nuestras dos suposiciones de que todas las fuerzas internas $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ son centrales y cumplen la tercera ley. Como estas suposiciones son casi siempre válidas, el principio (como se ha enunciado) también es válido. Es realmente muy útil para la resolución de muchos problemas, tal como ilustraré brevemente con un par de ejemplos sencillos.

El momento de inercia

Antes de discutir un ejemplo, vale la pena darse cuenta de que el cálculo del momento angular no siempre requiere el uso de la definición básica (3.20). Como probablemente recuerde de un curso de introducción de Física, para un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje fijo (por ejemplo, una rueda que rota sobre su eje fijo), la suma más bien complicada (3.20) se puede expresar en términos del momento de inercia y la velocidad angular de rotación. Específicamente, si tomamos como eje de rotación el eje z, entonces L_z, la componente z del momento angular, es justo $L_z = I\omega$, donde I es el **momento de inercia** del cuerpo para el eje dado, y ω es la velocidad angular de rotación. Demostraremos y generalizaremos este resultado en el Capítulo 10, o se puede también probar con la ayuda del Problema 3.30. De momento, voy a suponer que se ha estudiado ya en algún curso anterior de introducción a la Física. En particular, como probablemente recuerde, los momentos de inercia de varios cuerpos estándar son conocidos. Por ejemplo, para un disco uniforme (masa M, radio R) que rota alrededor de su eje, $I = \frac{1}{2}MR^2$. Para una esfera maciza uniforme que rota alrededor de un diámetro, $I = \frac{2}{5}MR^2$. En general, para cualquier sistema de muchas partículas, $I = \sum m_\alpha \rho_\alpha^2$, donde ρ_α es la distancia a la masa m_α desde el eje de rotación.

Ejemplo 3.3 *Colisión de un trozo de masilla con una plataforma giratoria*

Una plataforma giratoria circular uniforme (de masa M, radio R y centro O) se encuentra en reposo sobre el plano xy y está montada en un eje sin rozamiento, que coincide con el eje z vertical. Tiro un trozo de masilla (masa m) con velocidad v hacia el borde de la plataforma, de tal manera que se aproxima por la línea que pasa a una distancia[5] b de O, como se muestra en la Figura 3.9. Cuando la masilla golpea

[5] En teoría de colisiones (la teoría de colisiones, normalmente entre partículas atómicas o subatómicas) la distancia b se denomina *parámetro de impacto*.

la plataforma, se pega en su borde, y ambas rotan juntas con velocidad angular ω. Hallar ω.

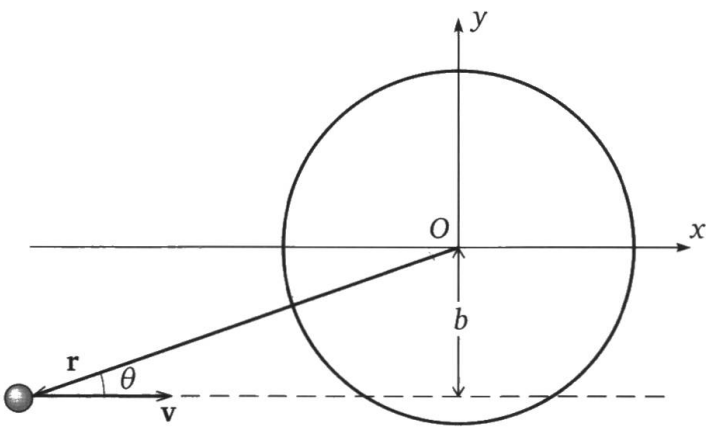


Figura 3.9. Un trozo de masilla de masa m, se lanza con velocidad $\mathbf{v}$ a una plataforma giratoria estacionaria. La línea por la que se aproxima la masilla pasa a una distancia b del centro de la plataforma O.

Este problema se resuelve fácilmente usando la conservación del momento angular. Como la plataforma está colocada sobre un eje sin rozamiento, no existe momento sobre ella en la dirección z. Por lo tanto la componente z del momento externo sobre el sistema es cero, y L_z se conserva. (Esto es cierto incluso si se incluye la gravedad, que actúa en la dirección z y no aporta contribución alguna al momento en la dirección z). Antes de la colisión, la plataforma tiene momento angular cero, mientras que la masilla tiene $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, que apunta en la dirección z. Por tanto el momento angular inicial total tiene componente z

$$L_z^{\text{in}} = \ell_z = r(mv)\,\text{sen}\,\theta = mvb.$$

Después de la colisión, la masilla y la plataforma rotan juntas alrededor del eje z con momento de inercia total[6] $I = (m + M/2)R^2$, y la componente z del momento angular final es $L_z^{\text{fin}} = I\omega$. Por consiguiente, la conservación del momento angular en la forma $L_z^{\text{in}} = L_z^{\text{fin}}$ nos dice que

$$mvb = (m + M/2)R^2\omega,$$

o, resolviendo para ω,

$$\omega = \frac{m}{(m + M/2)} \cdot \frac{vb}{R^2}. \tag{3.27}$$

[6] Este es mR^2 para la masilla pegada a un radio R más $\frac{1}{2}MR^2$ para la plataforma giratoria uniforme.

Esta respuesta no es especialmente interesante. Lo que *es* interesante es que somos capaces de hallarla comparativamente con muy poco esfuerzo. Este hecho, que puede contestar a muchas preguntas muy fácilmente, es típico de las leyes de conservación. El tipo de análisis utilizado aquí se puede usar en muchas situaciones (como reacciones nucleares) donde un proyectil incidente es absorbido por un blanco estacionario y su momento angular es compartido por los dos cuerpos.

Momento angular alrededor del CM

La conservación del momento angular y el resultado más general (3.26), $\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}}$, se dedujeron a partir de la suposición de que todas las cantidades fueron medidas en un sistema de referencia inercial, para poder invocar la segunda ley de Newton. Esto requirió que tanto $\mathbf{L}$ como $\boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}}$ fueran medidos alrededor de un origen O fijo en algún sistema de referencia. Sorprendentemente, los mismos dos resultados también se cumplen si $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}}$ se miden alrededor del centro de masa (incluso si el CM está siendo acelerado y por tanto no está fijo en un sistema inercial. Esto es

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}(\text{alrededor del CM}) = \boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}}(\text{alrededor del CM}) \tag{3.28}$$

y por tanto, si $\boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}}(\text{alrededor del CM}) = 0$, entonces $\mathbf{L}$(alrededor del CM) se conserva. Demostraremos este resultado en el Capítulo 10, o también se puede acudir al Problema 3.37 si se quiere hacer antes. Lo menciono ahora porque proporciona una solución muy simple a varios problemas, tal como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4 *Una mancuerna deslizante y giratoria*

Una mancuerna consistente en dos masas iguales m montadas sobre los extremos de una barra rígida sin masa de longitud $2b$ se encuentra en reposo sobre una mesa horizontal sin rozamiento, apoyada sobre el eje x y centrada en el origen, como muestra la Figura 3.10. En el instante $t = 0$, se le da un pequeño golpe a la masa de la izquierda, en la forma de una fuerza horizontal $\mathbf{F}$ en la dirección y, con una duración corta Δt. Describir el movimiento subsiguiente.

Este problema en realidad tiene dos partes: debemos hallar el movimiento inicial inmediatamente después del impulso, y después el movimiento subsiguiente, en ausencia de fuerzas. El movimiento inicial no es difícil de adivinar, pero deduzcámoslo utilizando las herramientas de este capítulo. La única fuerza externa es la fuerza $\mathbf{F}$ que actúa en la dirección y durante el corto intervalo de tiempo Δt. Como $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{\text{ext}}$, el momento total justo después del impulso es $\mathbf{P} = \mathbf{F}\,\Delta t$. Como $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}$ (con $M = 2m$), concluimos que el CM comienza a moverse directamente hacia arriba por el eje y con velocidad

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}\,\Delta t/2m.$$

Mientras actúa la fuerza **F**, hay un momento $\Gamma^{\text{ext}} = Fb$ alrededor del CM, y así, de acuerdo con (3.28), el momento angular inicial (justo después de que ha cesado el impulso) es $L = Fb\,\Delta t$. Como $L = I\omega$, con $I = 2mb^2$, concluimos que la mancuerna está girando en sentido de las agujas del reloj, con velocidad angular inicial

$$\omega = F\,\Delta t/2mb.$$

La rotación en sentido de las agujas del reloj de la mancuerna significa que la masa de la izquierda se está moviendo hacia arriba con respecto al CM con velocidad ωb, y su velocidad inicial total es

$$v_{\text{izq}} = v_{\text{cm}} + \omega b = F\,\Delta t/m.$$

Por el mismo razonamiento la masa de la derecha se está moviendo hacia abajo con respecto al CM, y su velocidad inicial total es

$$v_{\text{dcha}} = v_{\text{cm}} - \omega b = 0.$$

Esto es, la masa derecha está inicialmente estacionaria, mientras que la izquierda se lleva todo el momento $F\,\Delta t$ del sistema.

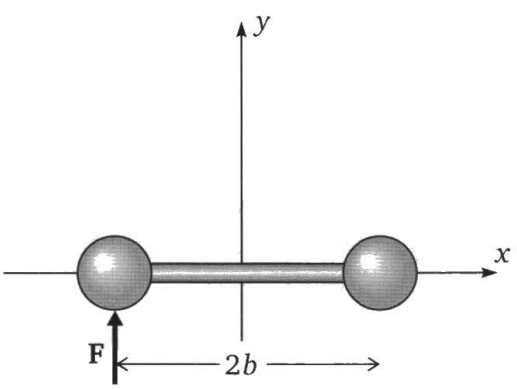


Figura 3.10. Se le da un pequeño toque a la masa izquierda de la mancuerna en la dirección y.

El movimiento subsiguiente es muy claro. Una vez que ha cesado el impulso, no hay fuerzas externas o momentos. Por tanto el CM continúa moviéndose hacia arriba en línea recta por el eje y con velocidad constante, y la mancuerna continúa rotando con momento angular constante alrededor del CM y por tanto con velocidad angular constante.

Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 3

Ecuación de movimiento para un cohete

$$m\dot{v} = -\dot{m}v_{\text{esc}} + F^{\text{ext}}. \qquad \text{[Ecs. (3.6) y (3.29)]}$$

Centro de masa de varias partículas

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \mathbf{r}_\alpha = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + \cdots + m_N\mathbf{r}_N}{M} \qquad \text{[Ec. (3.9)]}$$

donde M es la masa total de todas las partículas, $M = \sum m_\alpha$.

Momento angular

Para una sola partícula con posición $\mathbf{r}$ (relativa a un origen O) y momento $\mathbf{p}$, el momento angular alrededor de O es

$$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \qquad \text{[Ec. (3.14)]}$$

Para varias partículas, el momento angular total es

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{\ell}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha. \qquad \text{[Ec. (3.20)]}$$

Suponiendo que todas las fuerzas internas son centrales

$$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}} \qquad \text{[Ec. (3.26)]}$$

donde $\boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}}$ es el momento externo neto.

Problemas para el Capítulo 3

Los asteriscos indican el nivel aproximado de dificultad, desde los más fáciles (⋆) hasta los más difíciles (⋆ ⋆ ⋆).

Sección 3.1 Conservación del movimiento

3.1 ⋆ Considerar una pistola de masa M (cuando está descargada) que dispara una bala de masa m con velocidad de salida v. (Esto es, la velocidad de la bala con respecto a la pistola es v). Suponiendo que la pistola está completamente libre para retroceder (no hay fuerzas externas sobre la pistola o la bala), usar la conservación del momento para demostrar que la velocidad de la bala con respecto al suelo es $v/(1 + m/M)$.

3.2 ⋆ Un proyectil que se desplaza con velocidad v_0 exactamente horizontal y hacia el norte explota en dos fragmentos de la misma masa. Se observa que justo después de la explosión uno de los fragmentos viaja verticalmente hacia arriba con velocidad v_0. ¿Cuál es la velocidad del otro fragmento?

3.3 ⋆ Un proyectil que viaja con velocidad $\mathbf{v}_0$ explota en tres pedazos de masas iguales. Justo después de la explosión, un pedazo tiene velocidad $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0$ y los otros dos tienen velocidades $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ que son iguales en módulo ($v_2 = v_3$) pero mutuamente perpendiculares. Hallar $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ y esbozar las tres velocidades.

3.4 ⋆⋆ Dos vagabundos, cada uno de masa m_h, están de pie en un extremo de un vagón de tren estacionario con ruedas sin rozamiento y masa m_{fc}. Cada vagabundo puede correr hasta el otro extremo del vagón y saltar fuera con la misma velocidad u (relativa al vagón). **(a)** Usar la conservación del momento para hallar la velocidad del vagón que retrocede si los dos hombres corren y saltan simultáneamente. **(b)** ¿Cuál sería si el segundo hombre no comienza a correr hasta que el primero ya ha saltado? ¿Qué procedimiento le produce mayor velocidad al vagón? [*Ayuda:* La velocidad u es la velocidad de cualquiera de los dos vagabundos, *relativa al vagón* justo después de haber saltado; tiene el mismo valor para ambos hombres y es la misma en las partes (a) y (b)].

3.5 ⋆⋆ Muchas aplicaciones de la conservación del momento incluyen la conservación de la energía también, y no hemos empezado todavía nuestra discusión sobre la energía. Sin embargo, ya sabemos lo suficiente sobre la energía de los cursos de introducción a la física como para manejar algunos problemas de este tipo. He aquí un ejemplo: Un *choque elástico* entre dos cuerpos se define como una colisión en la que la energía cinética total de los dos cuerpos después de la colisión es la misma que la que tenían antes de ella. (Un ejemplo típico es la colisión entre dos bolas de billar, que generalmente pierden muy poco de su energía cinética total). Considerar un choque elástico entre dos cuerpos de igual masa, uno de los cuales está inicialmente en reposo. Sean sus velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2 = 0$ antes de la colisión, y $\mathbf{v}_1'$ y $\mathbf{v}_2'$ después. Escribir la ecuación vectorial que representa la conservación del momento y la ecuación escalar que expresa que la colisión es elástica. Usar ambas para probar que el ángulo entre $\mathbf{v}_1'$ y $\mathbf{v}_2'$ es de 90. Este resultado fue importante en la historia de la física atómica y nuclear: que dos cuerpos emergieran de una colisión siguiendo trayectorias perpendiculares era un dato muy indicativo de que tenían la misma masa y habían sufrido una colisión elástica.

Sección 3.2 Cohetes

3.6 ⋆ En las primeras etapas del lanzamiento del cohete Saturno V, la masa era expulsada a unos 15 000 kg/s, con velocidad $v_{esc} \approx 2500$ m/s relativa al cohete. ¿Cuál fue el empuje sobre el cohete? Convertirlo a toneladas (1 ton $\approx$ 9000 newtons) y compararlo con el peso inicial del cohete (unas 3000 toneladas).

3.7 ⋆ El primer par de minutos del lanzamiento de una nave espacial se puede describir a grandes rasgos como sigue: la masa inicial es 2×10^6 kg, la masa final (después de 2 minutos) es alrededor de 1×10^6 kg, la velocidad media de escape v_{esc} es de unos 3000 m/s, y la velocidad inicial es, por supuesto, cero. Si todo esto estuviera teniendo lugar en el espacio exterior, con gravedad despreciable, ¿cuál sería la velocidad de la nave al final de esta etapa? ¿Cuál es el empuje durante el mismo período y cómo se compara con el peso total inicial de la nave (en la tierra)?

3.8 ⋆ Un cohete (masa inicial m_0) necesita usar sus motores para mantenerse estacionario, justo por encima del suelo. **(a)** Si no puede permitirse quemar más de una masa λm_0 de su combustible, ¿durante cuánto tiempo podrá mantenerse en el aire? [*Ayuda:* Escribir la condición de que el empuje justo equilibra la fuerza de gravedad. Se puede integrar la ecuación resultante separando las variables t y m. Tomar v_{esc} como constante]. **(b)** Si $v_{esc} \approx 3000$ m/s y $\lambda \approx 10\%$, ¿durante cuánto tiempo pudo el cohete mantenerse justo por encima de la superficie de la tierra?

3.9 ⋆ A partir de los datos del Problema 3.7 se puede hallar la masa inicial de la nave espacial y el ritmo de expulsión de masa $-\dot{m}$ (el cual se puede suponer constante). ¿Cuál es la mínima velocidad de escape v_{esc} para la cual la nave justo empezaría a elevarse tan pronto como la combustión esté completamente en marcha? [*Ayuda:* El empuje debe por lo menos equilibrar el peso de la nave].

3.10 ⋆ Considerar un cohete (masa inicial m_0) que se acelera desde el reposo en el espacio libre. Al principio, a medida que se acelera, su momento p aumenta, pero, como su masa m disminuye, p finalmente empieza a decrecer. ¿Para qué valor de m es p máximo?

3.11 ⋆⋆ **(a)** Considerar un cohete que viaja en línea recta sometido a una fuerza externa F^{ext} que actúa a lo largo de la misma recta. Mostrar que la ecuación de movimiento es

$$m\dot{v} = -\dot{m}v_{\text{esc}} + F^{\text{ext}}. \tag{3.29}$$

[Repasar la deducción de la Ecuación (3.6) pero mantener el término de la fuerza externa]. **(b)** Particularizar para el caso de un cohete que despega verticalmente (desde el reposo) en un campo gravitatorio g, de manera que la ecuación de movimiento se convierte en

$$m\dot{v} = -\dot{m}v_{\text{esc}} - mg. \tag{3.30}$$

Suponer que el cohete expulsa masa a un ritmo constante, $\dot{m} = -k$ (donde k es una constante positiva), de tal manera que $m = m_0 - kt$. Resolver la ecuación (3.30) para v como una función de t, utilizando separación de variables (esto es, reescribiendo la ecuación para que todos los términos que tengan v aparezcan en la izquierda y todos los que tengan t en la derecha). **(c)** Usando los datos aproximados del Problema 3.7, hallar la velocidad de la nave espacial a los dos minutos de vuelo, suponiendo (lo cual es casi cierto) que se desplaza verticalmente hacia arriba durante este período y que g no cambia apreciablemente. Comparar con el resultado correspondiente si no hubiera gravedad. **(d)** Describir qué le pasaría a un cohete diseñado para que el primer término de la Ecuación (3.30) fuera menor que el valor inicial del segundo.

3.12 ⋆⋆ Para ilustrar el uso de un cohete de varias etapas, considerar lo siguiente: **(a)** Un determinado cohete transporta un 60% de su masa inicial como combustible. (Esto es, la masa de combustible es $0{,}6m_0$). ¿Cuál es la velocidad final del cohete que se acelera desde el reposo en el espacio libre si quema todo su combustible en una sola etapa? Expresar la respuesta como un múltiplo de v_{esc}. **(b)** Suponer que el cohete quema el combustible en dos etapas de la siguiente manera: en la primera etapa quema una masa de $0{,}3m_0$ de combustible; entonces expulsa el depósito de combustible de la primera etapa, que tiene una masa de $0{,}1m_0$, y luego quema el restante $0{,}3m_0$ de combustible. Hallar la velocidad final en este caso, suponiendo el mismo valor de v_{esc} todo el rato, y comparar las respuestas.

3.13 ⋆⋆ Si no se ha hecho ya, hacer el Problema 3.11(b) y encontrar la velocidad $v(t)$ de un cohete que se acelera verticalmente desde el reposo en un campo gravitatorio g. Después integrar $v(t)$ y mostrar que el peso del cohete en función del tiempo t es

$$y(t) = v_{\text{esc}}t - \frac{1}{2}gt^2 - \frac{mv_{\text{esc}}}{k}\ln\left(\frac{m_0}{m}\right).$$

Usando los números dados en el Problema 3.7, estimar el peso de la nave espacial después de dos minutos.

3.14 ⋆⋆ Considerar un cohete sometido a una fuerza lineal resistiva, $\mathbf{f} = -b\mathbf{v}$, pero a ninguna otra fuerza más. Usar la Ecuación (3.29) del Problema 3.11 para mostrar que si el cohete empieza desde el reposo y expulsa masa a un ritmo constante $k = -\dot{m}$, entonces su velocidad está dada por

$$v = \frac{k}{b}v_{\text{esc}}\left[1 - \left(\frac{m}{m_0}\right)^{b/k}\right].$$

Sección 3.3 El centro de masa

3.15 ⋆ Encontrar la posición del centro de masa de tres partículas que están sobre el plano xy en $\mathbf{r}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{r}_2 = (1,-1,0)$ y $\mathbf{r}_3 = (0,0,0)$, si $m_1 = m_2$ y $m_3 = 10m_1$. Ilustrar la respuesta con un esquema y comentar.

3.16 ⋆ Las masas de la Tierra y del Sol son $M_{\text{T}} \approx 6{,}0 \times 10^{24}$ y $M_{\text{S}} \approx 2{,}0 \times 10^{30}$ (ambas en kg) y su distancia de centro a centro es $1{,}5 \times 10^8$ km. Hallar la posición de su CM y comentar. (El radio del Sol es $R_{\text{S}} \approx 7{,}0 \times 10^5$ km).

3.17 ⋆ Las masas de la Tierra y la Luna son $M_T \approx 6{,}0 \times 10^{24}$ y $M_L \approx 7{,}4 \times 10^{22}$ (ambas en kg) y su distancia de centro a centro es $3{,}8 \times 10^5$ km. Hallar la posición de su CM y comentar. (El radio de la Tierra es $R_T \approx 6{,}4 \times 10^3$ km).

3.18 ⋆⋆ **(a)** Probar que el CM de cualesquiera dos partículas siempre está situado en la línea que las une, tal como ilustra la Figura 3.3. [Escribir el vector que apunta desde m_1 al CM y mostrar que tiene la misma dirección que el vector desde m_1 a m_2]. **(b)** Probar que las distancias desde el CM a m_1 y m_2 están en la proporción m_2/m_1. Explicar por qué si m_1 es mucho mayor que m_2, el CM está muy cerca de la posición de m_1.

3.19 ⋆⋆ **(a)** Sabemos que la trayectoria de un proyectil lanzado desde el suelo es una parábola (si ignoramos la resistencia del aire). A la luz del resultado (3.12), ¿cuál sería la trayectoria subsiguiente del CM de los pedazos si el proyectil explotase en medio del aire? **(b)** Se dispara un proyectil desde el nivel del suelo para acertar en un objetivo que está a 100 m. Desafortunadamente el proyectil explota prematuramente y se rompe en dos trozos iguales. Los dos trozos aterrizan al mismo tiempo, y uno lo hace 100 m más allá del objetivo. ¿Dónde aterriza el otro trozo? **(c)** ¿Es cierto el mismo resultado si aterrizan en instantes diferentes (con un trozo que aterriza también 100 m más allá del objetivo)?

3.20 ⋆⋆ Considerar un sistema compuesto por dos cuerpos extensos con masas M_1 y M_2 y centros de masa en $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$. Probar que el CM del sistema completo está en

$$\mathbf{R} = \frac{M_1\mathbf{R}_1 + M_2\mathbf{R}_2}{M_1 + M_2}.$$

Este bonito resultado significa que para encontrar el CM de un sistema complicado se puede tratar sus partes constituyentes como si fueran masas puntuales posicionadas en sus centros de masa separados (incluso cuando las partes constituyentes son ellas mismas cuerpos extensos).

3.21 ⋆⋆ Una lámina de metal uniforme se corta en la forma de un semicírculo de radio R y está situada en el plano xy con su centro en el origen y el diámetro en el eje x. Hallar la posición del CM usando coordenadas polares. [En este caso la suma (3.9) que define la posición del CM se convierte en una integral de dos dimensiones de la forma $\int \mathbf{r}\sigma\, dA$ donde σ denota la densidad superficial de masa (masa/área) de la lámina y dA es el elemento de área $dA = r\, dr\, d\phi$].

3.22 ⋆⋆ Utilizar coordenadas polares esféricas r, θ, ϕ para encontrar el CM de un hemisferio macizo uniforme de radio R, cuya cara plana se apoya en el plano xy con su centro en el origen. Antes de hacer esto, es necesario comprobar que el elemento de volumen en coordenadas esféricas es $dV = r^2 dr \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$. (Las coordenadas polares esféricas se definen en la Sección 4.8. Si no se está familiarizado con estas coordenadas, no se debería intentar hacer este problema todavía).

3.23 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Se lanza una granada con velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ desde el origen en lo alto de un precipicio elevado, sometida a resistencia del aire despreciable. **(a)** Usando un programa de gráficos conveniente, representar el movimiento, con los siguientes parámetros: $\mathbf{v}_0 = (4, 4)$, $g = 1$, y $0 \le t \le 4$ (y con x medida horizontalmente e y verticalmente hacia arriba). Añadir al gráfico marcas apropiadas (puntos o cruces, por ejemplo) para mostrar las posiciones de la granada en $t = 1, 2, 3, 4$. **(b)** En $t = 4$, cuando la velocidad de la granada es $\mathbf{v}$, explota en dos pedazos iguales, uno de los cuales se aleja con velocidad $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$. ¿Cuál es la velocidad del otro pedazo? **(c)** Suponiendo que $\Delta\mathbf{v} = (1, 3)$, añadir al gráfico original las trayectorias de los dos pedazos para $4 \le t \le 9$. Añadir marcas para mostrar sus posiciones en $t = 5, 6, 7, 8, 9$. Encontrar alguna manera de mostrar claramente que el CM de los dos pedazos continúa por la trayectoria parabólica original.

Sección 3.4 Momento angular para una única partícula

3.24 ⋆ Si los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ forman dos de los lados de un triángulo, probar que $\frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ es igual al área del triángulo.

3.25 ⋆ Una partícula de masa m se desplaza sobre una mesa horizontal sin rozamiento y está sujeta a un extremo de una cuerda sin masa. La cuerda pasa por un agujero de la mesa de tal

manera que yo la estoy sujetando por el otro extremo. Inicialmente la partícula describe un círculo de radio r_0 con velocidad angular ω_0, pero en un momento dado tiro de la cuerda a través del agujero hasta que un trozo de cuerda de longitud r permanece entre el agujero y la partícula. ¿Cuál es la velocidad angular de la partícula ahora?

3.26 ⋆ Una partícula se desplaza bajo la influencia de una fuerza central dirigida hacia un origen fijo O. **(a)** Explicar por qué el momento angular de la partícula alrededor de O es constante. **(b)** Dar en detalle el argumento de que la órbita de la partícula debe estar en un único plano que contiene a O.

3.27 ⋆⋆ Considerar un planeta que orbita alrededor del Sol, que está fijo. Tomar como plano de la órbita del planeta el xy, con el Sol en el origen, y representar la posición del planeta en coordenadas polares (r, ϕ). **(a)** Mostrar que el momento angular del planeta tiene de módulo $\ell = mr^2\omega$, donde $\omega = \dot{\phi}$ es la velocidad angular del planeta alrededor del Sol. **(b)** Mostrar que el ritmo al que el planeta «barre área» (como en la segunda ley de Kepler) es $dA/dt = \frac{1}{2}r^2\omega$, y por lo tanto $dA/dt = \ell/2m$. Deducir la segunda ley de Kepler.

Sección 3.5 Momento angular para varias partículas

3.28 ⋆ Para un sistema de sólo tres partículas, desarrollar en detalle el argumento que conduce desde (3.20) a (3.26), $\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}}$, escribiendo todas las sumas explícitamente.

3.29 ⋆ Un asteroide esférico de radio R_0 está girando con velocidad angular ω_0. Con el paso de los siglos, va recogiendo materia hasta que su radio es R. Suponiendo que su densidad permanece constante y que la materia adicional estaba originariamente en reposo relativo al asteroide (al menos en promedio), hallar la nueva velocidad angular del asteroide. (Se sabe de física elemental que el momento de inercia es $\frac{2}{5}MR^2$). ¿Cuál es la velocidad angular final si se dobla el radio?

3.30 ⋆⋆ Considerar un cuerpo rígido que rota con velocidad angular ω alrededor de un eje fijo. (Se puede pensar en una puerta que rota alrededor del eje definido por sus bisagras). Tomar el eje de rotación como el eje z y usar coordenadas polares cilíndricas $\rho_\alpha, \phi_\alpha, z_\alpha$ para especificar las posiciones de las partículas $\alpha = 1, \ldots, N$ que forman el cuerpo. **(a)** Mostrar que la velocidad de la partícula α es $\rho_\alpha\omega$ en la dirección ϕ. **(b)** Mostrar entonces que la componente z del momento angular ℓ_α de la partícula α es $m_\alpha\rho_\alpha^2\omega$. **(c)** Mostrar que la componente z L_z del momento angular total se puede escribir como $L_z = I\omega$ donde I es el momento de inercia (para el eje en cuestión),

$$I = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \rho_\alpha^2. \tag{3.31}$$

3.31 ⋆⋆ Un disco uniforme de masa M y radio R rota alrededor de su eje. Hallar su momento de inercia mediante la sustitución de la suma (3.31) por la integral apropiada y evaluándola en coordenadas polares.

3.32 ⋆⋆ Mostrar que el momento de inercia de una esfera maciza uniforme que rota alrededor de un diámetro es $\frac{2}{5}MR^2$. La suma (3.31) se debe sustituir por una integral, la cual es más fácil en coordenadas polares esféricas, con el eje z tomado como eje de rotación. El elemento de volumen es $dV = r^2 dr \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$. (Las coordenadas polares esféricas definidas en la Sección 4.8. Si no se está familiarizado con estas coordenadas, no se debería intentar hacer este problema todavía).

3.33 ⋆⋆ Comenzando desde la suma (3.31) y sustituyéndola por la integral apropiada, encontrar el momento de inercia de un cuadrado uniforme $2b$, que rota alrededor de un eje perpendicular al cuadrado y que pasa por su centro.

3.34 ⋆⋆ Un malabarista está jugando con una vara uniforme que tiene uno de sus extremos recubierto de alquitrán y está ardiendo. Sujeta la vara por el lado contrario y la lanza hacia arriba de tal manera que, en el momento de soltarla, está horizontal, su CM se desplaza verticalmente hacia arriba con velocidad v_0 y está rotando con velocidad angular ω_0. Para cogerla, quiere conseguir que cuando le vuelva a la mano haya realizado un número entero de rotaciones completas. ¿Cuál debería ser v_0, si la maza debe haber hecho exactamente n rotaciones cuando le vuelva a la mano?

3.35 ⋆⋆ Considerar un disco macizo uniforme de masa M y radio R, y que rueda sin deslizar por un plano inclinado que forma un ángulo γ con la horizontal. El punto instantáneo de contacto entre el disco y el plano inclinado se llama P. **(a)** Dibujar un diagrama de cuerpo libre que muestre todas las fuerzas que actúan sobre el disco. **(b)** Hallar la aceleración lineal $\dot{v}$ del disco aplicando el resultado $\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}}$ para la rotación alrededor de P. (Recordar que $L = I\omega$ y el momento de inercia para la rotación alrededor de un punto de la circunferencia es $\frac{3}{2}MR^2$. La condición de que el disco no deslice es que $v = R\omega$ y por tanto $\dot{v} = R\dot{\omega}$). **(c)** Deducir el mismo resultado aplicando $\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}}$ a la rotación alrededor del CM. (En este caso se verá que hay una incógnita extra, la fuerza de rozamiento. Se puede eliminar aplicando la segunda ley de Newton al movimiento del CM. El momento de inercia para la rotación alrededor del CM es $\frac{1}{2}MR^2$).

3.36 ⋆⋆ Repetir los cálculos del Ejemplo 3.4 (página 107) para el caso en el que la fuerza $\mathbf{F}$ actúa en dirección nordeste formando un ángulo γ con el eje x. ¿Cuáles son las velocidades de las dos masas justo después de aplicar el impulso? Comprobar las respuestas para los casos de $\gamma = 0$ y $\gamma = 90°$.

3.37 ⋆⋆⋆ Un sistema consiste en N masas m_α en las posiciones $\mathbf{r}_\alpha$ relativas a un origen fijo O. Sirva $\mathbf{r}'_\alpha$ para denotar la posición de m_α relativa al CM; esto es, $\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{R}$. **(a)** Hacer un esquema para ilustrar esta última ecuación. **(b)** Probar la útil relación $\sum m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha = 0$. ¿Es posible explicar por qué esta relación es casi obvia? **(c)** Usar esta relación para probar el resultado (3.28) que dice que la tasa de variación del momento angular *alrededor del CM* es igual al momento externo total alrededor del CM. (Este resultado es sorprendente porque el CM puede estar acelerándose, de tal manera que no es necesariamente un punto fijo en algún sistema inercial).

CAPÍTULO 4

Energía

Este capítulo trata sobre la conservación de la energía. Veremos que el análisis de la conservación de la energía es sorprendentemente más complicado que las correspondientes discusiones acerca del momento lineal y el angular del Capítulo 3. El principal motivo de esta diferencia es el siguiente: en casi todos los problemas de mecánica clásica sólo existe un tipo de momento lineal ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ para cada partícula), y un tipo de momento angular ($\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ para cada partícula). En contraste, la energía llega de importantes y diferentes maneras: cinética, varios tipos de potencial, térmica y más, y son los procesos que transforman la energía de una en otra los que complican el uso de la conservación de la energía. Veremos que la conservación de la energía es un asunto muy sutil, incluso para un sistema de una sola partícula. Una manifestación de la relativa dificultad para la discusión de la energía es que necesitaremos algunas herramientas nuevas, como el cálculo de vectores, principalmente, y los conceptos de gradiente y rotacional. Iré introduciendo estas importantes ideas a medida que las vayamos necesitando.

4.1 Energía cinética y trabajo

Como ya he dicho, hay muchas clases de energía. Quizá la más básica sea la **energía cinética** (o EC), que para una única partícula de masa m que viaja a una velocidad v se define como

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2. \tag{4.1}$$

Imaginemos que la partícula se mueve por el espacio y observemos la variación en su energía cinética al moverse entre dos puntos vecinos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}$ de su trayectoria,

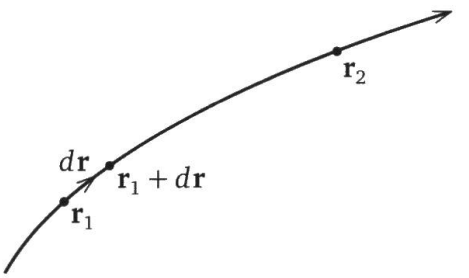


Figura 4.1. Tres puntos en el camino de una partícula: $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}$ (con $d\mathbf{r}$ infinitesimal) y $\mathbf{r}_2$.

como se muestra en la Figura 4.1. La derivada del tiempo de T se evalúa fácilmente si observamos que $v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$, para que

$$\frac{dT}{dt} = \tfrac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}m(\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}) = m\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}. \tag{4.2}$$

Según la segunda ley, el factor $m\dot{\mathbf{v}}$ es igual a la fuerza neta $\mathbf{F}$ sobre la partícula, de manera que

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}. \tag{4.3}$$

Si multiplicamos ambos miembros por dt, entonces, ya que $\mathbf{v}\,dt$ es el desplazamiento $d\mathbf{r}$, encontramos que

$$dT = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{4.4}$$

La expresión del segundo miembro, $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, se define como **el trabajo realizado por la fuerza F** en el desplazamiento $d\mathbf{r}$. Por lo tanto hemos demostrado el **teorema Trabajo-EC**, que la variación en la energía cinética de la partícula entre dos puntos vecinos de su trayectoria es igual al trabajo realizado por la fuerza neta al moverse entre los dos puntos.[1]

Hasta ahora hemos demostrado el teorema Trabajo-EC sólo para un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}$, pero puede extrapolarse a desplazamientos más grandes.

---

[1] Dos cuestiones que al principio pueden confundirnos: el trabajo $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ puede ser *negativo*, si por ejemplo $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$ apuntan en direcciones opuestas. Aunque la noción de fuerza que realiza un trabajo negativo entra en conflicto con nuestra noción común de trabajo, es perfectamente coherente con la definición del físico: una fuerza en sentido opuesto al desplazamiento *reduce* la EC, así que, por el teorema Trabajo-EC, el trabajo correspondiente ha de ser negativo. Además, si $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$ son perpendiculares, entonces el trabajo $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es cero. De nuevo esto entra en conflicto con nuestra habitual idea de trabajo, pero es coherente con la definición del físico: una fuerza perpendicular al desplazamiento no cambia la EC.

Consideremos los dos puntos representados como $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ en la Figura 4.1. Podemos dividir el camino entre los puntos 1 y 2 en una gran cantidad de pequeños segmentos a cada uno de los cuales podemos aplicar el resultado infinitesimal (4.4). Sumando todos estos resultados, encontramos que la variación total de T al ir de 1 a 2, es la suma $\sum \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ de todos los trabajos infinitesimales realizados en todos los desplazamientos infinitesimales entre los puntos 1 y 2:

$$\Delta T \equiv T_2 - T_1 = \sum \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{4.5}$$

En el límite en que todos los desplazamientos $d\mathbf{r}$ tienden a cero, esta suma se convierte en una integral:

$$\sum \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \to \int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{4.6}$$

Esta integral, denominada **integral de línea**,[2] es una generalización de la integral $\int f(x)\,dx$ sobre una única variable x, y su definición como límite de la suma de muchos fragmentos pequeños es completamente análoga. Si tiene alguna duda sobre el símbolo $\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ situado a la derecha en (4.6), piense en ello simplemente como la suma de la izquierda (con todos los desplazamientos infinitesimalmente pequeños). Al evaluar la integral de línea, se suele poder convertir en una integral ordinaria en una única variable, como muestran los siguientes ejemplos. Observe que, tal y como su propio nombre sugiere, la integral de línea depende (en general) del camino que la partícula siguió del punto 1 al punto 2. La integral de línea que está a la derecha en (4.6) se denomina **trabajo realizado por la fuerza F** al moverse entre los puntos 1 y 2 a lo largo del camino en cuestión.

Ejemplo 4.1 *Tres integrales de línea*

Evaluar la integral de línea para el trabajo realizado por la fuerza bidimensional $\mathbf{F} = (y, 2x)$ cuando se desplaza desde el origen O hasta el punto $P = (1,1)$ a lo largo de cada uno de los tres caminos mostrados en la Figura 4.2. El camino a va desde O hasta $Q = (1,0)$ a lo largo del eje x y después desde Q en línea recta hacia arriba hasta P, el camino b va directo desde O hasta P a lo largo de la línea $y = x$, y el camino c gira un cuarto de círculo centrado en Q.

La integral a lo largo del camino a se calcula con facilidad en dos partes, si nos fijamos que en OQ los desplazamientos tienen la forma $d\mathbf{r} = (dx, 0)$, mientras

[2] No es un nombre muy atractivo para aquellos de nosotros que pensamos en una línea como algo recto. Sin embargo, existen líneas curvas además de rectas, y en general, una integral de línea puede contener una línea curva, como el camino mostrado en la Figura 4.1.

que en QP son $d\mathbf{r} = (0, dy)$. Por lo tanto

$$W_a = \int_a \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_O^Q \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_Q^P \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 F_x(x,0)\,dx + \int_0^1 F_y(1,y)\,dy$$

$$= 0 + 2\int_0^1 dy = 2.$$

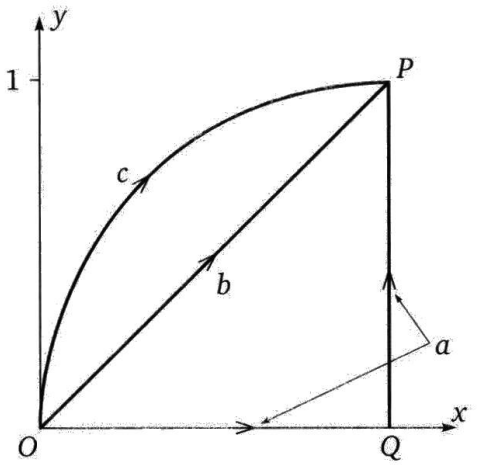


Figura 4.2. Tres caminos diferentes, a, b y c, desde el origen hasta el punto $P = (1,1)$.

En el camino b, $x = y$, para que $dx = dy$, y

$$W_b = \int_b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_b (F_x\,dx + F_y\,dy) = \int_0^1 (x + 2x)dx = 1{,}5.$$

El camino c se expresa muy convenientemente en forma paramétrica como

$$\mathbf{r} = (x, y) = (1 - \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

donde θ es el ángulo entre OQ y la línea desde Q hasta el punto (x, y), con $0 \le \theta \le \pi/2$. Por lo tanto en el camino c

$$d\mathbf{r} = (dx, dy) = (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\,d\theta$$

y

$$W_c = \int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_c (F_x\,dx + F_y\,dy)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\operatorname{sen}^2\theta + 2(1 - \cos\theta)\cos\theta\right] d\theta = 2 - \pi/4 = 1{,}21.$$

Pueden encontrase algunos ejemplos más en los Problemas 4.2 y 4.3 y, si nunca ha estudiado las integrales de línea, quizá pueda comenzar probando con alguno de ellos.

Con la notación de la integral de línea podemos reescribir el resultado (4.5) como

$$\Delta T \equiv T_2 - T_1 = \int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \equiv W(1 \to 2) \tag{4.7}$$

donde he introducido la notación $W(1 \to 2)$ para el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al moverse desde el punto 1 hasta el punto 2. El resultado es el **teorema Trabajo-EC** para desplazamientos arbitrarios, grandes o pequeños: la variación en la EC de una partícula mientras se mueve entre los puntos 1 y 2 es el trabajo realizado por la fuerza neta.

Es importante recordar que el trabajo que aparece a la derecha en (4.7) es el trabajo realizado por la *fuerza neta* $\mathbf{F}$ sobre la partícula. En general, $\mathbf{F}$ es la suma vectorial de varias fuerzas separadas

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \cdots + \mathbf{F}_n \equiv \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i.$$

(Por ejemplo, la fuerza neta sobre un proyectil es la suma de dos fuerzas, el peso y la resistencia del aire). Para evaluar el trabajo realizado por la fuerza neta $\mathbf{F}$, podemos sencillamente sumar los trabajos realizados por las fuerzas separadas $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$. Esta afirmación se demuestra de manera sencilla:

$$W(1 \to 2) = \int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r} = \sum_i W_i(1 \to 2). \tag{4.8}$$

El paso crucial, desde la primera línea hasta la segunda, se justifica porque la integral de una suma de n términos es igual a la suma de n integrales individuales. El teorema Trabajo-EC puede por tanto reescribirse como

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^{n} W_i(1 \to 2). \tag{4.9}$$

En la práctica, casi siempre se interpreta el teorema de la siguiente manera: calcular el trabajo W_i realizado sobre la partícula por cada una de las n fuerzas separadas y después establecer que ΔT es igual a la suma de todas las W_i.

Si la fuerza neta sobre una partícula es cero, entonces el teorema del Trabajo-EC nos dice que la energía cinética de una partícula es constante. Esto es, nos dice sencillamente que la velocidad v es constante, cosa que aunque cierta, no resulta muy interesante, ya que se deduce de la primera ley de Newton.

4.2 Energía potencial y fuerzas conservativas

El siguiente paso en el desarrollo del formalismo de la energía es introducir la noción de energía potencial (o EP) correspondiente a las fuerzas que actúan sobre un objeto. Como probablemente recuerde, no todas las fuerzas se prestan a la definición de una energía potencial correspondiente. Aquellas fuerzas especiales que sí tienen una energía potencial correspondiente (con las propiedades requeridas) se denominan *fuerzas conservativas*, y debemos también hablar de las propiedades que distinguen las fuerzas conservativas de las no conservativas. Más concretamente, encontraremos que existen dos condiciones previas que una fuerza debe satisfacer para ser considerada conservativa.

Para simplificar nuestra discusión, supongamos primero que sólo actúa una fuerza sobre el objeto de interés: la fuerza gravitatoria de un sol sobre su planeta, o la fuerza eléctrica $q\mathbf{E}$ sobre una carga en un campo eléctrico (sin la presencia de ninguna otra fuerza). La fuerza $\mathbf{F}$ puede depender de muchas y muy variadas variables, a saber: de la posición del objeto $\mathbf{r}$ (cuanto más lejos se encuentra el planeta de su sol, más débil es la atracción gravitatoria); de la velocidad del objeto, como en el caso de la resistencia del aire; y del tiempo t, como sería el caso de una carga situada en un campo eléctrico con variación temporal. Por último, si la fuerza la ejercen humanos, dependerá de una infinidad de imponderables (lo cansados que se encuentren, si están bien colocados para empujar, etcétera).

La primera condición para que una fuerza $\mathbf{F}$ sea conservativa es que dependa sólo de la posición $\mathbf{r}$ del objeto sobre el cual actúa; no debe depender de la velocidad, ni del tiempo ni de cualquiera de las variables salvo $\mathbf{r}$. Esto suena bastante restrictivo, y de hecho lo es, pero existen muchas fuerzas que poseen esta propiedad. Por ejemplo, la fuerza gravitatoria de un sol sobre un planeta (posición $\mathbf{r}$ relativa al sol) puede escribirse como

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GmM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

lo cual demuestra que sólo depende de la variable $\mathbf{r}$. (Los parámetros m y M, y por supuesto la constante gravitatoria G, son constantes para un planeta y un sol dados). De manera similar, la fuerza electrostática $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ sobre una carga q junto a un campo electrostático $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ posee esta propiedad. Entre las fuerzas que no cumplen esta condición están la fuerza de la resistencia del aire (que depende de la velocidad), el rozamiento (que depende de la dirección del movimiento), la fuerza magnética (que depende de la velocidad), y la fuerza de un campo eléctrico con variación temporal $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (que obviamente depende del tiempo).

La segunda condición que una fuerza debe satisfacer para poder ser llamada conservativa, tiene que ver con el trabajo realizado por la fuerza sobre un objeto que se mueve entre dos puntos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ (baste con decir 1 y 2),

$$W(1 \to 2) = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{4.10}$$

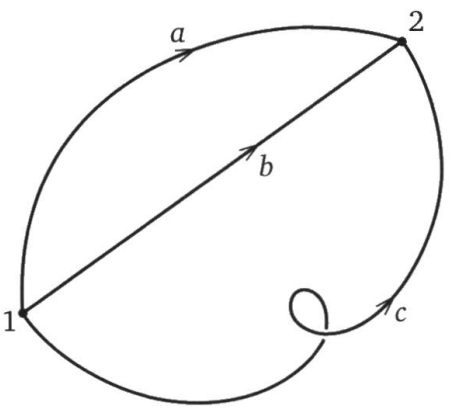


Figura 4.3. Tres caminos diferentes, a, b y c, que unen los mismos dos puntos, 1 y 2.

La Figura 4.3 muestra dos puntos, 1 y 2, y los tres diferentes caminos que los unen. Es totalmente posible que el trabajo realizado entre los puntos 1 y 2, tal y como lo define la integral (4.10), tenga diferentes valores según cuál de los tres caminos, a, b o c, siga la partícula. Por ejemplo, consideremos la fuerza de rozamiento por deslizamiento al empujar un pesado cajón por el suelo. Esta fuerza tiene una magnitud constante, digamos F_r, y siempre es opuesta a la dirección del movimiento. Por lo tanto el trabajo realizado por el rozamiento mientras el cajón se mueve de 1 a 2 viene dado por (4.10)

$$W_r(1 \to 2) = -F_r L,$$

donde L denota la longitud camino elegido. Los tres caminos de la Figura 4.3 tienen longitudes diferentes, y $W_r(1 \to 2)$ tendrá un valor diferente para cada uno de los tres caminos.

Por otra parte, existen fuerzas que poseen la propiedad por la cual el trabajo $W(1 \rightarrow 2)$ es el mismo para *cualquier* camino que enlace los puntos 1 y 2. Un ejemplo de una fuerza con esta propiedad es la fuerza gravitatoria, $\mathbf{F}_{\text{grav}} = m\mathbf{g}$, de la Tierra sobre un objeto cercano a su superficie. Resulta fácil demostrar (Problema 4.5) que, debido a que $\mathbf{g}$ es un vector constante, que apunta verticalmente hacia abajo, el trabajo realizado en este caso es

$$W_{\text{grav}}(1 \rightarrow 2) = -mgh, \tag{4.11}$$

donde h es justo la altura vertical alcanzada entre los puntos 1 y 2. Este trabajo es el mismo para *cualquiera* de los caminos entre dichos puntos 1 y 2. Esta propiedad, que el trabajo que realiza es independiente del camino, es la segunda condición que debe satisfacer una fuerza para ser considerada conservativa. Y ahora ya estamos listos para afirmar las dos condiciones:

Condiciones para que una fuerza sea conservativa

Una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre una partícula es **conservativa** si y solo si cumple dos condiciones:

(i) $\mathbf{F}$ depende sólo de la posición de la partícula $\mathbf{r}$ (y no de la velocidad $\mathbf{v}$, ni del tiempo t, ni de cualquier otra variable); esto es, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$.
(ii) Para cualesquiera dos puntos 1 y 2, el trabajo $W(1 \rightarrow 2)$ realizado por $\mathbf{F}$ es el mismo para cualquiera de los caminos entre 1 y 2.

La razón del nombre «conservativo» y de la importancia del concepto es ésta: si todas las fuerzas que actúan sobre un objeto son conservativas, podemos definir una magnitud llamada energía potencial (o sencillamente EP), denotada por $U(\mathbf{r})$, una función sólo de la posición, con la propiedad de que la energía mecánica total

$$E = \text{EC} + \text{EP} = T + U(\mathbf{r}) \tag{4.12}$$

es constante; esto es, E se *conserva*.

Para definir la energía potencial $U(\mathbf{r})$ correspondiente a una fuerza conservativa dada, elegimos primero un punto de referencia $\mathbf{r}_0$ en el que U se define como cero. (Por ejemplo, en el caso de la gravedad cerca de la superficie de la Tierra, muchas veces se define U como cero al nivel del suelo). Definimos entonces $U(\mathbf{r})$, la **energía potencial** en un punto arbitrario $\mathbf{r}$, como[3]

[3] Advierta que he llamado a la variable de integración $\mathbf{r}'$ para evitar la confusión con el límite superior $\mathbf{r}$.

$$U(\mathbf{r}) = -W(\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r}) \equiv -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}'. \tag{4.13}$$

En palabras, $U(\mathbf{r})$ es el opuesto del trabajo realizado por $\mathbf{F}$ si la partícula se mueve desde el punto de referencia $\mathbf{r}_0$ hasta el punto de interés $\mathbf{r}$, como en la Figura 4.4. (En breve veremos la razón del signo menos). Advierta que la definición (4.13) sólo tiene sentido debido a la propiedad (ii) de las fuerzas conservativas. Si la integral de trabajo en (4.13) fuera diferente para distintos caminos, entonces (4.13) no definiría una única función[4] $U(\mathbf{r})$.

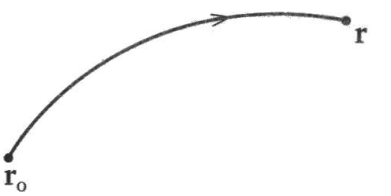


Figura 4.4. La energía potencial $U(\mathbf{r})$ en cualquier punto $\mathbf{r}$ se define como el opuesto del trabajo realizado por $\mathbf{F}$ si la partícula se mueve desde el punto de referencia $\mathbf{r}_0$ hasta $\mathbf{r}$. Esto proporciona una función bien definida $U(\mathbf{r})$ sólo si este trabajo es independiente del camino seguido, esto es, la fuerza es conservativa.

Ejemplo 4.2 *Energía potencial de una carga en un campo eléctrico uniforme*

Se coloca una carga q en un campo eléctrico uniforme que apunta en la dirección x con magnitud E_0, de tal manera que la fuerza sobre q es $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = qE_0\hat{\mathbf{x}}$. Mostrar que esta fuerza es conservativa y hallar la energía potencial correspondiente.

El trabajo realizado por $\mathbf{F}$ entre cualesquiera dos puntos 1 y 2 a lo largo de cualquier camino es

$$W(1 \to 2) = \int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = qE_0 \int_1^2 \hat{\mathbf{x}}\cdot d\mathbf{r} = qE_0 \int_1^2 dx = qE_0(x_2 - x_1). \tag{4.14}$$

Esto depende sólo de los puntos inicial y final 1 y 2. (De hecho depende sólo de sus coordenadas x, x_1 y x_2). Ciertamente, es independiente del camino, y la fuerza es conservativa. Para definir la energía potencial correspondiente $U(\mathbf{r})$, debemos tomar

[4] La definición (4.13) también depende de la propiedad (i) de las fuerzas conservativas, pero de una manera ligeramente sutil. Si $\mathbf{F}$ dependiera de otra variable aparte de $\mathbf{r}$ (como por ejemplo t o $\mathbf{v}$), entonces el lado derecho de (4.13) dependería de cuándo o cómo la partícula se movió desde $\mathbf{r}_0$ hasta $\mathbf{r}$, y de nuevo no estaría definida unívocamente $U(\mathbf{r})$.

primero un punto de referencia $\mathbf{r}_0$ en el que U será cero. Una elección natural es el origen, $\mathbf{r}_0 = 0$, en cuyo caso la energía potencial es $U(\mathbf{r}) = -W(0 \to \mathbf{r})$ o, de acuerdo con (4.14),

$$U(\mathbf{r}) = -qE_0x.$$

Podemos deducir ahora una expresión crucial para el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ en términos de la energía potencial $U(\mathbf{r})$. Sean $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ dos puntos cualesquiera como en la Figura 4.5. Si $\mathbf{r}_0$ es el punto de referencia en el que U es cero, entonces es claro de la Figura 4.5 que

$$W(\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r}_2) = W(\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r}_1) + W(\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2)$$

y por lo tanto

$$W(\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2) = W(\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r}_2) - W(\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r}_1). \tag{4.15}$$

Cada uno de los dos términos del segundo miembro es (el opuesto de) la energía potencial en el punto correspondiente. Por tanto hemos probado que el trabajo del primer miembro es justo la diferencia de estas dos energías potenciales:

$$W(\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2) = -[U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1)] = -\Delta U. \tag{4.16}$$

La utilidad de este resultado queda patente cuando lo combinamos con el teorema Trabajo-EC (4.7):

$$\Delta T = W(\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2). \tag{4.17}$$

Comparando esto con (4.16), vemos que

$$\Delta T = -\Delta U \tag{4.18}$$

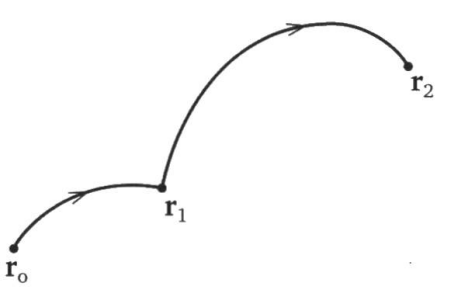


Figura 4.5. El trabajo $W(\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2)$ en ir desde $\mathbf{r}_1$ hasta $\mathbf{r}_2$ es el mismo que $W(\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r}_2)$ menos $W(\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r}_1)$. Este resultado es independiente del camino que usemos para cada parte de la trayectoria, siempre que la fuerza involucrada sea conservativa.

o, pasando el segundo miembro al primero,[5]

$$\Delta(T+U)=0. \tag{4.19}$$

Esto es, la **energía mecánica**

$$E=T+U \tag{4.20}$$

no cambia cuando la partícula se mueve de $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$. Como los puntos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ eran dos puntos *cualesquiera* de la trayectoria de la partícula, llegamos a la siguiente importante conclusión: si la fuerza sobre una partícula es conservativa, entonces la energía mecánica de la partícula nunca cambia; es decir, la energía de la partícula se conserva, lo cual explica el uso del adjetivo «conservativa».

Varias fuerzas

Hasta ahora hemos establecido la conservación de la energía para un partícula sometida a una sola fuerza conservativa. Si la partícula está sometida a varias fuerzas, todas ellas conservativas, nuestro resultado se generaliza fácilmente. Por ejemplo, imaginemos una masa suspendida del techo por un muelle. Esta masa está sometida a dos fuerzas, las fuerzas de la gravedad ($\mathbf{F}_{\text{grav}}$)y la elástica ($\mathbf{F}_{\text{el}}$). La fuerza de gravedad es ciertamente conservativa (como ya he dicho), y, suponiendo que el muelle obedece la ley de Hooke, $\mathbf{F}_{\text{el}}$ es asimismo conservativa (vea el Problema 4.42). Podemos definir energías potenciales separadas para cada fuerza, U_{grav} para $\mathbf{F}_{\text{grav}}$ y U_{el} para $\mathbf{F}_{\text{el}}$, cada una con la propiedad crucial (4.16) de que la variación en U da (el opuesto de) el trabajo realizado por la fuerza correspondiente. De acuerdo con el teorema Trabajo-EC, la variación en la energía cinética de la masa es

$$\begin{aligned}\Delta T &= W_{\text{grav}}+W_{\text{el}}\\ &= -\left(\Delta U_{\text{grav}}+\Delta U_{\text{el}}\right),\end{aligned} \tag{4.21}$$

donde la segunda línea se deduce de las propiedades de las dos energías potenciales separadas. Reordenando esta ecuación, vemos que $\Delta(T+U_{\text{grav}}+U_{\text{el}})=0$. Esto es, la energía mecánica total, definida como $E=T+U_{\text{grav}}+U_{\text{el}}$, se conserva.

El argumento que acabo de enunciar se extiende inmediatamente al caso de n fuerzas sobre una partícula, siempre que sean todas conservativas. Si para cada fuerza $\mathbf{F}_i$ definimos su energía potencial correspondiente U_i, entonces tenemos el

[5] Vemos ahora la razón del signo menos en la definición de U. Proporciona el signo menos del segundo miembro de (4.18), que seguidamente proporciona el signo más deseado en el primer miembro de (4.19).

Principio de conservación de la energía para una partícula

Si todas las n fuerzas $\mathbf{F}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ que actúan sobre una partícula son conservativas, cada una con su correspondiente energía potencial $U_i(\mathbf{r})$, la **energía mecánica total**, definida como

$$E \equiv T + U \equiv T + U_1(\mathbf{r}) + \cdots + U_n(\mathbf{r}), \tag{4.22}$$

es constante en el tiempo.

Fuerzas no conservativas

Si algunas de las fuerzas sobre nuestra partícula no son conservativas, entonces no podemos definir las energías potenciales correspondientes; ni tampoco podemos definir una energía mecánica conservada. Sin embargo, podemos definir energías potenciales para todas las fuerzas que *son* conservativas, y entonces volver a escribir el teorema Trabajo-EC de una forma que muestra cómo las fuerzas no conservativas cambian la energía mecánica de la partícula. Primero dividimos la fuerza neta sobre la partícula en dos partes, la parte conservativa $\mathbf{F}_{\text{cons}}$ y la parte no conservativa $\mathbf{F}_{\text{nc}}$. Para $\mathbf{F}_{\text{cons}}$ podemos definir una energía potencial, a la que llamaremos simplemente U. Por el teorema Trabajo-EC, la variación de la energía cinética entre dos instantes

$$\Delta T = W = W_{\text{cons}} + W_{\text{nc}}. \tag{4.23}$$

El primer término de la derecha es sólo $-\Delta U$ y se puede pasar al lado izquierdo para obtener $\Delta(T+U) = W_{\text{nc}}$. Si definimos la energía mecánica como $E = T+U$, entonces vemos que

$$\Delta E \equiv \Delta(T + U) = W_{\text{nc}}. \tag{4.24}$$

La energía mecánica ya no se conserva, pero aún tenemos algo mejor. La energía mecánica cambia a precisamente la extensión de que las fuerzas no conservativas realizan trabajo sobre nuestra partícula. En muchos problemas la única fuerza no conservativa es la fuerza de rozamiento por deslizamiento, que normalmente realiza trabajo negativo. (La fuerza de rozamiento $\mathbf{f}$ está en la dirección opuesta al movimiento, así que el trabajo $\mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$ es negativo). En este caso W_{nc} es negativo y (4.24) nos dice que el objeto pierde energía mecánica en la cantidad «robada» por el rozamiento. Todas estas ideas están ilustradas en siguiente ejemplo sencillo.

Ejemplo 4.3 *Bloque que desliza hacia abajo por un plano inclinado*

Consideremos de nuevo el bloque del Ejemplo 1.1 y hallemos su velocidad v cuando alcanza la base de la pendiente, a una distancia d de su punto de partida.

En la Figura 4.6 se muestran la formulación y las tres fuerzas que actúan sobre el bloque: su peso, $\mathbf{w} = m\mathbf{g}$, la fuerza normal del plano inclinado, $\mathbf{N}$, y la fuerza de rozamiento $\mathbf{f}$, cuya magnitud encontramos en el Ejemplo 1.1 que es $f = \mu mg\cos\theta$. El peso $m\mathbf{g}$ es conservativo, y la correspondiente energía potencial es (como seguramente se recuerde de las introducciones elementales a la física, pero vea también el Problema 4.5)

$$U = mgy$$

donde y es la altura vertical del bloque por encima de la base de la pendiente (si elegimos el cero de EP en la base). La fuerza normal no realiza trabajo, porque es perpendicular a la dirección del movimiento, así que no contribuirá en el balance de energías. La fuerza de rozamiento realiza trabajo $W_r = -f\,d = -\mu mgd\cos\theta$. La variación en la energía cinética es $\Delta T = T_f - T_i = \frac{1}{2}mv^2$ y la variación en la energía potencial es $\Delta U = U_f - U_i = -mgh = -mgd\,\text{sen}\,\theta$. Por tanto (4.24)

$$\Delta T + \Delta U = W_r$$

o

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - mgd\,\text{sen}\,\theta = -\mu mgd\cos\theta.$$

Despejando v tenemos

$$v = \sqrt{2gd(\text{sen}\,\theta - \mu\cos\theta)}.$$

Como es habitual, se debe comprobar que esta respuesta concuerda con el sentido común. Por ejemplo, ¿proporciona la respuesta esperada cuando $\theta = 90°$? ¿Qué sucede si $\theta = 0$? (El caso $\theta = 0$ es un poco más sutil).

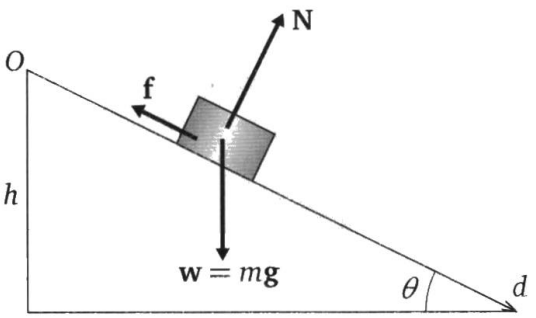


Figura 4.6. Bloque sobre un plano inclinado un ángulo θ. La longitud de la pendiente es d, y la altura es $h = d\,\text{sen}\,\theta$.

4.3 La fuerza como el gradiente de la energía potencial

Hemos visto que la energía potencial $U(\mathbf{r})$ correspondiente a una fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ se puede expresar como una integral de $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, como en (4.13). Esto sugiere que deberíamos ser capaces de escribir $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ como algún tipo de derivada de $U(\mathbf{r})$. Esta conjetura es correcta, aunque para implementarla necesitamos algunas matemáticas que quizá no se hayan visto antes. Específicamente, como $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es un vector [mientras que $U(\mathbf{r})$ es un escalar] nos veremos involucrados en el *cálculo vectorial*.

Consideremos una partícula sobre la que actúa una fuerza conservativa $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, con la correspondiente energía potencial $U(\mathbf{r})$, y examinemos el trabajo realizado por $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ en un pequeño desplazamiento desde $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$. Podemos evaluar este trabajo de dos maneras. Por un lado, es, por definición,

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}\to\mathbf{r}+d\mathbf{r}) &= \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \\ &= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz, \end{aligned} \tag{4.25}$$

para cualquier pequeño desplazamiento $d\mathbf{r}$ con componentes (dx, dy, dz).

Por otro lado, hemos visto que el trabajo $W(\mathbf{r}\to\mathbf{r}+d\mathbf{r})$ es el mismo que (el opuesto de) la variación en la EP en el desplazamiento:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}\to\mathbf{r}+d\mathbf{r}) &= -dU = -[U(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - U(\mathbf{r})] \\ &= -[U(x+dx, y+dy, z+dz) - U(x,y,z)]. \end{aligned} \tag{4.26}$$

En la segunda línea, he sustituido el vector de posición $\mathbf{r}$ por sus componentes para enfatizar que U es realmente una función de las tres variables (x, y, z). Ahora bien, para funciones de una variable, una diferencia como aquella en (4.26) se puede expresar en términos de la derivada:

$$df = f(x+dx) - f(x) = \frac{df}{dx}dx. \tag{4.27}$$

Esto no es realmente más que la definición de la derivada.[6] Para una función de tres variables, como $U(x, y, z)$, el resultado correspondiente es

$$\begin{aligned} dU &= U(x+dx, y+dy, z+dz) - U(x,y,z) \\ &= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \end{aligned} \tag{4.28}$$

[6] Estrictamente hablando, esta ecuación es exacta sólo en el límite cuando $dx \to 0$. Como es habitual, tomo el punto de vista de que dx es suficientemente pequeño (aunque no cero) de manera que los dos lados sean iguales dentro de nuestro objetivo elegido de precisión.

donde las tres derivadas son las *derivadas parciales* con respecto a las tres variables independientes (x, y, z). [Por ejemplo, $\partial U/\partial x$ es la tasa de variación de U cuando varía x, con y y z fijas, y se encuentra diferenciando $U(x, y, z)$ con respecto a x tratando a y y a z como constantes. Consulte los Problemas 4.10 y 4.11 para ver unos ejemplos]. Sustituyendo (4.28) en (4.26), vemos que el trabajo realizado en el pequeño desplazamiento desde $\mathbf{r}$ hasta $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ es

$$W(\mathbf{r} \to \mathbf{r}+d\mathbf{r}) = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right]. \tag{4.29}$$

Las expresiones (4.25) y (4.29) son ambas válidas para *cualquier* pequeño desplazamiento $d\mathbf{r}$. En particular, podemos elegir $d\mathbf{r}$ apuntando en la dirección x, en cuyo caso $dy = dz = 0$ y los dos últimos términos en ambas expresiones (4.25) y (4.29) son cero. Igualando los términos restantes, vemos que $F_x = -\partial U/\partial x$. Eligiendo $d\mathbf{r}$ apuntando en la dirección y o en la z, obtenemos los resultados correspondientes para F_y y F_z, y concluimos que

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{4.30}$$

Esto es, $\mathbf{F}$ es el vector cuyas componentes son las opuestas de las tres derivadas parciales de U con respecto a x, y y z. Una manera ligeramente más compacta de escribir este resultado es esta:

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial U}{\partial x} - \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial U}{\partial y} - \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{4.31}$$

Relaciones como (4.31) entre un vector ($\mathbf{F}$) y un escalar (U) aparecen una y otra vez en física. Por ejemplo, el campo eléctrico $\mathbf{E}$ está relacionado con el potencial electrostático V exactamente de la misma forma. De manera más general, dado un escalar cualquiera $f(\mathbf{r})$, el vector cuyas componentes son las derivadas parciales de $f(\mathbf{r})$ se llama **gradiente** de f, denotado por $\boldsymbol{\nabla} f$:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{4.32}$$

El símbolo $\boldsymbol{\nabla} f$ se lee como «gradiente de f.» El símbolo $\boldsymbol{\nabla}$ por sí mismo se llama «gradiente» o «nabla.» Con esta notación, (4.31) se abrevia como

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U. \tag{4.33}$$

Esta importante relación nos da la fuerza **F** en términos de derivadas de U, igual que la definición (4.13) nos dio U como una integral de **F**. Cuando una fuerza **F** se puede expresar de la forma (4.33), decimos que **F** se **deriva de una energía potencial**. Por lo tanto, hemos mostrado que cualquier fuerza conservativa deriva de una energía potencial.[7]

Ejemplo 4.4 *Determinar F a partir de U*

La energía potencial de cierta partícula es $U = Axy^2 + B\,\text{sen}\,Cz$, donde A, B y C son constantes. ¿Cuál es la fuerza correspondiente?

Para encontrar **F** sólo tenemos que evaluar las tres derivadas parciales en (4.31). Al hacer esto, se debe recordar que $\partial U/\partial x$ se halla diferenciando con respecto a x, tratando y y z como constantes, y así sucesivamente. Después $\partial U/\partial x = Ay^2$, y así, y el resultado final es

$$\mathbf{F} = -(\hat{\mathbf{x}}Ay^2 + \hat{\mathbf{y}}2Axy + \hat{\mathbf{z}}BC\cos Cz).$$

A veces resulta conveniente quitar la f de (4.32) y escribir

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4.34}$$

Visto así, $\boldsymbol{\nabla}$ es un operador de vectorial diferencial que puede aplicarse a cualquier escalar f y que proporciona el vector dado en (4.32).

Una aplicación muy útil del gradiente viene dada por (4.28), cuya parte derecha se puede reconocer como $\boldsymbol{\nabla}U \cdot d\mathbf{r}$. Por lo tanto, si reemplazamos U por un escalar arbitrario f, veremos que la variación de f como resultado de un desplazamiento pequeño $d\mathbf{r}$ es sólo

$$df = \boldsymbol{\nabla}f \cdot d\mathbf{r}. \tag{4.35}$$

[7] Estoy siguiendo aquí la terminología estándar. Advierta que hemos definido «conservativo» de tal manera que una fuerza conservativa conserva la energía y se deriva de una energía potencial. Esto es a veces confuso, porque hay fuerzas (como la fuerza magnética sobre una carga o la fuerza normal sobre un objeto que desliza) que no realizan trabajo y por ello conservan la energía, pero no son «conservativas» en el sentido definido aquí, porque no derivan de una energía potencial. Esta desafortunada confusión a veces causa problemas, por lo que conviene mantenerlo en la memoria.

Esta relación tan útil es la análoga tridimensional de la Ecuación (4.27) para una función de una variable. Esto muestra en qué sentido es el gradiente tridimensional equivalente a la derivada ordinaria en una dimensión.

Si nunca se ha visto la notación ∇ antes, llevará un tiempo acostumbrarse a ella. Mientras tanto, se puede pensar en (4.33) como un atajo conveniente para las tres ecuaciones (4.30). Para practicar usando el gradiente, se pueden intentar resolver los Problemas 4.12 a 4.19.

4.4 La segunda condición para que F sea conservativa

Hemos visto que una de las dos condiciones para que una fuerza **F** sea conservativa es que el trabajo $\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ que realiza al moverse entre cualesquiera dos puntos 1 y 2 debe ser independiente del camino seguido. No hay que preocuparse si no se entiende cómo se puede comprobar si una fuerza dada tiene esta propiedad. ¡Comprobar el valor de la integral para cada par de puntos y cada camino que los une es de hecho una buena posibilidad! Afortunadamente, no es necesario hacer esto. Existe una prueba simple que se puede aplicar rápidamente a cualquier fuerza que esté dada en forma analítica. Esta prueba incluye algunos otros de los conceptos básicos del cálculo vectorial, esta vez el denominado *rotacional* de un vector.

Se puede demostrar (aunque no lo haré aquí[8]) que un fuerza **F** tiene la propiedad deseada, que el trabajo que realiza es independiente del camino, si y sólo si

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \tag{4.36}$$

en todas partes. La cantidad $\nabla \times \mathbf{F}$ se llama **rotacional** de **F**, o simplemente «rot **F**». Se define tomando el producto vectorial de ∇ y **F** como si las componentes de ∇, a saber, $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, fueran números ordinarios. Para entender qué significa esto, consideraremos primero el producto vectorial de dos vectores ordinarios **A** y **B**. En la siguiente tabla he listado las componentes de **A**, **B**, y $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$:

vector	componente x	componente y	componente z
A	A_x	A_y	A_z
B	B_x	B_y	B_z
$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$	$A_yB_z - A_zB_y$	$A_zB_x - A_xB_z$	$A_xB_y - A_yB_x$

(4.37)

[8] La condición (4.36) se sigue de un resultado llamado teorema de Stokes. Si se quiere incidir en esto un poco más vea el Problema 4.25. Para más detalles se puede consultar cualquier texto sobre cálculo vectorial o métodos matemáticos.

Las componentes de $\nabla \times \mathbf{F}$ se encuentran exactamente de la misma manera, excepto que las entradas en la primera fila son operadores diferenciales. Por tanto,

vector	componente x	componente y	componente z
∇	$\partial/\partial x$	$\partial/\partial y$	$\partial/\partial z$
$\mathbf{F}$	F_x	F_y	F_z
$\nabla \times \mathbf{F}$	$\frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y$	$\frac{\partial}{\partial z}F_x - \frac{\partial}{\partial x}F_z$	$\frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x$

(4.38)

Nadie diría que (4.36) es *obviamente* equivalente a la condición de que $\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente del camino, pero sí lo es, y proporciona una prueba fácilmente aplicable para la propiedad de la independencia del camino, tal como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.5 *¿Es conservativa la fuerza de Coulomb?*

Consideremos la fuerza $\mathbf{F}$ sobre una carga q debida a una carga fija Q en el origen. Mostrar que es conservativa y hallar la energía potencial correspondiente U. Comprobar que $-\nabla U = \mathbf{F}$.

La fuerza en cuestión es la fuerza de Coulomb, como se muestra en la Figura 4.7(a),

$$\mathbf{F} = \frac{kqQ}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{\gamma}{r^3}\mathbf{r} \tag{4.39}$$

donde k denota la constante de la fuerza de Coulomb, muchas veces escrita como $1/(4\pi\epsilon_0)$, y γ es sólo una abreviatura para la constante kqQ. De la última expresión podemos leer una por una las componentes de $\mathbf{F}$, y utilizando (4.38) podemos calcular las componentes de $\nabla \times \mathbf{F}$. Por ejemplo, la componente x es

$$(\nabla \times \mathbf{F})_x = \frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\gamma z}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\gamma y}{r^3}\right). \tag{4.40}$$

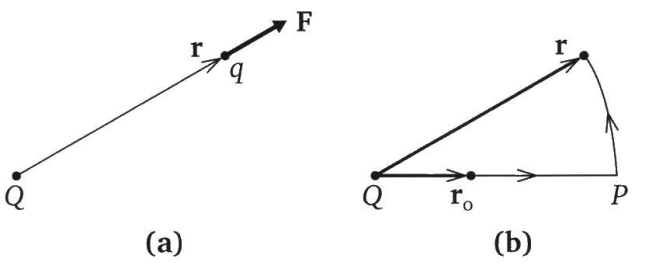


Figura 4.7. **(a)** La fuerza de Coulomb $\mathbf{F} = \gamma\hat{\mathbf{r}}/r^2$ de la carga fija Q sobre la carga q. **(b)** El trabajo realizado por $\mathbf{F}$ cuando q se desplaza desde $\mathbf{r}_0$ hasta $\mathbf{r}$ se puede evaluar siguiendo el camino que va radialmente hacia fuera hasta P y después alrededor de un círculo a $\mathbf{r}$.

Las dos derivadas que hay aquí se evalúan fácilmente. Primero, como $\partial z/\partial y = \partial y/\partial z = 0$, podemos reescribir (4.40) como

$$(\nabla \times \mathbf{F})_x = \gamma z\left(\frac{\partial}{\partial y} r^{-3}\right)\gamma y\left(\frac{\partial}{\partial z} r^{-3}\right). \tag{4.41}$$

Después recordemos que

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$

así que, por ejemplo,

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}. \tag{4.42}$$

(Comprobar esto usando la regla de la cadena). Podemos ahora evaluar las dos derivadas restantes en (4.41) para obtener (recordar la regla de la cadena otra vez)

$$(\nabla \times \mathbf{F})_x = \gamma z\left(\frac{-3}{r^4}\cdot\frac{y}{r}\right) - \gamma y\left(\frac{-3}{r^4}\cdot\frac{z}{r}\right) = 0.$$

Las otras dos componentes se tratan exactamente de la misma manera (compruébelo, si no se fía de mi), y concluimos que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. De acuerdo con el resultado (4.36), esto garantiza que **F** cumple la segunda condición para ser conservativa. Como ciertamente satisface la primera condición (depende sólo de la variable **r**), hemos demostrado que **F** es conservativa. (La prueba de que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ es considerablemente más rápida en coordenadas polares esféricas. Vea el Problema 4.22).

La energía potencial se define mediante la integral de trabajo (4.13),

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}' \tag{4.43}$$

donde $\mathbf{r}_0$ es el punto de referencia (aún sin especificar), donde $U(\mathbf{r}_0) = 0$. Afortunadamente, sabemos que esta integral es independiente del camino, así que podemos elegir el camino que sea más conveniente. Una posibilidad aparece en la Figura 4.7(b), donde he escogido un camino que va radialmente hacia fuera hasta el punto llamado P y después alrededor de un círculo (centrado en Q) a **r**. En el primer segmento, $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$ y $d\mathbf{r}'$ son colineales, y $\mathbf{F}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}' = (\gamma/r'^2)dr'$. En el segundo, $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$ y $d\mathbf{r}'$ son perpendiculares, así que no se realiza trabajo al recorrer este segmento, y el trabajo total es sólo el del primer segmento,

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{r_0}^{r} \frac{\gamma}{r'^2}\, dr' = \frac{\gamma}{r} - \frac{\gamma}{r_0}. \tag{4.44}$$

Finalmente, es habitual en este problema elegir el punto de referencia $\mathbf{r}_0$ en el infinito, de tal manera que el segundo término sea cero. Con esta elección (y sustituyendo γ por kqQ) llegamos a la fórmula bien conocida para la energía potencial de la carga q debida a Q,

$$U(\mathbf{r}) = U(r) = \frac{kqQ}{r}. \tag{4.45}$$

Advierta que la respuesta depende sólo de la magnitud r del vector de posición $\mathbf{r}$ y no de la dirección.

Para comprobar ∇U evaluemos la componente x:

$$(\nabla U)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kqQ}{r}\right) = -\frac{kqQ}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} \tag{4.46}$$

en donde la última expresión se deduce de la regla de la cadena. La derivada $\partial r/\partial x$ es x/r [comparar con la ecuación (4.42)], así que

$$(\nabla U)_x = -kqQ\frac{x}{r^3} = -F_x,$$

como la dada por (4.39). Las otras dos componentes se comportan exactamente de la misma manera, y hemos demostrado que

$$\nabla U = -\mathbf{F} \tag{4.47}$$

como se requería.

4.5 Energía potencial dependiente del tiempo

A veces tenemos la oportunidad de estudiar una fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$ que cumple la segunda condición para ser conservativa ($\nabla \times \mathbf{F} = 0$), pero, por ser *dependiente del tiempo*, no cumple la primera condición. En este caso, podemos todavía definir una energía potencial $U(\mathbf{r}, t)$ con la propiedad de que $\mathbf{F} = -\nabla U$, pero ya no sucede que la energía mecánica total, $E = T + U$, sea conservada. Antes de justificar estas afirmaciones, voy a poner un ejemplo de esta situación. La Figura 4.8 muestra una carga pequeña q en la vecindad de una esfera conductora cargada (por ejemplo, un generador de Van de Graaff) con una carga $Q(t)$ que disminuye lentamente al descargarse a través del aire húmedo hacia el suelo. Como $Q(t)$ cambia con el tiempo, la fuerza que ejerce sobre la pequeña carga q es explícitamente dependiente del tiempo. Sin embargo. La dependencia espacial de la fuerza es la misma que para la fuerza independiente del

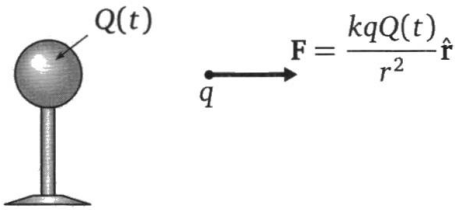


Figura 4.8. La carga $Q(t)$ en la esfera conductora está disminuyendo lentamente, así que la fuerza sobre la carga pequeña q varía con el tiempo, incluso si su posición $\mathbf{r}$ es constante.

tiempo de Coulomb del Ejemplo 4.5 (página 132). Exactamente el mismo análisis que el de aquel ejemplo muestra que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

Pasemos ahora a justificar las afirmaciones que he hecho más arriba. Primero, como $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = 0$, el mismo teorema matemático citado en conexión con la ecuación (4.36) garantiza que la integral de trabajo $\int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r}$ (evaluada en cualquier instante t) es independiente del camino. Esto significa que podemos definir una función $U(\mathbf{r}, t)$ mediante una integral completamente análoga a (4.13),

$$U(\mathbf{r}, t) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}', t) \cdot d\mathbf{r}', \tag{4.48}$$

y, por las mismas razones que antes, $\mathbf{F}(\mathbf{r},t) = -\nabla U(\mathbf{r}, t)$. (Vea el Problema 4.27). En este caso, podemos decir que la fuerza $\mathbf{F}$ deriva de la energía potencial dependiente del tiempo $U(\mathbf{r}, t)$.

Hasta ahora todo ha funcionado como antes, pero ahora la historia cambia. Podemos definir la energía mecánica como $E = T + U$, pero ya no es cierto que E se conserva. Si se repasa cuidadosamente el argumento que conduce a la ecuación (4.19), se puede ser capaz de ver qué es lo que no funciona, pero podemos en cualquier caso mostrar directamente que $E = T + U$ cambia cuando la partícula se mueve por su camino. Como antes, consideremos dos puntos vecinos cualesquiera en la trayectoria de la partícula en los instantes t y $t + dt$. Exactamente como en (4.4), la variación en la energía cinética es

$$dT = \frac{dT}{dt} dt = (m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{4.49}$$

Mientras tanto, $U(\mathbf{r}, t) = U(x, y, z, t)$ es una función de cuatro variables (x, y, z, t) y

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt. \tag{4.50}$$

Se reconocerán los tres primeros términos del segundo miembro como $\nabla U \cdot \mathbf{r} = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Por tanto

$$dU = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial U}{\partial t}dt. \tag{4.51}$$

Cuando añadimos esto a la ecuación (4.49) los primeros dos términos se cancelan, y nos queda

$$d(T+U) = \frac{\partial U}{\partial t}dt. \tag{4.52}$$

Claramente es sólo cuando U es independiente de t (es decir, $\partial U/\partial t = 0$) que la energía mecánica $E = T + U$ se conserva.

Volviendo al ejemplo de la Figura 4.8, podemos entender este ejemplo y ver qué le ha pasado a la conservación de la energía. Imaginemos que sujeto la carga q de manera estacionaria en la posición de la Figura 4.8, mientras la esfera se descarga. En estas condiciones, la EC de q no cambia, pero la energía potencial $kqQ(t)/r$ disminuye lentamente a cero. Claramente $T+U$ no es constante. Sin embargo, así como la energía mecánica no se conserva, la energía *total sí* se conserva: la pérdida de energía mecánica se compensa perfectamente con la ganancia de energía térmica ya que la corriente de descarga calienta el aire de alrededor. Este ejemplo sugiere algo que es cierto, que la energía potencial depende explícitamente del tiempo precisamente en aquellas situaciones donde la energía mecánica se transforma en otra forma de energía o en energía mecánica de otros cuerpos externos al sistema de interés.

4.6 Energía para sistemas lineales unidimensionales

Hasta ahora hemos hablado sobre la energía de una partícula que tiene la libertad de moverse en cualquiera de las tres dimensiones. Hay muchos problemas interesantes que implican un objeto que está obligado a moverse en una sola dimensión, y el análisis de tales problemas es mucho más sencillo que el caso general. Curiosamente, existe cierta ambigüedad en cuanto a lo que un físico quiere decir con «sistema unidimensional». Muchos textos de introducción a la física comienzan discutiendo el movimiento de un sistema unidimensional, con lo que se refieren a un objeto (un vagón de tren, por ejemplo) limitado a moverse sobre una pista perfectamente recta o lineal. Al hablar de tales sistemas lineales, naturalmente tomamos el eje x para que coincida con la pista, de manera que la posición del objeto viene entonces dada sencillamente por la coordenada x. En esta sección me centraré en los sistemas lineales unidimensionales. Sin embargo, existen muchos sistemas complicados, tales como una montaña rusa sobre su pista curva, que también son unidimensionales, en tanto y en cuanto su posición puede determinarse por un único parámetro (como la distancia en la montaña rusa a lo largo de su pista). Y como comentaré en la próxima sección,

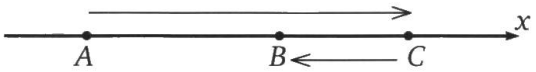


Figura 4.9. El camino denominado $ABCB$ va desde A pasando por B y hasta C, y después vuelve a B.

la conservación de la energía para tales sistemas curvilíneos unidimensionales es tan sencilla como para una pista perfectamente recta.

Para empezar, consideremos un objeto limitado a moverse a lo largo de una pista perfectamente recta, que tomaremos como el eje x. La única componente de cualquier fuerza $\mathbf{F}$ que puede realizar un trabajo es la componente x, de manera que podemos ignorar las otras dos componentes. Por lo tanto, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ es la integral unidimensional

$$W(x_1 \to x_2) = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x)\,dx. \tag{4.53}$$

Si la fuerza ha de ser conservativa, F_x debe satisfacer las dos condiciones habituales: (i) debe depender únicamente de la posición x [como ya he sugerido al escribir la integral (4.53)]. (ii) el trabajo (4.53) debe ser independiente del camino. Lo asombroso de los sistemas unidimensionales es que la primera condición garantiza de antemano la segunda, de manera que esta última resulta superflua. Para comprender esta propiedad, sólo hay que darse cuenta de que únicamente hay una pequeña selección de caminos que conecten dos puntos cualesquiera. Consideremos por ejemplo, los dos puntos A y B de la Figura 4.9. El camino obvio entre los puntos A y B es el camino que va de A directamente a B (denominemos a este camino «AB»). Otra posibilidad mostrada en la figura, es ir desde A pasando por B hasta C y después volver a B (a este lo llamaremos «$ABCB$»). El trabajo realizado a lo largo de este camino puede descomponerse de la siguiente manera:

$$W(ABCB) = W(AB) + W(BC) + W(CB).$$

Ahora bien, en el caso de que la fuerza sólo dependa de la posición x [condición (i)] cada incremento del trabajo de B a C es exactamente igual (pero con signo opuesto) a la contribución correspondiente que va desde C hasta B. Esto es, los dos últimos términos del segundo miembro se cancelan, y concluimos que

$$W(ABCB) = W(AB),$$

como se requería. Podemos, por supuesto, trazar un camino desde A hasta B que dé la vuelta adelante y atrás muchas veces, pero una pequeña reflexión debería convencernos de que cualquiera de tales caminos se puede descomponer en varios segmentos,

algunos de los cuales, unidos, atraviesan el camino directo *AB* exactamente una vez, y todos los demás se cancelan por parejas. Por tanto el trabajo realizado sobre *cualquier* camino entre *A* y *B* es el mismo que aquél sobre el camino directo *AB*, y hemos demostrado que en una dimensión la primera condición para que una fuerza sea conservativa garantiza la segunda.

Gráficas de la energía potencial

Un segundo hecho útil de los sistemas unidimensionales es que con sólo una variable independiente (x) podemos representar la energía potencial $U(x)$, y, como veremos, esto facilita visualizar el comportamiento del sistema. Suponiendo que todas las fuerzas sobre el objeto son conservativas, definimos la energía potencial como

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F_x(x')\,dx' \tag{4.54}$$

donde F_x es la componente x de la fuerza neta sobre la partícula. Por ejemplo, para una masa sujeta a un extremo de un muelle que obedece la ley de Hooke, la fuerza es $F_x = -kx$, y, si elegimos el punto de referencia $x_0 = 0$, la ecuación (4.54) proporciona el famoso resultado

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2$$

para un muelle que obedece la ley de Hooke.

En correspondencia al resultado en tres dimensiones $\mathbf{F} = -\nabla U$, en una dimensión tenemos el resultado más sencillo

$$F_x = -\frac{dU}{dx}. \tag{4.55}$$

Si representamos la energía potencial frente a x como en la Figura 4.10, podemos fácilmente ver cualitativamente cómo se tiene que comportar el objeto. La dirección de la fuerza neta viene dada por (4.55) como «hacia abajo» en la gráfica de $U(x)$: hacia la izquierda en x_1 y hacia la derecha en x_2. Se deduce que el objeto siempre se acelera en la dirección de bajada (propiedad que recuerda el movimiento de una montaña rusa, que también se acelera siempre hacia abajo). Esta analogía no es casualidad: para una montaña rusa, $U(x)$ es mgh (donde h es la altura sobre el suelo) y la gráfica de $U(x)$ frente a x tiene la misma forma que la gráfica de h frente x, que es simplemente un *dibujo* de las vías. Para cualquier sistema unidimensional, podemos siempre *pensar* en la gráfica de $U(x)$ como una imagen de una montaña rusa, y el sentido común nos dirá generalmente el tipo de movimiento posible en los diferentes lugares, tal como describiré ahora.

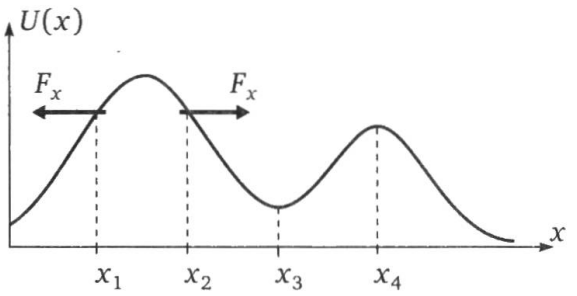


Figura 4.10. La gráfica de la energía potencial $U(x)$ frente a x para cualquier sistema unidimensional se puede entender imaginándola una montaña rusa. La fuerza $F_x = -dU/dx$ tiende a empujar el objeto en la bajada como en x_1 y x_2. En los puntos x_3 y x_4, donde $U(x)$ es mínimo o máximo, $dU/dx = 0$ y la fuerza es cero; tales puntos son por ello puntos de equilibrio.

En puntos, tales como x_3 y x_4, donde $dU/dx = 0$ y $U(x)$ es mínimo o máximo, la fuerza neta es cero, y el objeto puede permanecer en equilibrio. Esto es, la condición $dU/dx = 0$ caracteriza los puntos de equilibrio. En x_3, donde $d^2U/dx^2 > 0$ y $U(x)$ es mínimo, un pequeño desplazamiento desde la posición de equilibrio provoca una fuerza que empuja el objeto de vuelta al punto de equilibrio (a la derecha de x_3, hacia la izquierda; a la izquierda de x_3, hacia la derecha). En otras palabras, los puntos de equilibrio donde $d^2U/dx^2 > 0$ y $U(x)$ es mínimo son puntos de equilibrio *estables*. En puntos de equilibro como x_4 donde $d^2U/dx^2 < 0$ y $U(x)$ es máximo, un pequeño desplazamiento conduce a una fuerza *fuera* del equilibrio, y el equilibrio es *inestable*.

Si el objeto está *en movimiento*, entonces su energía cinética es positiva y su energía total es necesariamente mayor que $U(x)$. Por ejemplo, supongamos que el objeto se está moviendo por algún lugar cerca del punto de equilibrio $x = b$ en la Figura 4.11. Su energía total tiene que ser mayor que $U(b)$ y podría, por ejemplo, igualar el valor mostrado como E en esa figura. Si resulta que el objeto está a la derecha de b y se mueve hacia la derecha, su EP aumentará y su EC deberá por tanto disminuir hasta que el objeto alcance el **punto de retorno** llamado c, donde $U(c) = E$ y EC es cero.

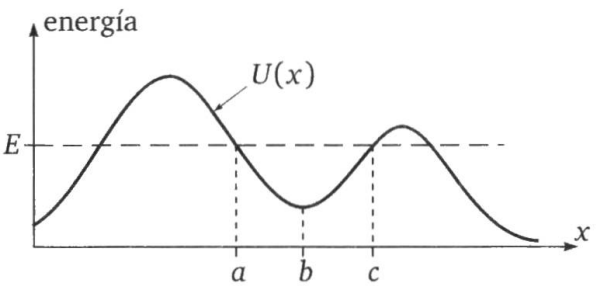


Figura 4.11. Si un objeto comienza cerca de $x = b$ con la energía E indicada, está atrapado en el valle o «pozo» entre las dos montañas y oscila entre los puntos de retorno en $x = a$ y c donde $U(x) = E$ y la energía cinética es cero.

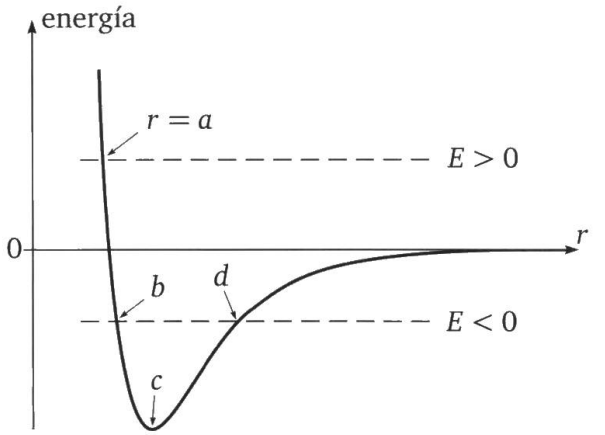


Figura 4.12. Energía potencial de una molécula diatómica típica, tal como el HCl, representada en función de la distancia r entre los dos átomos. Si $E > 0$, los dos átomos no se pueden aproximar más cerca que el punto de retorno $r = a$, pero pueden separarse hasta infinito. Si $E < 0$, están atrapados entre los puntos de retorno b y d y forman una molécula unida. Las separación de equilibrio es $r = c$.

En $x = c$ el objeto se para y, con la fuerza de nuevo hacia la izquierda, se acelera otra vez hacia $x = b$. No se puede parar hasta que la EC sea otra vez cero, y esto sucede en el punto de retorno a, donde $U(a) = E$ y el objeto se acelera de nuevo hacia la derecha. Como el ciclo completo se repite ahora a sí mismo, vemos que si el objeto comienza entre dos montañas y su energía es más baja que la cima de las dos montañas, entonces el objeto está atrapado en el valle o «pozo» y oscila indefinidamente entre los dos puntos de retorno donde $U(x) = E$.

Supongamos que el objeto comienza otra vez entre las dos montañas pero con energía más alta que la cima de la montaña derecha aunque todavía más bajo que la izquierda. En este caso, escapará a la derecha porque $E > U(x)$ en todas partes a la derecha, y no se puede parar nunca una vez que se está moviendo en esa dirección. Finalmente, si la energía es mayor que ambas montañas el carro puede escapar en cualquier dirección.

Estas consideraciones juegan un rol importante en muchos campos. Un ejemplo de física molecular aparece ilustrado en la Figura 4.12, que muestra la energía potencial de una molécula diatómica típica, como el HCl, en función de la distancia entre los dos átomos. Esta función energía potencial gobierna el movimiento radial del átomo de hidrógeno (en el caso del HCl) cuando vibra adentro y afuera del átomo de cloro (mucho más pesado). El cero de energía se ha elegido donde los dos átomos están muy separados (en el infinito) y en reposo. Advierta que la variable independiente es la distancia interatómica r, la cual, por definición, es siempre positiva, $0 \leq r < \infty$. Cuando $r \to 0$, la energía potencial es muy grande, indicando que los dos átomos se repelen entre sí cuando están muy cerca (por la fuerza de repulsión de Coulomb de los núcleos). Si la energía es positiva ($E > 0$) el átomo de

hidrógeno puede escapar al infinito, porque no hay ninguna «montaña» que lo atrape; el átomo H puede venir del infinito, pero se parará en el punto de retorno $r = a$ y (en ausencia de ningún mecanismo que tome un poco de su energía) se alejará de nuevo hacia el infinito. Por otro lado, si $E < 0$, el átomo H está atrapado y oscilará adentro y afuera entre los dos puntos de retorno representados en $r = b$ y $r = d$. La separación de equilibrio de la molécula está en el punto representado como $r = c$. Son los estados con $E < 0$ los que se corresponden con lo que normalmente consideramos como la molécula de HCl. Para formar tal molécula, dos átomos separados (con $E > 0$) deben acercarse hasta tener una separación cercana a $r = c$, y algún proceso, tal como la emisión de luz, habrá de restar suficiente energía como para dejar los dos átomos atrapados con $E < 0$.

Solución completa del movimiento

Un tercer hecho reseñable de los sistemas unidimensionales conservativos es que podemos usar (al menos en un principio) la conservación de la energía para obtener una solución completa del movimiento, esto es, encontrar la posición x como función del tiempo t. Como $E = T + U(x)$ se conserva, con $U(x)$ función conocida (en el contexto de un problema dado) y E determinada por las condiciones iniciales, podemos resolver para $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - U(x)$ y a partir de ahí para la velocidad $\dot{x}$ como función de x:

$$\dot{x}(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U(x)}. \tag{4.56}$$

(Advierta que existe una ambigüedad en el signo porque las consideraciones energéticas no pueden determinar la *dirección* de la velocidad. Por esta razón, el método descrito aquí normalmente no funciona en un problema que sea realmente de tres dimensiones. En una dimensión se puede casi siempre decidir el signo de $\dot{x}$ por inspección, aunque se debe recordar la obligación de hacerlo).

Conociendo la velocidad como función de x, podemos hallar ahora x como función de t, usando separación de variables. Así, primero reescribimos la definición $\dot{x} = dx/dt$ como

$$dt = \frac{dx}{\dot{x}}.$$

[Como $\dot{x} = \dot{x}(x)$, esto separa las variables t y x]. Después, podemos integrar entre cualesquiera puntos inicial y final para obtener

$$t_f - t_i = \int_{x_i}^{x_f} \frac{dx}{\dot{x}}. \tag{4.57}$$

Esto proporciona el tiempo para ir entre cualesquiera posiciones inicial y final de interés. Si sustituimos $\dot{x}$ por su valor en (4.56) (y suponemos, para fijar ideas, que $\dot{x}$ es positiva) entonces el tiempo para ir desde el x_0 inicial, en el instante 0 hasta un x arbitrario en el instante t es

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\dot{x}(x')} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}}. \tag{4.58}$$

(Como es habitual, he renombrado la variable de integración como x' para evitar confusiones con el límite superior x). La integral (4.58) depende de una forma particular de $U(x)$ en el problema que nos ocupa. Suponiendo que podemos hacer la integral [cosa que al menos podemos hacer de manera numérica para cualquier $U(x)$], ésta nos da t como una función de x. Finalmente podemos resolver para que x sea una función de t, y nuestra solución está completada, tal y como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.6 *Caída libre*

Dejo caer una piedra desde lo alto de una torre en el instante $t = 0$. Utilicemos la conservación de la energía para determinar la posición de la piedra x (medida desde lo alto de la torre, donde $x = 0$) como una función de t. Despreciaremos la resistencia del aire.

La única fuerza que actúa sobre la piedra es la gravedad, que por supuesto es conservativa. La energía potencial correspondiente es

$$U(x) = -mgx.$$

(Recuerde que x se mide hacia abajo). Ya que la piedra está en reposo cuando $x = 0$ la energía total es $E = 0$, y de acuerdo con (4.56) la velocidad es

$$\dot{x}(x) = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U(x)} = \sqrt{2gx}$$

(resultado bien conocido de la cinemática elemental). Por lo tanto

$$t = \int_0^x \frac{dx'}{\dot{x}(x')} = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{2gx'}} = \sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Tal y como anticipamos, esto nos da t como una función de x, y podemos resolver para encontrar el ya conocido resultado

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Este sencillo ejemplo, que implica a la energía gravitatoria potencial $U(x) = -mgx$, puede resolverse de muchas (y algunas más sencillas) maneras, pero el método de la energía utilizado aquí puede usarse para *cualquier* función de energía potencial $U(x)$. En algunos casos, la integral (4.58) puede evaluarse en términos de funciones elementales, con lo que obtenemos una solución analítica del problema; por ejemplo, si $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ (como para una masa al final de un muelle), la integral resulta ser una función seno inversa, lo cual implica que x oscila de manera sinusoidal con el tiempo, tal y como deberíamos suponer (vea el Problema 4.28). Para algunas energías potenciales, la integral no puede hacerse en términos de funciones elementales, pero aun así puede relacionarse con funciones tabuladas (vea el Problema 4.38). En algunos problemas, la única manera de hacer la integral (4.58) es numéricamente.

4.7 Sistemas curvilíneos unidimensionales

Hasta ahora del único sistema unidimensional del que he hablado es del objeto obligado a moverse por un camino lineal, cuya posición viene especificada por la coordenada x. Hay otros sistemas, y más generales, que también pueden denominarse unidimensionales, por cuanto su posición viene determinada por un solo número. Un ejemplo de dicho sistema unidimensional es el de una cuenta de collar enhebrada con un alambre curvo rígido, como el de la Figura 4.13. (Otro es el de la montaña rusa confinada a moverse en una pista curva). La posición de la cuenta puede determinarse mediante un único parámetro, que podemos elegir como la distancia s, medida a lo largo del alambre, desde un origen elegido O. Con esta selección de coordenadas, el debate sobre la pista curva unidimensional se acerca mucho al de la pista recta, como mostraré a continuación.

La coordenada s de nuestra cuenta corresponde, por supuesto, a x para el caso de una pista recta. Rápidamente se ve que la velocidad de la cuenta es $\dot{s}$, y por lo

Figura 4.13. Un objeto limitado a moverse sobre una pista curva puede considerarse con un sistema unidimensional, cuya posición viene determinada por la distancia s (medida a lo largo de la pista) del objeto de un origen O. El sistema mostrado es una cuenta de collar enhebrada en un alambre rígido de lazo doble.

tanto la energía cinética es sólo

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{s}^2$$

en comparación con el conocido $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ para la pista recta. La fuerza es un poco más complicada. A medida que se mueve la cuenta sobre el alambre curvo, la fuerza neta normal no es cero; al contrario, es la fuerza normal la que obliga a la cuenta a seguir el camino curvo asignado. (Por esta razón, la fuerza normal se denomina *fuerza de restricción o ligadura*). Por otra parte, la fuerza normal no hace ningún trabajo, y es la componente *tangencial* F_{tg} de la fuerza neta sobre la que se centra nuestra atención. En particular, es bastante fácil demostrar (Problema 4.32) que

$$F_{\text{tg}} = m\ddot{s}$$

(igual que $F_x = m\ddot{x}$ sobre una pista recta). Más aún, si todas las fuerzas que actúan sobre la cuenta que tienen una componente tangencial son conservativas, podemos definir una energía potencial correspondiente $U(s)$ tal que $F_{\text{tg}} = -dU/ds$, y la energía mecánica total $E = T + U(s)$ es constante. Todo lo discutido en la Sección 4.6 puede ahora aplicarse a la cuenta ensartada en el alambre curvo (o cualquier otro objeto obligado a moverse sobre un camino unidimensional). En concreto, aquellos puntos donde $U(s)$ es mínimo son puntos de equilibrio estable, y aquellos donde $U(s)$ es máximo son puntos de equilibrio inestable.

Hay muchos sistemas que aparentan ser mucho más complicados que el de la cuenta a lo largo de un alambre, sin embargo también son unidimensionales y por lo tanto pueden abordarse de la misma manera. A continuación doy un ejemplo.

Ejemplo 4.7 *Estabilidad de un cubo que se balancea sobre un cilindro*

Un cilindro de goma dura de radio r se mantiene fijo con su eje en posición horizontal, y sobre él se balancea un cubo de madera de lado $2b$, cuyo centro está inicialmente en la vertical perpendicular al eje del cilindro y cuatro de sus lados son paralelos al eje. El cubo no desliza sobre la goma del cilindro, pero sí puede balancearse de lado a lado, como muestra la Figura 4.14. Analizando la energía potencial del cubo, determinar si el equilibro del cubo centrado sobre el cilindro es estable o inestable.

Aclaremos primero que el sistema es unidimensional, ya que su posición mientras se balancea puede determinarse mediante una única coordenada, por ejemplo, el ángulo θ que ha girado. (También podríamos especificarla mediante la distancia s del centro del cubo al equilibrio, pero el ángulo es más conveniente. De cualquiera de las dos maneras la posición viene determinada por una única coordenada, por lo que nuestro problema es definitivamente unidimensional). Las fuerzas de restricción son las fuerzas normales y de rozamiento del cilindro sobre el cubo; esto es, que estas dos fuerzas obligan al cubo a moverse únicamente como se muestra en

la Figura 4.14. Como ninguna realiza ningún trabajo no tenemos que considerarlas de manera explícita. La única otra fuerza que actúa sobre el cubo es la gravedad, y gracias a la física elemental sabemos que es conservativa y que la energía potencial gravitatoria es igual que la de una masa puntual en el centro del cubo; esto es, $U = mgh$, donde h tiene la altura de C sobre el origen, como se muestra en Figura 4.14. (Vea el Problema 4.6). La longitud del segmento OB es simplemente $r + b$, mientras que la de BC es la distancia que ha recorrido el cubo alrededor del cilindro, concretamente $r\theta$. Por lo tanto $h = (r + b)\cos\theta + r\theta \operatorname{sen}\theta$ y la energía potencial es

$$U(\theta) = mgh = mg[(r + b)\cos\theta + r\theta \operatorname{sen}\theta]. \tag{4.59}$$

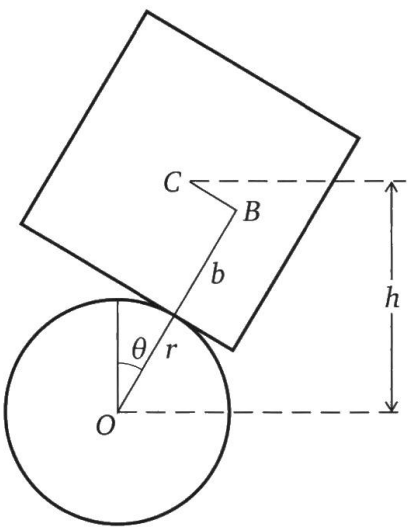


Figura 4.14. Un cubo, de lado $2b$ y centro C, se sitúa sobre un cilindro horizontal fijo de radio r y centro O. Originalmente se coloca de manera que C está centrado sobre O, pero puede balancearse de lado a lado sin deslizar.

Para determinar la posición (o posiciones) de equilibrio debemos hallar los puntos donde $dU/d\theta$ desaparece. (Estrictamente hablando, aún no he demostrado esta muy plausible afirmación para este tipo de sistema restringido; discutiré sobre ello en breve). La derivada puede calcularse fácilmente (compruébelo usted mismo)

$$\frac{dU}{d\theta} = mg[r\theta\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta].$$

Desaparece en $\theta = 0$, confirmando lo obvio, que $\theta = 0$ es un punto de equilibrio. Para decidir si este equilibrio es estable, solo tenemos que derivar de nuevo y encontrar el valor de $d^2U/d\theta^2$ en la posición de equilibrio. Esto da (tal y como debería comprobarse)

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mg(r - b) \tag{4.60}$$

(en $\theta = 0$). Si el cubo es más pequeño que el cilindro (esto es, $b < r$), la segunda derivada es positiva, lo cual significa que $U(\theta)$ tiene un mínimo de $\theta = 0$ y el equilibrio es estable; si el cubo se equilibra sobre el cilindro, podría permanecer ahí indefinidamente. Por otra parte, si el cubo es más grande que el cilindro ($b > r$), la segunda derivada (4.60) es negativa, el equilibrio es inestable y la más pequeña alteración provocará el rodamiento del cubo y su caída del cilindro.

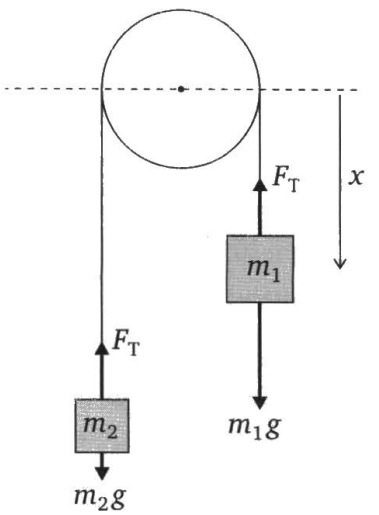


Figura 4.15. Una máquina de Atwood que consiste en dos masas, m_1 y m_2, suspendidas de un hilo inextensible y sin masa que pasa por una polea sin masa ni rozamiento. Como la longitud del hilo es fija, la posición del sistema viene dada por la distancia x de m_1 por debajo de cualquier nivel convenientemente predeterminado. Las fuerzas sobre las dos masas son su peso $m_1 g$ y $m_2 g$, y las fuerzas de tensión F_T (que son iguales ya que tanto la polea como el hilo no tienen masa).

Más generalizaciones

Hay muchos otros, y más complicados sistemas que pueden describirse, de manera legítima, como unidimensionales. Dichos sistemas pueden comprender muchos cuerpos, pero esos cuerpos están unidos por varillas o hilos de tal manera que sólo es necesario un parámetro para describir la posición del sistema. Un ejemplo de dicho sistema es la máquina de Atwood mostrada en la Figura 4.15, que consiste en dos masas, m_1 y m_2, suspendidas de los extremos opuestos de un hilo inextensible y sin masa que pasa por una polea sin rozamiento. (Para simplificar la discusión, supondré que la polea no tiene masa, aunque podemos admitir que la polea sí tiene masa). Las dos masas pueden moverse hacia arriba y hacia abajo, pero las fuerzas de la polea sobre el hilo y del hilo sobre las masas restringen todo de tal manera que la masa m_2 solo puede moverse hacia arriba la misma distancia que m_2 puede moverse hacia abajo. Y de esta manera la posición del sistema puede determinarse

mediante un único parámetro, por ejemplo la altura x de m_1 bajo el centro de la polea tal y como se muestra, y el sistema de nuevo es unidimensional.[9]

Consideremos las energías de las masas m_1 y m_2. Las fuerzas que actúan sobre ellas son la gravedad y la tensión del hilo. Como la gravedad es conservativa, podemos introducir energías potenciales U_1 y U_2 para las fuerzas gravitatorias, y nuestras consideraciones anteriores implican que en cualquier desplazamiento del sistema,

$$\Delta T_1 + \Delta U_1 = W_1^{\text{ten}} \tag{4.61}$$

y

$$\Delta T_2 + \Delta U_2 = W_2^{\text{ten}} \tag{4.62}$$

donde los términos W^{ten} denotan el trabajo realizado por la tensión sobre m_1 y m_2. Ahora bien, en ausencia de rozamiento, la tensión es la misma a lo largo del hilo. Por lo tanto, aunque la tensión actúa definitivamente sobre las dos masas individuales, el trabajo realizado sobre m_1 es igual y opuesto al realizado sobre m_2, cuando m_1 se mueve hacia abajo y m_2 se mueve exactamente la misma distancia hacia arriba (o viceversa). Esto es,

$$W_1^{\text{ten}} = -W_2^{\text{ten}}. \tag{4.63}$$

Por lo tanto, si sumamos las dos ecuaciones de la energía (4.61) y(4.62), los términos que implican la tensión del hilo se cancelan y nos quedamos con

$$\Delta(T_1 + U_1 + T_2 + U_2) = 0.$$

Esto es, la energía mecánica total

$$E = T_1 + U_1 + T_2 + U_2 \tag{4.64}$$

se conserva. La belleza de este resultado es que toda referencia a las fuerzas de restricción del hilo y la polea desaparece.

Resulta que muchos sistemas que contienen varias partículas obligadas de alguna manera (por hilos, varillas, una pista sobre la que deban moverse, etc.) pueden tratarse de esta misma manera: las fuerzas de restricción son crucialmente importantes a la hora de determinar cómo se mueve el sistema, pero no trabajan sobre el sistema

[9] Se podría objetar, quizá con razón, que las masas también se pueden desplazar hacia los lados. Si esto nos preocupa, podemos insertar cada masa en una varilla sin rozamiento, pero estas varillas en realidad no son necesarias: mientras podamos evitar empujar las masas hacia los lados, cada una permanecerá en la vertical por su propia inercia.

como tales. Por lo tanto, al considerar la energía total del sistema, podemos sencillamente ignorar las fuerzas de restricción. Especialmente si todas las demás fuerzas son conservativas (como en nuestro ejemplo de la máquina de Atwood), podemos definir una energía potencial U_α para cada partícula α, y la energía total

$$E = \sum_{\alpha=1}^{N} (T_\alpha + U_\alpha)$$

es constante. Si el sistema también es unidimensional (posición determinada por un único parámetro, como en la máquina de Atwood), entonces todas las consideraciones de la Sección 4.6 pueden aplicarse.

Es mucho más fácil hablar sobre sistemas restringidos en la mecánica de la formulación lagrangiana que en la newtoniana. De manera que dejaré toda discusión para el Capítulo 7. Particularmente, la prueba de que un equilibrio estable normalmente corresponde a un mínimo de la energía potencial (para una gran variedad de sistemas restringidos) se esboza en el Problema 7.47.

4.8 Fuerzas centrales

Una situación tridimensional que tiene algo de la sencillez de los problemas unidimensionales es la de una partícula sujeta a una fuerza central, esto es, una fuerza que en todas partes se dirige hacia un punto fijo (el centro de fuerza) o en sentido contrario a él. Si tomamos como origen el centro de fuerza, una fuerza central tiene la forma de

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}} \tag{4.65}$$

donde la función $f(\mathbf{r})$ nos da la magnitud de la fuerza (que es positiva si la fuerza es hacia fuera y negativa si es hacia dentro). Un ejemplo de fuerza central es la fuerza de Coulomb sobre una carga q debida a una segunda carga Q situada en el origen; esto tiene la ya conocida forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{kqQ}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \tag{4.66}$$

que es obviamente un ejemplo de (4.65), cuya magnitud viene dada por $f(\mathbf{r}) = kqQ/r^2$. La fuerza de Coulomb tiene dos propiedades adicionales y que no comparten todas las fuerzas centrales. En primer lugar, como hemos demostrado, es conservativa. En segundo lugar, es **esféricamente simétrica** o **rotacionalmente invariante**; esto es, la función de magnitud $f(\mathbf{r})$ en (4.65) es independiente del sentido

de **r** y, por lo tanto, tiene el mismo valor en todos los puntos que están a la misma distancia del origen. Una forma concisa de expresar esta segunda propiedad de simetría esférica es observar que la función de magnitud $f(\mathbf{r})$ depende únicamente de la magnitud del vector **r** y no de su sentido, de manera que puede escribirse como

$$f(\mathbf{r}) = f(r). \tag{4.67}$$

Una cualidad fascinante de las fuerzas centrales es que las dos propiedades que acabamos de mencionar siempre van juntas: si una fuerza central es conservativa, entonces automáticamente también es esféricamente simétrica y viceversa. Estos dos resultados pueden demostrarse de diferentes maneras, pero la forma más directa implica el uso de coordenadas polares esféricas. Por lo tanto, antes de ofrecer ninguna prueba, haré un breve repaso de la definición de estas coordenadas.

Coordenadas polares esféricas

La posición de cualquier punto P se determina, por supuesto, por el vector **r** que apunta desde el origen O hasta P. El vector **r** puede determinarse por sus coordenadas cartesianas (x, y, z), pero en los problemas de simetría esférica casi siempre es más útil especificar **r** por sus coordenadas polares esféricas (r, θ, ϕ), como se define en la Figura 4.16. La primera coordenada r está sólo a una distancia de P del origen; esto es, $r = |\mathbf{r}|$, como siempre. El ángulo θ es el ángulo entre **r** y el eje z. El ángulo ϕ, a menudo llamado **acimut**, es el ángulo del eje x hasta la proyección de **r** en el plano xy, como se muestra.[10] Es un sencillo ejercicio (Problema 4.40) relacionar las

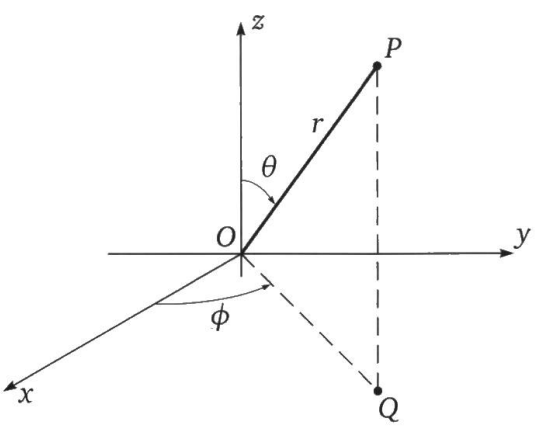


Figura 4.16. Las coordenadas polares esféricas (r, θ, ϕ) de un punto P se definen de tal manera que r es la distancia a P desde el origen, θ es el ángulo entre la línea OP y el eje z, y ϕ es el ángulo de la línea OQ desde el eje x, donde Q es la proyección P en el plano xy.

[10] No hay que olvidar que, aunque las definiciones que aquí se dan son siempre las usadas por los físicos, la mayoría de los textos matemáticos revierten los papeles de θ y ϕ.

coordenadas cartesianas (x, y, z) con las coordenadas polares (r, θ, ϕ) y viceversa. Por ejemplo, al observar la Figura 4.16 debería quedar claro que

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \qquad \text{y} \qquad z = r\cos\theta. \tag{4.68}$$

Una bonita manera de utilizar las coordenadas esféricas, y que puede servir para visualizarlas mejor, es determinar las posiciones en la superficie de la Tierra. Si escogemos como origen el centro de la Tierra, entonces todos los puntos en su superficie tienen el mismo valor de r, que es el radio de la tierra.[11] De este modo las posiciones en la superficie se pueden determinar simplemente con los dos ángulos (θ, ϕ). Si decidiéramos que nuestro eje z coincidiera con el eje polar norte, entonces es fácil ver en la Figura 4.16 que θ da la *latitud* del punto P, medido desde el polo norte hacia abajo. (Debido a que tradicionalmente la latitud se mide desde el ecuador hacia arriba, nuestro ángulo θ a menudo se llama *colatitud*). De manera similar, ϕ es la *longitud* medida al este del meridiano del eje x.

La afirmación de que una función $f(\mathbf{r})$ es esféricamente simétrica es sencillamente la afirmación de que, expresado $\mathbf{r}$ en polares esféricas, f es independiente de θ y ϕ. Esto es lo que queremos decir cuando escribimos $f(\mathbf{r}) = f(r)$; y la prueba de simetría esférica es sencillamente que las dos derivadas parciales $\partial f/\partial\theta$ y $\partial f/\partial\phi$ son ambas cero en todas partes.

Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ se definen de la manera habitual: primero, $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario que apunta en la dirección del movimiento si r aumenta con θ y ϕ fijos. Por lo tanto, como se muestra en la Figura 4.17, el vector $\hat{\mathbf{r}}$ que apunta de manera radial hacia fuera, es sólo el vector unitario en la dirección $\mathbf{r}$ como siempre. (En la superficie de la Tierra, $\hat{\mathbf{r}}$ apunta hacia arriba, en la dirección de la vertical local). De manera similar, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ apunta en la dirección θ que aumenta con r y ϕ fijos, esto es, en dirección sur a lo largo de una línea de longitud. Finalmente, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ apunta en la dirección ϕ que aumenta con r y θ fijos, esto es, en dirección este a lo largo de un círculo de latitud.

Como los tres vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ son mutuamente perpendiculares, podemos evaluar los productos escalares en coordenadas esféricas de la misma manera que con las cartesianas. De manera que, si

$$\mathbf{a} = a_r\hat{\mathbf{r}} + a_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + a_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

y

$$\mathbf{b} = b_r\hat{\mathbf{r}} + b_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + b_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

[11] En realidad, la Tierra no es una esfera perfecta, de manera que r no es del todo constante, pero esto no cambia la conclusión de que cualquier posición en la superficie de la Tierra puede determinarse con θ y ϕ.

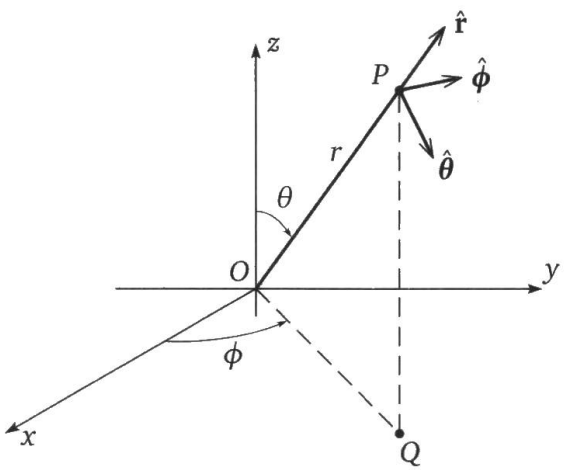


Figura 4.17. Los tres vectores unitarios de coordenadas polares esféricas en el punto P. El vector $\hat{\mathbf{r}}$ apunta hacia afuera de manera radial, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ apunta en dirección «sur» a lo largo de la línea de longitud, y $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ apunta en dirección «este» alrededor de un círculo de latitud.

entonces (compruebe que lo entiende con claridad)

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_r b_r + a_\theta b_\theta + a_\phi b_\phi. \tag{4.69}$$

Igual que los vectores unitarios de coordenadas polares bidimensionales, los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ varían con la posición, y tal como fue el caso con dos dimensiones, esta dependencia complica muchos cálculos que implican diferenciación, como ahora veremos.

El gradiente en coordenadas polares esféricas

Hemos visto que en coordenadas cartesianas las componentes de ∇f son precisamente las derivadas parciales de f con respecto a x, y y z,

$$\nabla f = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{4.70}$$

La expresión correspondiente para ∇f en coordenadas polares no es tan sencilla. Para encontrarla, recordemos de (4.35) que en un desplazamiento pequeño $d\mathbf{r}$, la variación en cualquiera de las funciones $f(\mathbf{r})$ es

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}. \tag{4.71}$$

Para evaluar el pequeño vector $d\mathbf{r}$ en coordenadas polares, debemos examinar con cuidado lo que le sucede al punto $\mathbf{r}$ cuando cambiamos r, θ y ϕ: una pequeña variación dr en r mueve el punto una distancia dr hacia fuera de manera radial, en la

dirección de $\hat{\mathbf{r}}$. Como se puede ver en la Figura 4.17, una pequeña variación $d\theta$ en θ mueve el punto alrededor del círculo de longitud (radio r) recorriendo una distancia $r\,d\theta$ en dirección $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. (Fíjese bien en el factor de r: la distancia no es sólo $d\theta$). De manera similar, una pequeña variación $d\phi$ en ϕ mueve el punto alrededor un círculo de latitud (radio $r \operatorname{sen}\theta$) a lo largo de una distancia $r \operatorname{sen}\theta\, d\phi$. Si ponemos todo esto junto, vemos que

$$d\mathbf{r} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r \operatorname{sen}\theta\, d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

Una vez que conocemos las componentes de $d\mathbf{r}$, podemos evaluar el producto escalar de (4.71) en términos de las componentes desconocidas de $\boldsymbol{\nabla} f$,

$$df = (\boldsymbol{\nabla} f)_r\, dr + (\boldsymbol{\nabla} f)_\theta\, r\,d\theta + (\boldsymbol{\nabla} f)_\phi\, r \operatorname{sen}\theta\, d\phi. \tag{4.72}$$

Mientras tanto, ya que f es una función de las tres variables r, θ, ϕ, la variación de f es por supuesto,

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi. \tag{4.73}$$

Comparando (4.72) y (4.73), podemos concluir que las componentes de $\boldsymbol{\nabla} f$ en polares esféricas son

$$(\boldsymbol{\nabla} f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \qquad (\boldsymbol{\nabla} f)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \qquad \text{y} \qquad (\boldsymbol{\nabla} f)_\phi = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} \tag{4.74}$$

o de manera un poco más compacta,

$$\boldsymbol{\nabla} f = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}. \tag{4.75}$$

Consideraciones similares pueden aplicarse al rotacional y otros operadores de cálculo vectorial, siendo todos mucho más complicados en coordenadas polares esféricas (y todas las demás coordenadas no cartesianas) que en coordenadas cartesianas. Como las fórmulas de estos operadores son muy difíciles de recordar, he hecho una lista de las más importantes en la contracubierta del libro. Las demostraciones pueden encontrarse en cualquier libro de texto sobre cálculo de vectores.

Fuerzas centrales conservativas y esféricamente simétricas

He afirmado anteriormente que una fuerza central es conservativa si y sólo si es esféricamente simétrica. Esta afirmación puede demostrase de varias maneras. Las más rápidas (aunque no necesariamente las más reveladoras) usan coordenadas polares esféricas. Supongamos primero que la fuerza central $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es conservativa e intentemos demostrar que tiene que ser esféricamente simétrica. Dado que es conservativa, puede expresarse de la forma $-\nabla U$, que según (4.75), tiene la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U = -\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial U}{\partial r} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} - \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}. \tag{4.76}$$

Ya que $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es central, únicamente su componente radial puede ser distinta de cero, y los dos últimos términos de (4.76) deben ser cero. Esto requiere que $\partial U/\partial\theta = \partial U/\partial\phi = 0$; esto es, $U(\mathbf{r})$ es esféricamente simétrica, y (4.76) se reduce a

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial U}{\partial r}.$$

Como U es esféricamente simétrica (sólo depende de r), lo mismo también es cierto sobre $\partial U/\partial r$, y vemos que la fuerza central $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es realmente esféricamente simétrica. Dejaré la prueba del resultado inverso, que una fuerza central que es esféricamente simétrica es necesariamente conservativa, para los problemas del final del capítulo. (Vea los Problemas 4.43 y 4.44, pero la prueba más sencilla calca casi a la perfección el análisis de la fuerza de Coulomb en el Ejemplo 4.5).

La importancia de estos resultados es la siguiente: primero porque una fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ que es simétrica tanto central como esféricamente tiene un magnitud que sólo depende de r, es casi unidimensional; segundo, aunque $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ desde luego no es una fuerza unidimensional (su *dirección* aún depende de θ y ϕ), veremos en el Capítulo 8 que cualquier problema que implique este tipo de fuerza es matemáticamente equivalente a un determinado problema unidimensional relacionado.

4.9 Energía de interacción de dos partículas

Casi toda nuestra discusión sobre la energía se ha centrado en la energía de una sola partícula (o cualquier otro objeto más grande que pueda aproximarse a una partícula). Ha llegado el momento de extender esta discusión a sistemas de varias partículas, y naturalmente empezaré con sólo dos partículas. En esta sección, supondré que las dos partículas interaccionan mediante las fuerzas $\mathbf{F}_{12}$ (sobre la partícula 1 ejercida por la partícula 2) y $\mathbf{F}_{21}$ (sobre la partícula 2 ejercida por la partícula 1),

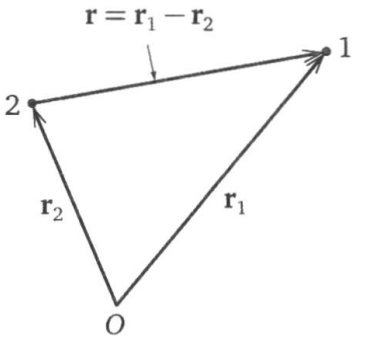


Figura 4.18. El vector **r** que apunta a la partícula 1 desde la partícula 2 es justo $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$.

pero que no existen otras fuerzas externas. En general, la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ puede depender de las posiciones de ambas partículas, así que se podría escribir como

$$\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2),$$

y por la tercera ley de Newton

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

Como ejemplo de tal sistema de dos partículas podríamos considerar una estrella binaria aislada, en cuyo caso las únicas dos fuerzas son la atracción gravitatoria de cada estrella hacia la otra. Si denotamos el vector que apunta a la estrella 1 desde la estrella 2 por **r**, como en la Figura 4.18, la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ es justo la conocida

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r}.$$

El vector **r** se puede escribir en términos de las dos posiciones $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$. De hecho, como se puede ver en la Figura 4.18,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Por tanto la fuerza $\mathbf{F}_{12}$, expresada como una función de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, es

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{4.77}$$

Una importante propiedad de la fuerza (4.77) es que depende de las dos posiciones $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ sólo a través de la particular combinación $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Esta propiedad no es casualidad, y es de hecho cierta para cualquier sistema de dos partículas aislado. La razón es que cualquier sistema aislado debe ser **traslacionalmente invariante**:

si trasladamos en masa el sistema a una nueva posición, sin cambiar las posiciones relativas de las partículas, las fuerzas entre las partículas deberían permanecer iguales. Esto está ilustrado en la Figura 4.19, la cual muestra un par de puntos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ y un segundo par de puntos $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$, con $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Como los dos puntos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ podrían ser trasladados simultáneamente a $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$, la fuerza $\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ debe ser la misma que $\mathbf{F}_{12}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ para *cualquier* punto que satisfaga $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$. En otras palabras, $\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ depende sólo de $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, como se había requerido, y podemos escribir

$$\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{4.78}$$

El resultado (4.78) simplifica enormemente nuestra discusión. Podemos aprender casi cualquier cosa sobre la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ situando $\mathbf{r}_2$ en cualquier punto conveniente. En particular, fijemos temporalmente $\mathbf{r}_2$ en el origen, en cuyo caso (4.78) se reduce a sólo $\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1)$. (Esta maniobra consiste en trasladar ambas partículas hasta que la partícula 2 está en el origen, y sabemos que la fuerza no se ve afectada por cualquier traslación de este tipo). Con $\mathbf{r}_2$ fijo, ahora aplica nuestra discusión de la fuerza sobre una única partícula. Por ejemplo, si la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ sobre la partícula 1 va a ser conservativa, entonces debe cumplir

$$\nabla_1 \times \mathbf{F}_{12} = 0 \tag{4.79}$$

donde ∇_1 es el operador diferencial

$$\nabla_1 = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y_1} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z_1}$$

con respecto a las coordenadas (x_1, y_1, z_1) de la partícula 1. Si (4.79) se cumple, podemos definir una energía potencial $U(\mathbf{r}_1)$ tal que la fuerza sobre la partícula 1 es

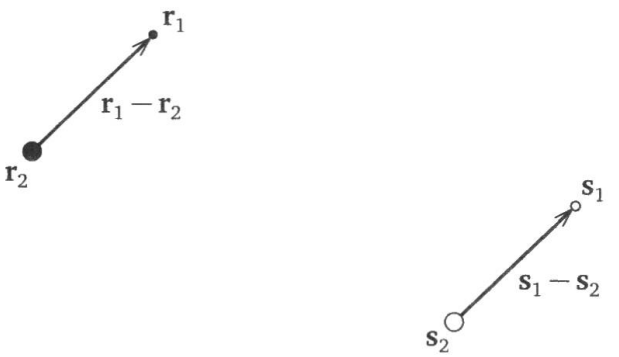


Figura 4.19. Si $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$, entonces las dos partículas en $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ se podrían trasladar en conjunto a $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ sin afectar a sus posiciones relativas. Esto significa que la fuerza entre las partículas en $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ debe ser la misma que aquella en $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$.

$$\mathbf{F}_{12} = -\nabla_1 U(\mathbf{r}_1).$$

Esto proporciona la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ para el caso en que la partícula 2 está en el origen. Para hallarla cuando la partícula 2 está en cualquier otro sitio sólo tenemos que trasladarla de nuevo a una posición arbitraria sustituyendo $\mathbf{r}_1$ por $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ para llegar a

$$\mathbf{F}_{12} = -\nabla_1 U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{4.80}$$

Advierta que no tengo que cambiar el operador ∇_1, porque un operador como $\partial/\partial x_1$ permanece igual cuando le añadimos una constante a x_1.

Para encontrar la fuerza de reacción $\mathbf{F}_{21}$ sobre la partícula 2, sólo tenemos que invocar la tercera ley de Newton, que dice que $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. Esto es, sólo tenemos que cambiar el signo de (4.80). Podemos volver a expresar esto dándonos cuenta de que

$$\nabla_1 U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\nabla_2 U(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2), \tag{4.81}$$

donde ∇_2 denota el gradiente con respecto a las coordenadas de la partícula 2. (Para probar esto, utilizar la regla de la cadena. Vea el Problema 4.50). Así que, en vez de cambiar el signo de (4.80) para encontrar $\mathbf{F}_{21}$, podemos simplemente reemplazar ∇_1 por ∇_2 para llegar a

$$\mathbf{F}_{21} = -\nabla_2 U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{4.82}$$

Las Ecuaciones (4.80) y (4.82) son un bonito resultado que se generaliza a sistemas de muchas partículas. Para enfatizar lo que dicen, las voy a reescribir como

$$\left.\begin{aligned}(\text{Fuerza sobre la partícula 1}) &= -\nabla_1 U \\ (\text{Fuerza sobre la partícula 2}) &= -\nabla_2 U.\end{aligned}\right\} \tag{4.83}$$

Existe una *única* función energía potencial U, a partir de la cual podemos obtener *ambas* fuerzas. Para hallar la fuerza sobre la partícula 1, tomamos simplemente el gradiente de U con respecto a las coordenadas de la partícula 1; para hallar la fuerza sobre la partícula 2, podemos tomar el gradiente con respecto a las coordenadas de la partícula 2.

Antes de generalizar este resultado a sistemas de muchas partículas, consideremos la conservación de la energía para nuestro sistema de dos partículas. La Figura 4.20 muestra las órbitas de las dos partículas. Durante un corto intervalo de tiempo dt, la partícula 1 se mueve a través de $d\mathbf{r}_1$ y la partícula 2 a través de $d\mathbf{r}_2$, y el trabajo es realizado sobre las dos partículas por las fuerzas correspondientes. Por el teorema Trabajo-EC

$$dT_1 = (\text{trabajo sobre 1}) = d\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{F}_{12}$$

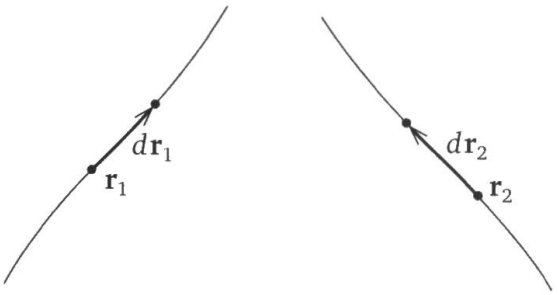


Figura 4.20. Movimiento de dos partículas que interaccionan. Durante un corto intervalo de tiempo dt, la partícula 1 se mueve desde $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_1$ y la partícula 2 desde $\mathbf{r}_2$ a $\mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_2$.

y análogamente

$$dT_2 = (\text{trabajo sobre 2}) = d\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{F}_{21}.$$

Sumando estas ecuaciones encontramos para la variación en la energía cinética *total* $T = T_1 + T_2$,

$$\begin{aligned} dT = dT_1 + dT_2 &= (\text{trabajo sobre 1}) + (\text{trabajo sobre 2}) \\ &= W_{\text{tot}} \end{aligned} \tag{4.84}$$

donde

$$W_{\text{tot}} = d\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{F}_{12} + d\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{F}_{21}$$

denota el trabajo total realizado sobre ambas partículas. Sustituyendo $\mathbf{F}_{21}$ por $-\mathbf{F}_{12}$ y después sustituyendo $\mathbf{F}_{12}$ por (4.80), podemos reescribir W_{tot} como

$$W_{\text{tot}} = (d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{F}_{12} = d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot [-\nabla_1 U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]. \tag{4.85}$$

Si renombramos $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ como $\mathbf{r}$, entonces el lado derecho de esta ecuación se puede ver exactamente como (el opuesto de) la variación de la energía potencial, y encontramos que[12]

$$W_{\text{tot}} = -d\mathbf{r} \cdot \nabla U(\mathbf{r}) = -dU \tag{4.86}$$

donde el último paso se sigue de la propiedad (4.35) del operador gradiente. Vale la pena pararse a apreciar este importante resultado. El trabajo total W_{tot} es la suma de los dos términos, el trabajo realizado por $\mathbf{F}_{12}$ cuando la partícula 1 se mueve a través

[12] Si se invoca la regla de la cadena para la diferenciación, se puede ver que no hay ninguna diferencia entre escribir $\nabla_1 U(\mathbf{r})$ o $\nabla U(\mathbf{r})$.

de $d\mathbf{r}_1$ *más* el trabajo realizado por $\mathbf{F}_{21}$ cuando la partícula 2 se mueve a través de $d\mathbf{r}_2$. De acuerdo con (4.86), la energía potencial U tiene en cuenta estos dos términos y W_{tot} es simplemente $-dU$.

Volviendo a la energía cinética total, vemos ahora que según (4.84) la variación dT es exactamente $-dU$. Pasando el término dU al otro lado, concluimos que

$$d(T+U)=0.$$

Esto es, la energía total,

$$E=T+U=T_1+T_2+U, \tag{4.87}$$

de nuestro sistema de dos partículas se conserva. Quede claro que la energía total de nuestras dos partículas contiene *dos* términos cinéticos (por supuesto), pero sólo *un* término potencial, porque U tiene en cuenta el trabajo realizado por las dos fuerzas $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{21}$.

Colisiones elásticas

Las colisiones elásticas proporcionan una aplicación sencilla de estas ideas. Una colisión elástica es una colisión entre dos partículas (o cuerpos que se pueden tratar como partículas) que interaccionan mediante una fuerza conservativa que tiende a cero cuando su separación $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ aumenta. Como la fuerza tiende a cero cuando $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\to\infty$, la energía potencial $U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ tiende a una constante, la cual se puede tomar como cero también. Por ejemplo, las dos partículas podrían ser un electrón y un protón, o podrían ser dos bolas de billar. Que la fuerza entre dos bolas de billar es conservativa no es obvio, pero es un hecho que las bolas de billar se fabrican de tal manera que se comportan como muelles perfectos (es decir, conservativos) cuando chocan. Es ciertamente fácil pensar en otros objetos (tales como porciones de masilla), para los cuales la fuerza entre ellos no es conservativa, y las colisiones de tales objetos no son elásticas.

En una colisión, las dos partículas comienzan muy separadas, se aproximan la una a la otra, y entonces se vuelven a separar otra vez. Puesto que las fuerzas son conservativas, la energía total se conserva; esto es, $T+U=$ constante (donde, por supuesto, $T=T_1+T_2$). Pero cuando las partículas están muy separadas, U es cero. Por tanto si usamos los subíndices «in» y «fin» para etiquetar las situaciones inicial y final, es decir, antes y después de que las partículas se juntan, la conservación de la energía implica que

$$T_{\text{in}}=T_{\text{fin}}. \tag{4.88}$$

En otras palabras, una colisión elástica se puede caracterizar como una colisión en la que dos partículas se juntan y se separan con su energía cinética total inalterada. Sin embargo, es importante recordar que no existe un principio de conservación de la energía cinética. Por el contrario, cuando las partículas están muy cerca su EP es distinta de cero y su EC está ciertamente cambiando. Es sólo cuando están bien separadas que la EP es despreciable y la conservación de la energía conduce al resultado (4.88).

La discusión anterior puede sugerir que las colisiones elásticas deberían ser muy comunes. Sólo se necesitan dos partículas cuya interacción sea conservativa. En la práctica, las colisiones elásticas no están tan ampliamente extendidas como esto parece implicar. El problema viene del requerimiento de que sean dos *partículas* que entren y salgan de la colisión. Por ejemplo, si lanzamos con energía suficiente una bola de billar contra una segunda bola, las dos bolas pueden hacerse añicos. Análogamente, si lanzamos un electrón con energía suficiente contra un átomo, el átomo puede desmoronarse o, al menos, cambiar el movimiento interno de sus constituyentes. Incluso en la colisión de dos partículas genuinas, tales como un electrón y un protón, la relatividad nos dice que, con energía suficiente, se pueden crear nuevas partículas. A energías suficientemente altas, la suposición de que los dos objetos que colisionan pueden modelarse como partículas indivisibles claramente no funciona, y no podemos suponer que las colisiones serán elásticas, incluso si todas las fuerzas subyacentes son conservativas. Sin embargo, a energías razonablemente bajas hay muchas situaciones en las que las colisiones son perfectamente elásticas: a una energía suficientemente baja, las colisiones de un electrón con un átomo siempre lo son, y con una buena aproximación, lo mismo es cierto para las bolas de billar. Las colisiones elásticas proporcionan varias ilustraciones sencillas de los usos de la conservación de la energía y del momento, uno de los cuales es el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.8 *Masa equivalente, colisión elástica*

Consideremos una colisión elástica entre dos partículas de igual masa, $m_1 = m_2 = m$ (por ejemplo, dos electrones o dos bolas de billar), como se muestra en la Figura 4.21. Demostremos que si la partícula 2 se encuentra en reposo inicialmente, entonces el ángulo entre las dos velocidades salientes es $\theta = 90°$.

La conservación del momento implica que $m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v}'_1 + m\mathbf{v}'_2$ o bien

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2. \tag{4.89}$$

Que la colisión sea elástica implica que $\frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_2'^2$ o bien

$$\mathbf{v}_1^2 = \mathbf{v}_1'^2 + \mathbf{v}_2'^2.$$

Elevando al cuadrado (4.89), obtenemos

$$\mathbf{v}_1^2 = \mathbf{v}_1'^2 + 2\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' + \mathbf{v}_2'^2,$$

y comparando las dos últimas ecuaciones vemos que

$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' = 0;$$

esto es, $\mathbf{v}_1'$ y $\mathbf{v}_2'$ son perpendiculares (a no ser que uno de ellos sea cero, en cuyo caso el ángulo entre ellos no está definido). Este resultado era útil en física atómica y nuclear; cuando un proyectil desconocido golpeaba una partícula estacionaria, el hecho de que ambos aparecieran viajando a 90° se tomaba como evidencia de que la colisión era elástica y que las dos partículas tenían masas iguales.

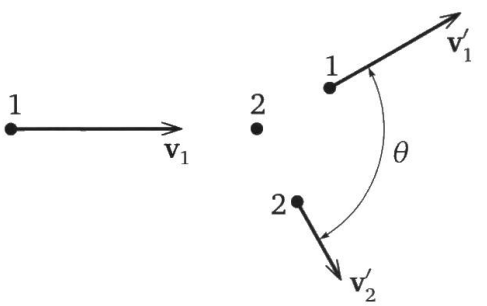


Figura 4.21. Colisión elástica entre dos partículas de masa equivalente. La partícula 1 entra con velocidad $\mathbf{v}_1$ y colisiona con la partícula estacionaria 2. El ángulo entre las dos velocidades finales $\mathbf{v}_1'$ y $\mathbf{v}_2'$ es θ.

4.10 Energía de un sistema de muchas partículas

Podemos ampliar la discusión sobre dos partículas a N partículas con bastante facilidad. La principal complicación es la notación: el gran número de signos $\sum$ puede dificultar la comprensión de lo que está pasando. Por esta razón, empezaré hablando del caso de cuatro partículas ($N = 4$) y escribiré todas las sumas de manera explícita.

Cuatro partículas

Consideremos cuatro partículas como las mostradas en la Figura 4.22. Las partículas pueden interaccionar unas con otras (por ejemplo, podrían estar cargadas y cada una de ellas experimentar la fuerza de Coulomb de las otras tres), y pueden estar sujetas a fuerzas externas, como la gravedad o la fuerza de Coulomb de cuerpos cercanos

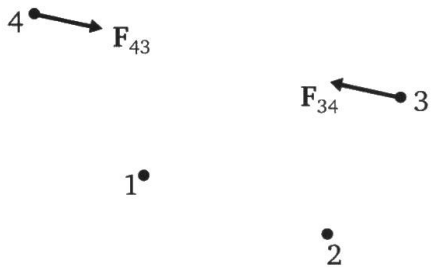


Figura 4.22. Un sistema de cuatro partículas $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Para cada par de partículas, $\alpha\beta$, existe una acción-reacción de un par de fuerzas, $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ y $\mathbf{F}_{\beta\alpha}$, como el par $\mathbf{F}_{34}$ y $\mathbf{F}_{43}$ mostrados. Además, cada partículaα puede estar sujeta a una fuerza externa neta $\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$. Las cuatro partículas podrían cargarse de motas de polvo que flotan en el aire, con las fuerzas $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ siendo electrostáticas y $\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$ siendo la gravedad, además de la sustentación del aire.

cargados. Al definir la energía de este sistema, la parte sencilla es la fuerza cinética T, que, por supuesto, es la suma de cuatro términos,

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \tag{4.90}$$

un término $T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$ para cada partícula.

Para definir la energía potencial, debemos examinar las fuerzas que actúan sobre las partículas. En primer lugar, existen las fuerzas internas de las cuatro partículas que interaccionan entre ellas. Para cada par de partículas, hay un par de fuerzas de acción-reacción; por ejemplo, las partículas 3 y 4 producen las fuerzas $\mathbf{F}_{34}$ y $\mathbf{F}_{43}$ mostradas en la Figura 4.22. Daré por sentado que cada una de estas fuerzas entre partículas $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ no se ve afectada por la presencia de las otras partículas ni por cuerpos externos. Por ejemplo, $\mathbf{F}_{34}$ es la misma aunque si retirásemos las partículas 1 y 2 y todos los cuerpos externos.[13] Por lo tanto, podemos tratar ambas fuerzas $\mathbf{F}_{34}$ y $\mathbf{F}_{43}$ exactamente igual que en la Sección 4.9. Siempre que las fuerzas sean conservativas, podemos definir una energía potencial

$$U_{34} = U_{34}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \tag{4.91}$$

y las fuerzas correspondientes son los gradientes apropiados como en (4.83)

$$\mathbf{F}_{34} = -\boldsymbol{\nabla}_3 U_{34} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}_{43} = -\boldsymbol{\nabla}_4 U_{34}. \tag{4.92}$$

[13] Este punto es muy sutil. Por supuesto, no niego que las otras partículas ejercen fuerzas adicionales sobre la partícula 3. Sólo afirmo que la fuerza de la partícula 4 sobre la partícula 3 es independiente de la presencia o ausencia de las partículas 1 y 2 y cualquier otro cuerpo externo. Uno podría imaginarse un mundo donde esta afirmación fuera falsa (la presencia de la partícula 1 de alguna manera podría cambiar la fuerza de la 4 sobre la 3), pero la experiencia parece confirmar que en nuestro mundo mi afirmación es cierta.

Existen en total seis pares diferenciados de partículas, 12, 13, 14, 23, 24, 34, y para cada par podemos definir la energía potencial correspondiente $U_{12}, \ldots, U_{34}$, y a partir de ellas se obtienen de la misma manera las fuerzas correspondientes.

Cada una de las fuerzas externas $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$ depende únicamente de la posición correspondiente $\mathbf{r}_\alpha$. (La fuerza $\mathbf{F}_1^{\text{ext}}$, por ejemplo, depende de la posición $\mathbf{r}_1$, pero no de $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_4$). Por lo tanto, podemos manejar $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$ de la misma manera que hicimos con la fuerza sobre una sola partícula. Especialmente, si $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$ es conservativa, podemos introducir una energía potencial $U_\alpha^{\text{ext}}(\mathbf{r}_\alpha)$ y la fuerza correspondiente viene dada por

$$\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} = -\boldsymbol{\nabla}_\alpha U_\alpha^{\text{ext}}(\mathbf{r}_\alpha) \tag{4.93}$$

donde, por supuesto, $\boldsymbol{\nabla}_\alpha$ denota una derivación respecto a las coordenadas de la partícula α.

Ahora podemos juntar todas las energías potenciales y definir el total de energía potencial como la suma

$$\begin{aligned} U = U^{\text{int}} + U^{\text{ext}} &= (U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}) \\ &\quad + (U_1^{\text{ext}} + U_2^{\text{ext}} + U_3^{\text{ext}} + U_4^{\text{ext}}). \end{aligned} \tag{4.94}$$

En esta definición, U^{int} es la suma a todos los seis pares de partículas de las correspondientes energías potenciales emparejadas, $U_{12}, \ldots, U_{34}$, y U^{ext} es la suma de las cuatro energías potenciales, $U_1^{\text{ext}}, \ldots, U_4^{\text{ext}}$ que surgen de las fuerzas externas.

Es bastante sencillo demostrar que (vea el Problema 4.51 para más detalles) la fuerza sobre una partícula α es sólo (el opuesto de) el gradiente de U con respecto a las coordenadas $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$. Consideremos, por ejemplo, el gradiente $-\boldsymbol{\nabla}_1 U$. Cuando $-\boldsymbol{\nabla}_1$ actúa sobre la primera línea de (4.94), su acción sobre los primeros tres términos, $U_{12} + U_{13} + U_{14}$ proporciona precisamente las tres fuerzas internas, $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{14}$. Actuando en los tres últimos términos, $U_{23} + U_{24} + U_{34}$, produce cero, ya que ninguno de estos depende de $\mathbf{r}_1$. Cuando $-\boldsymbol{\nabla}_1$ actúa sobre la segunda línea de (4.94), su acción sobre el primer término, U_1^{ext}, produce la fuerza externa $\mathbf{F}_1^{\text{ext}}$. Actuando sobre los últimos tres términos produce cero, ya que ninguno depende de $\mathbf{r}_1$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\nabla}_1 U &= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{14} + \mathbf{F}_1^{\text{ext}} \\ &= (\text{fuerza neta sobre la partícula 1}). \end{aligned} \tag{4.95}$$

Exactamente de la misma manera, podemos demostrar que en general

$$-\boldsymbol{\nabla}_\alpha U = (\text{fuerza neta sobre la partícula } \alpha) \tag{4.96}$$

tal y como se esperaba.

La segunda propiedad crucial de nuestra definición de energía potencial U es que (siempre que todas las fuerzas involucradas sean conservativas, de tal manera que podamos definir U), la energía total, definida como $E = T + U$, se conserva. Ahora demostramos esto de la manera que nos es familiar (para más detalles, consulte el Problema 4.52). Primero aplicamos el teorema Trabajo-EC a cada una de las cuatro partículas y sumamos los resultados para mostrar que, en cualquier intervalo temporal pequeño, $dT = W_{\text{tot}}$, donde W_{tot} denota el trabajo total realizado por todas las fuerzas sobre todas las partículas. Después demostramos que $W_{\text{tot}} = -dU$, y concluimos que $dT = -dU$, y por tanto

$$dE = dT + dU = 0.$$

Esto es, la energía se conserva.

N partículas

La extensión de estas ideas a un número arbitrario de partículas es ahora bastante directa, y escribiré simplemente las fórmulas principales. Para N partículas, llamadas $\alpha = 1, \ldots, N$, la energía cinética total es justo la suma de las N energías cinéticas separadas

$$T = \sum_{\alpha} T_{\alpha} = \sum_{\alpha} \tfrac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2.$$

Suponiendo que todas las fuerzas son conservativas, para cada par de partículas, $\alpha\beta$, introducimos la energía potencial $U_{\alpha\beta}$ que describe su interacción, y para cada partícula α introducimos la energía potencial U_{α}^{ext} que describe la fuerza externa neta sobre esa partícula. La energía potencial total es entonces

$$U = U^{\text{int}} + U^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta > \alpha} U_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha} U_{\alpha}^{\text{ext}}. \tag{4.97}$$

(Aquí la condición $\beta > \alpha$ en la doble suma asegura que no contemos dos veces las interacciones internas $U_{\alpha\beta}$. Por ejemplo, incluimos U_{12} pero no U_{21}).

Con la energía potencial U definida de esta manera, la fuerza neta sobre cualquier partícula α está dada por $-\nabla_{\alpha} U$, como en la ecuación (4.96), y la energía total $E = T + U$ se conserva. Finalmente, si cualquiera de las fuerzas son no conservativas, podemos definir U como la energía potencial correspondiente a las fuerzas conservativas y después mostrar que, en este caso, $dE = W_{\text{nc}}$ donde W_{nc} es el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas.

Cuerpos rígidos

Mientras que el formalismo de las dos últimas secciones es bastante general y complicado, quizá se agradece que la mayoría de las aplicaciones del formalismo son mucho más sencillas que el propio formalismo. Como un simple ejemplo, consideremos un cuerpo rígido, tal como una pelota de golf o un meteorito, formado por N átomos. El número N es típicamente muy grande, pero el formalismo de la energía recién desarrollado normalmente resulta ser muy sencillo. Como probablemente se recuerde de física elemental, la energía cinética total de las N partículas juntas unidas rígidamente es exactamente la energía cinética del movimiento del centro de masa más la energía cinética de rotación. (Demostraré esto en el Capítulo 10, pero de momento lo aceptaremos). La energía potencial de las fuerzas internas interatómicas está dada por (4.97) es

$$U^{\text{int}} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta>\alpha} U_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta). \tag{4.98}$$

Si las fuerzas interatómicas son centrales (como normalmente es el caso), entonces, como vimos en la Sección 4.8, la energía potencial $U_{\alpha\beta}$ realmente depende sólo de la magnitud de $\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta$ (no de su dirección). Por tanto podemos reescribir (4.98) como

$$U^{\text{int}} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta>\alpha} U_{\alpha\beta}\,(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|\,). \tag{4.99}$$

Ahora bien, cuando un cuerpo rígido se mueve, las posiciones $\mathbf{r}_\alpha$ de sus átomos constituyentes pueden, por supuesto, moverse, pero la distancia $|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|$ entre dos átomos cualesquiera no puede cambiar. (Esta es, de hecho, la definición de un cuerpo rígido). Por tanto, si el cuerpo en cuestión es realmente rígido, ninguno de los términos de (4.99) puede cambiar. Es decir, la energía potencial U^{int} de las fuerzas internas es constante y puede, por tanto, ignorarse. Entonces, aplicando consideraciones de energía a un cuerpo rígido podemos ignorar completamente U^{int} y preocuparnos solamente de la energía U^{ext} correspondiente a las fuerzas externas. Como esta última energía es muchas veces una función muy simple (vea el siguiente ejemplo), las consideraciones de energía como las aplicadas a un cuerpo rígido son normalmente muy directas.

Ejemplo 4.9 *Un cilindro rueda hacia abajo por un plano inclinado*

Un cilindro rígido uniforme de radio R rueda sin deslizar hacia abajo por una pista inclinada como se muestra en la Figura 4.23. Usemos la conservación de la energía para hallar su velocidad v cuando alcanza una altura vertical h por debajo de su punto de partida.

De acuerdo con la discusión anterior podemos ignorar las fuerzas internas que mantienen unido el cilindro. Las fuerzas externas sobre el cilindro son las fuerzas normal y de rozamiento de la rampa y la gravedad. Las dos primeras no realizan trabajo, y la gravedad es conservativa. Como seguramente se recuerde de introducciones elementales a la física, la energía potencial gravitatoria de un cuerpo extenso es la misma que la que tendría la misma masa concentrada en el centro de masa. (Vea el Problema 4.6). Por lo tanto,

$$U^{\text{ext}} = MgY,$$

donde Y es la altura del CM del cilindro medida desde algún nivel de referencia conveniente. La energía cinética del cilindro es $T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, donde I es su momento de inercia, $I = \frac{1}{2}MR^2$, y ω es su velocidad angular de rodamiento, $\omega = v/R$. Entonces la energía cinética final es

$$T = \tfrac{3}{4}Mv^2$$

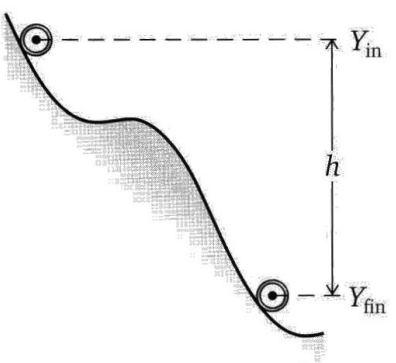


Figura 4.23. Un cilindro uniforme inicialmente en reposo comienza a rodar sin deslizar hacia abajo por una pendiente con una caída vertical total $h = Y_{\text{in}} - Y_{\text{fin}}$ (con la coordenada Y del CM medida verticalmente hacia arriba).

y la EC inicial es cero. Por lo tanto, la conservación de la energía en la forma $\Delta T = -\Delta U^{\text{ext}}$ implica que

$$\tfrac{3}{4}Mv^2 = -Mg(Y_{\text{fin}} - Y_{\text{in}}) = Mgh$$

y por tanto que la velocidad final es

$$v = \sqrt{\frac{4gh}{3}}.$$

Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 4

Teorema Trabajo-EC

La variación en la EC de una partícula cuando se mueve del punto 1 al punto 2 es

$$\Delta T \equiv T_2 - T_1 = \int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \equiv W(1 \to 2) \qquad \text{[Ec. (4.7)]}$$

donde $T = \frac{1}{2}mv^2$ y $W(1 \to 2)$ es el trabajo realizado por la fuerza total $\mathbf{F}$ sobre una partícula y que viene definida por la integral precedente.

Fuerzas conservativas y energía potencial

Una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre una partícula es **conservativa** si **(i)** sólo depende de la posición de la partícula, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, y **(ii)** para cualesquiera dos puntos 1 y 2, el trabajo $W(1 \to 2)$ realizado por $\mathbf{F}$ es el mismo para todos los caminos que unen 1 y 2 (o de manera equivalente, $\nabla \times \mathbf{F} = 0$). [Secciones 4.2 y 4.4].

Si $\mathbf{F}$ es conservativa, podemos definir una **energía potencial** correspondiente de manera que

$$U(\mathbf{r}) = -W(\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r}) \equiv -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}' \qquad \text{[Ec. (4.13)]}$$

y

$$\mathbf{F} = -\nabla U. \qquad \text{[Ec. (4.33)]}$$

Si todas las fuerzas sobre una partícula son conservativas con sus correspondientes energías potenciales $U_1, \ldots, U_n$, entonces la **energía mecánica total**

$$E = T + U_1 + \cdots + U_n \qquad \text{[Ec. (4.22)]}$$

es constante. De manera más general, si también existen fuerzas no conservativas, $\Delta E = W_{\text{nc}}$, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas.

Fuerzas centrales

Una fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es **central** si en todas partes se dirige hacia, o desde, un «centro de fuerza». Si tomamos este último como el origen,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}. \qquad \text{[Ec. (4.65)]}$$

Una fuerza central es esféricamente simétrica $[f(\mathbf{r}) = f(r)]$ si y sólo si es conservativa. [Sec. (4.8)]

Energía de un sistema de muchas partículas

Si todas las fuerzas (internas y externas) de un sistema de muchas partículas son conservativas, la energía potencial total,

$$U = U^{\text{int}} + U^{\text{ext}} = \sum_{\alpha}\sum_{\beta>\alpha} U_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha} U_{\alpha}^{\text{ext}} \qquad \text{[Ec. (4.97)]}$$

satisface

$$\text{(fuerza neta sobre una partícula } \alpha) = -\nabla_\alpha U \qquad \text{[Ec. (4.96)]}$$

y

$$T + U = \text{ constante.} \qquad \text{[Problema 4.52]}$$

Problemas para el Capítulo 4

Los asteriscos indican el nivel aproximado de dificultad, desde los más fáciles (⋆) hasta los más difíciles (⋆ ⋆ ⋆).

Sección 4.1 Energía cinética y trabajo

4.1 ⋆ Escribiendo $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ en términos de sus componentes, demostrar que la regla del producto para la diferenciación también se aplica al producto escalar de dos vectores; esto es,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

4.2 ⋆ ⋆ Evaluar el trabajo realizado

$$W = \int_O^P \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_O^P (F_x\,dx + F_y\,dy) \qquad (4.100)$$

por la fuerza bidimensional $\mathbf{F} = (x^2, 2xy)$ a lo largo de los tres caminos que unen el origen con el punto $P = (1,1)$ como se muestra en la Figura 4.24(a) y que se definen de la siguiente manera: **(a)** Este camino va a lo largo del eje x hasta $Q = (1,0)$ y después directamente hacia arriba hasta P. (Dividir la integral en dos, $\int_O^P = \int_O^Q + \int_Q^P$). **(b)** En este camino $y = x^2$, y podemos sustituir el término dy en (4.100) por $dy = 2x\,dx$ y convertir la integral entera en una integral de x. **(c)** Este camino viene dado paramétricamente como $x = t^3, y = t^2$. En este caso reescribir x, y, dx y dy de (4.100) en términos de t y dt, y convertir la integral en una integral de t.

4.3 ⋆ ⋆ Hacer lo mismo que en el Problema 4.2, pero para la fuerza $\mathbf{F} = (-y, x)$ y para los tres caminos que unen P y Q mostrados en la Figura 4.24(b) y que se definen de la siguiente manera: **(a)** Este camino va directamente de $P = (1,0)$ al origen y después directamente a $Q = (0,1)$.

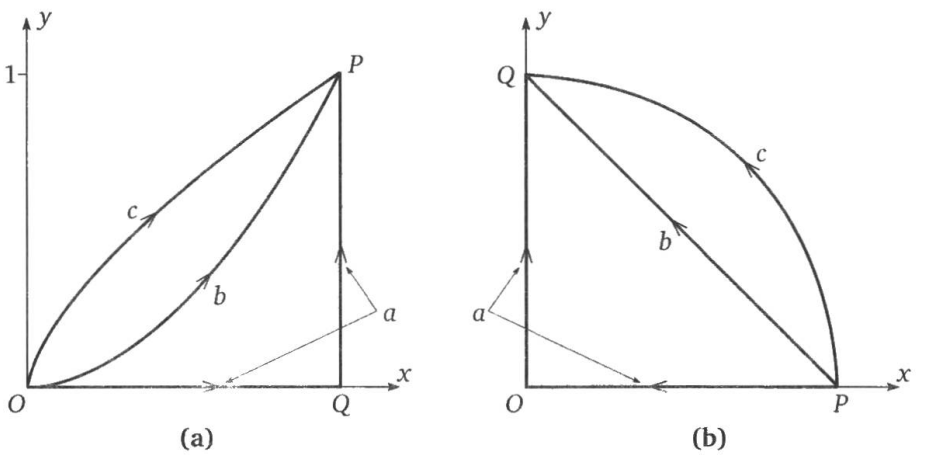


Figura 4.24. **(a)** Problema 4.2. **(b)** Problema 4.3.

(b) Esto es una línea recta de P a Q. (Escribir y como una función de x y reescribir la integral como una integral de x). **(c)** Esto es un cuarto de círculo centrado en el origen. (Escribir x y y en coordenadas polares y reescribir la integral como una integral de ϕ).

4.4 ⋆⋆ Una partícula de masa m se mueve sobre una mesa horizontal sin rozamiento, sujeta a un cordel sin masa y cuyo otro extremo pasa por un agujero en la mesa, donde yo estoy sujetándolo. Inicialmente la partícula se mueve en un círculo de radio r_0 con velocidad angular ω_0, pero ahora tiro del cordel por el agujero hasta que queda una longitud r entre el agujero y la partícula. **(a)** Ahora, ¿cuál es la velocidad angular de la partícula? **(b)** Suponiendo que tiro del cordel lo suficientemente despacio para que podamos aproximar el camino de la partícula mediante un círculo de radio decreciente, calcular el trabajo que he realizado al tirar del cordel. **(c)** Comparar la respuesta con la parte (b) de la ganancia de energía cinética de la partícula.

Sección 4.2 Energía potencial y fuerzas conservativas

4.5 ⋆ **(a)** Consideremos una masa m en un campo gravitatorio uniforme $\mathbf{g}$, de manera que la fuerza sobre m es $m\mathbf{g}$, donde $\mathbf{g}$ es un vector constante que apunta verticalmente hacia abajo. Si la masa se mueve por un camino arbitrario del punto 1 al punto 2, demostrar que el trabajo realizado por la gravedad es $W_{\text{grav}}(1 \to 2) = -mgh$ donde h es la altura vertical alcanzada entre los puntos 1 y 2. Utilizar este resultado para demostrar que la fuerza de la gravedad es conservativa (al menos en una región lo suficientemente pequeña para que $\mathbf{g}$ pueda considerarse constante). **(b)** Demostrar que si escogemos ejes con y medido verticalmente hacia arriba, la energía gravitatoria potencial es $U = mgy$ (si escogemos $U = 0$ como el origen).

4.6 ⋆ Para un sistema de N partículas sujeto a un campo gravitatorio uniforme $\mathbf{g}$ que actúa verticalmente hacia abajo, demostrar que la energía gravitatoria potencial total es la misma que si todas las masas estuvieran concentradas en el centro de masa del sistema; esto es,

$$U = \sum_\alpha U_\alpha = MgY$$

donde $M = \sum m_\alpha$ es la masa total y $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ es la posición del CM, con la coordenada y medida verticalmente hacia arriba. [*Ayuda:* Sabemos, por el Problema 4.5, que $U_\alpha = m_\alpha g y_\alpha$].

4.7 ⋆ Cerca del punto donde estoy de pie, sobre la superficie del Planeta X, la fuerza gravitatoria que actúa sobre una masa m se dirige verticalmente hacia abajo, pero tiene una magnitud $m\gamma y^2$ donde γ es una constante e y es la altura de la masa sobre el suelo horizontal. **(a)** Encontrar el trabajo realizado por la gravedad sobre una masa m que se mueve de $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$, y utilizar la respuesta para demostrar que la gravedad en el Planeta X, aunque muy inusual, es aún conservativa. Encontrar la energía potencial correspondiente. **(b)** Aún sobre el mismo planeta, inserto una cuenta de collar en un alambre rígido curvo y sin rozamiento, que se extiende desde el suelo hasta una altura de h sobre el mismo. Mostrar de manera clara en un dibujo las fuerzas que actúan sobre la cuenta cuando ésta se encuentra en algún punto del alambre. (Simplemente nombrar las fuerzas para tener claro cuáles son; no nos preocupemos de su magnitud). ¿Qué fuerzas son conservativas y cuáles no? **(c)** Si libero la cuenta desde el reposo desde una altura h, ¿a qué velocidad irá cuando llegue al suelo?

4.8 ⋆⋆ Consideremos un disco pequeño sin rozamiento colocado sobre una esfera fija de radio R. Si le damos un pequeño empujón al disco de manera que comience a deslizarse hacia abajo, ¿hasta qué altura vertical descenderá antes de abandonar la superficie de la esfera? [*Ayuda:* Utilizar la conservación de la energía para encontrar la velocidad del disco como una función de su altura y después usar la segunda ley de Newton para encontrar la fuerza normal de la esfera sobre el disco. ¿A qué valor de esta fuerza normal abandona el disco la esfera?]

4.9 ⋆⋆ **(a)** La fuerza que ejerce un muelle unidimensional, fijo por uno de sus extremos, es $F = -kx$, donde x es el desplazamiento del otro extremo desde su posición de equilibrio. Suponiendo que esta fuerza es conservativa (que sí lo es) demostrar que la energía potencial correspondiente es $U = \frac{1}{2}kx^2$, si escogemos U para que sea cero en la posición de equilibrio. **(b)** Supongamos que este

muelle cuelga verticalmente del techo con una masa m suspendida por el otro extremo. La masa sólo puede moverse verticalmente. Encontrar la extensión x_0 de la nueva posición de equilibrio con la masa suspendida. Demostrar que la energía potencial total (muelle más gravedad) tiene la misma forma $\frac{1}{2}ky^2$ que si usamos la coordenada y igual al desplazamiento medida desde la nueva posición de equilibrio $x = x_0$ (y redefinimos nuestro punto de referencia de manera que $U = 0$ en $y = 0$).

Sección 4.3 La fuerza como el gradiente de la energía potencial

4.10 ⋆ Encontrar las derivadas parciales respecto de x, y y z de las siguientes funciones: **(a)** $f(x,y,z) = ax^2 + bxy + cy^2$, **(b)** $g(x,y,z) = \text{sen}(axyz^2)$, **(b)** $h(x,y,z) = ae^{xy/z^2}$, donde a, b, y c son constantes. Al evaluar $\partial f/\partial x$ hay que recordar derivar con respecto a x tomando y y z como constantes.

4.11 ⋆ Hallar las derivadas parciales respecto de x, y y z de las siguientes funciones: **(a)** $f(x,y,z) = ay^2 + 2byz + cz^2$, **(b)** $g(x,y,z) = \cos(axy^2z^3)$, **(c)** $h(x,y,z) = ar$, donde a, b, y c son constantes y $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Recordar que para evaluar $\partial f/\partial x$ se diferencia con respecto a x tratando y y z como constantes.

4.12 ⋆ Calcular el gradiente ∇f de las siguientes funciones, $f(x,y,z)$: **(a)** $f = x^2 + z^3$. **(b)** $f = ky$, donde k es una constante. **(c)** $f = r \equiv \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. [*Ayuda:* Usar la regla de la cadena]. **(d)** $f = 1/r$.

4.13 ⋆ Calcular el gradiente ∇f de las siguientes funciones, $f(x,y,z)$: **(a)** $f = \ln(r)$, **(b)** $f = r^n$, **(c)** $f = g(r)$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y $g(r)$ es alguna función sin especificar de r. [*Ayuda:* Usar la regla de la cadena].

4.14 ⋆ Probar que si $f(\mathbf{r})$ y $g(\mathbf{r})$ son cualesquiera dos funciones escalares de $\mathbf{r}$, entonces

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

4.15 ⋆ Para $f(\mathbf{r}) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, usar la aproximación (4.35) para estimar la variación en f si nos movemos desde el punto $\mathbf{r} = (1,1,1)$ hasta el $(1{,}01, 1{,}03, 1{,}05)$. Comparar con el resultado exacto.

4.16 ⋆ Si la energía potencial de una partícula es $U(\mathbf{r}) = k(x^2+y^2+z^2)$, donde k es una constante, ¿cuál es la fuerza sobre la partícula?

4.17 ⋆ Una carga q en un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}_0$ experimenta una fuerza constante $\mathbf{F} = q\mathbf{E}_0$. **(a)** Mostrar que esta fuerza es conservativa y verificar que la energía potencial de la carga en la posición $\mathbf{r}$ es $U(\mathbf{r}) = -q\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{r}$. **(b)** Haciendo las derivadas necesarias, comprobar que $\mathbf{F} = -\nabla U$.

4.18 ⋆⋆ Usar la propiedad (4.35) del gradiente para probar los siguientes importantes resultados: **(a)** El vector ∇f en cualquier punto $\mathbf{r}$ es perpendicular a la superficie de f constante a través de $\mathbf{r}$. (Elegir un desplazamiento pequeño $d\mathbf{r}$ que esté sobre una superficie de f constante. ¿Qué es df para tal desplazamiento?) **(b)** La dirección de ∇f en cualquier punto $\mathbf{r}$ es la dirección en la cual f aumenta más rápido cuando nos alejamos de $\mathbf{r}$. (Elegir un desplazamiento pequeño$d\mathbf{r} = \epsilon\mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario y ϵ es fijo y pequeño. Encontrar la dirección de $\mathbf{u}$ para la que el correspondiente df es máximo, teniendo en cuenta que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\theta$).

4.19 ⋆⋆ **(a)** Describir las superficies definidas por la ecuación $f = \text{cte.}$, donde $f = x^2 + 4y^2$. **(b)** Usando los resultados del Problema 4.18, hallar un unitario normal a la superficie $f = 5$ en el punto $(1,1,1)$. ¿En qué dirección nos deberíamos mover desde este punto para maximizar la tasa de variación de f?

Sección 4.4 La segunda condición para que F sea conservativa

4.20 ⋆ Hallar el rotacional, $\nabla\times\mathbf{F}$, para las siguientes fuerzas: **(a)** $\mathbf{F} = k\mathbf{r}$; **(b)** $\mathbf{F} = (Ax, By^2, Cz^3)$; **(c)** $\mathbf{F} = (Ay^2, Bx, Cz)$, donde A, B, C y k son constantes.

4.21 ⋆ Verificar que la fuerza gravitatoria $-GMm\hat{\mathbf{r}}/r^2$ sobre una masa puntual m en $\mathbf{r}$, debida a una masa puntual M fija en el origen, es conservativa y calcular la energía potencial correspondiente.

4.22 ⋆ La prueba en el Ejemplo 4.5 (página 132) de que la fuerza de Coulomb es conservativa se simplifica considerablemente si evaluamos $\nabla \times \mathbf{F}$ usando coordenadas polares esféricas. Desafortunadamente, la expresión para $\nabla \times \mathbf{F}$ en coordenadas polares esféricas es bastante complicada y difícil de derivar. Sin embargo, la respuesta aparece en la contracubierta, y la prueba se puede encontrar en cualquier libro sobre cálculo vectorial o métodos matemáticos. Tomando la expresión que aparece en la contracubierta como cierta, probar que la fuerza de Coulomb $\mathbf{F} = \gamma\hat{\mathbf{r}}/r^2$ es conservativa.

4.23 ⋆⋆ ¿Cuáles de las siguientes fuerzas son conservativas? **(a)** $\mathbf{F} = k(x, 2y, 3z)$ donde k es una constante. **(b)** $\mathbf{F} = k(y, x, 0)$. **(c)** $\mathbf{F} = k(-y, x, 0)$. Para aquellas que lo sean, encontrar la correspondiente energía potencial U, y verificar por diferenciación que $\mathbf{F} = -\nabla U$.

4.24 ⋆⋆⋆ Una barra uniforme infinitamente larga de masa μ por unidad de longitud está situada en el eje z. **(a)** Calcular la fuerza gravitatoria $\mathbf{F}$ sobre una masa puntual m a una distancia ρ del eje z. (La fuerza gravitatoria entre dos masas puntuales está dada en el Problema 4.21). **(b)** Reescribir $\mathbf{F}$ en términos de las coordenadas rectangulares (x, y, z) del punto y verificar que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. **(c)** Mostrar que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ usando la expresión para $\nabla \times \mathbf{F}$ en las coordenadas polares cilíndricas dadas en el interior de la contracubierta. **(d)** Encontrar la energía potencial correspondiente U.

4.25 ⋆⋆⋆ La prueba de que la condición $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ garantiza la independencia del camino respecto del trabajo $\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ realizado por $\mathbf{F}$ es desafortunadamente demasiado tediosa para ser incluida aquí. Sin embargo, los tres siguientes ejercicios captan los puntos principales:[14] **(a)** Mostrar que la independencia del camino de $\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es equivalente a la afirmación de que la integral $\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ alrededor de cualquier trayectoria *cerrada* Γ es cero. (Por tradición, el símbolo $\oint$ se usa para integrales alrededor de una trayectoria cerrada: una trayectoria que empieza y termina en el mismo punto). [*Ayuda:*Para dos puntos cualesquiera 1 y 2 y cualesquiera dos trayectorias desde 1 hasta 2, considerar el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ en ir desde 1 hasta 2 por el primer camino y entonces otra vez hasta 1 por el segundo en la dirección opuesta]. **(b)** El teorema de Stokes afirma que $\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$, donde la integral de la derecha es una integral de superficie a una superficie para la cual el camino Γ es la frontera, y $\hat{\mathbf{n}}$ y dA son unitarios normales a la superficie y a un elemento de área. Mostrar que el teorema de Stokes implica que si $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ en todas partes, entonces $\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. **(c)** Mientras la prueba general del teorema de Stokes está fuera de nuestro alcance aquí, el siguiente caso especial es bastante fácil de probar (y es un paso importante hacia la prueba general). Sea Γ un camino rectangular cerrado que se apoya en un plano perpendicular a la dirección z y bordeado por las líneas $x = B$, $x = B + b$, $y = C$ e $y = C + c$. Para este camino simple (trazado en el sentido opuesto a las agujas del reloj cuando se ve desde arriba), probar el teorema de Stokes que

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$$

donde $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ y la integral de la derecha se evalúa en la zona plana rectangular dentro de Γ. [*Ayuda:* La integral de la izquierda contiene cuatro términos, dos de los cuales son integrales en x y dos en y. Si se emparejan de esta manera, se puede combinar cada par en una única integral con un integrando de la forma $F_x(x, C + c, z) - F_x(x, C, z)$ (o un término similar con los papeles de x e y intercambiados). Se puede reescribir este integrando como una integral en y de $\partial F_x(x, y, z)/\partial y$ (y análogamente con el otro término), y está hecho].

Sección 4.5 Energía potencial dependiente del tiempo

4.26 ⋆ Una masa m está en un campo gravitatorio uniforme, que ejerce la fuerza típica $F = mg$ verticalmente hacia abajo, pero con g variando con el tiempo, $g = g(t)$. Escogiendo ejes con y medida verticalmente hacia arriba y definiendo $U = mgy$ como siempre, mostrar que $\mathbf{F} = -\nabla U$ como siempre, pero, diferenciando $E = \frac{1}{2}mv^2 + U$ con respecto a t, mostrar que E no se conserva.

---

[14] Para una discusión completa consulte, por ejemplo, *Mathematical Methods*, Boas, Ch. 6, Secciones 8-11.

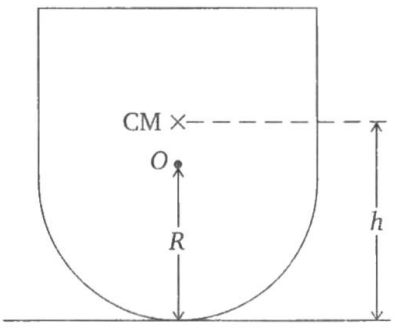


Figura 4.25. Problema 4.30.

4.27 ⋆ Suponer que la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ depende del tiempo t pero todavía cumple $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Es un hecho matemático (relacionado con el teorema de Stokes tal como se discutió en el Problema 4.25) que la integral de trabajo $\int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r}$ (evaluada en un tiempo cualquiera t) es independiente del camino tomado entre los puntos 1 y 2. Usar este hecho para mostrar que la EP dependiente del tiempo definida por (4.48), para un tiempo fijo t, tiene la propiedad requerida de que $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\nabla U(\mathbf{r}, t)$. ¿Se puede ver qué es lo que no funciona con el argumento que conduce a la ecuación (4.19), es decir, la conservación de la energía?

Sección 4.6 Energía para sistemas lineales unidimensionales

4.28 ⋆⋆ Consideremos una masa m sujeta al extremo de un muelle de constante elástica k y que está obligado a moverse a lo largo del eje x horizontal. Si situamos el origen en la posición de equilibrio del muelle, la energía potencial es $\frac{1}{2}kx^2$. En el instante $t = 0$ la masa, estando en el origen, recibe un golpe repentino hacia la derecha de manera que se mueve hasta un desplazamiento máximo de $x_{\text{max}} = A$ y después continúa oscilando alrededor del origen. **(a)** Escribir la ecuación para la conservación de la energía y resolverla para encontrar la velocidad de la masa $\dot{x}$ en términos de la posición x y de la energía total E. **(b)** Demostrar que $E = \frac{1}{2}kA^2$, y utilizar este resultado para eliminar E de la expresión para $\dot{x}$. Usar el resultado (4.58), $t = \int dx'/\dot{x}(x')$, para encontrar el tiempo que tarda la masa en moverse desde el origen hasta la posición x. **(c)** Resolver el resultado de la parte (b) para hallar x en función de t y demostrar que la masa ejecuta un movimiento armónico simple con período $2\pi\sqrt{m/k}$.

4.29 ⋆⋆ [Ordenador] Una masa m confinada al eje x tiene energía potencial $U = kx^4$ con $k > 0$. **(a)** Representar esta energía potencial y describir de manera cualitativa el movimiento si la masa fuera inicialmente estacionaria $x = 0$ y recibiera una patada hacia la derecha $t = 0$. **(b)** Usar (4.58) para encontrar el tiempo que tarda la masa en alcanzar su máximo desplazamiento $x_{\text{max}} = A$. Dar la respuesta como una integral de x en términos de m, A y k. Escribir también el período τ de las oscilaciones de amplitud A como una integral. **(c)** Haciendo un cambio adecuado de las variables de la integral, demostrar que el período τ es inversamente proporcional a la amplitud A. **(d)** La integral de la parte (b) no puede evaluarse en términos de funciones elementales, pero sí puede hacerse numéricamente. Encontrar el período para el caso de $m = k = A = 1$.

Sección 4.7 Sistemas curvilíneos unidimensionales

4.30 ⋆ La Figura 4.25 muestra el juguete de un niño, que tiene la forma de un cilindro colocado sobre un hemisferio. El radio del hemisferio es R y el CM de todo el juguete está a una altura h por encima del suelo. **(a)** Escribir la energía potencial gravitatoria si el juguete se inclina un ángulo θ desde la vertical. [Es necesario hallar la altura del CM como una función de θ. Esto ayuda a pensar primero en la altura del centro del hemisferio O mientras el juguete se inclina]. **(b)** ¿Para qué valores de R y h es el equilibrio de $\theta = 0$ estable?

4.31 ⋆ **(a)** Escribir la energía total E de las dos masas en la máquina de Atwood de la Figura 4.15 en términos de las coordenadas x y $\dot{x}$. **(b)** Demostrar (lo que es cierto para cualquier sistema conservativo de una dimensión) que se puede obtener la ecuación de movimiento para la coordenada

x diferenciando la ecuación $E =$ constante. Comprobar que la ecuación de movimiento es igual a la que se obtendría aplicando la segunda ley de Newton a cada una de las masas y eliminando la tensión desconocida de las dos ecuaciones resultantes.

4.32 ⋆⋆ Consideremos la cuenta de collar de la Figura 4.13 insertada en un alambre rígido curvo. La posición de la cuenta viene especificada por su distancia s, medida a lo largo del alambre desde el origen. **(a)** Demostrar que la velocidad de la cuenta v es justo $v = \dot{s}$. (Escribir $\mathbf{v}$ en términos de sus componentes, dx/dt, etc., y hallar su magnitud utilizando el teorema de Pitágoras). **(b)**Demostrar que $m\ddot{s} = F_{\text{tg}}$, es la componente tangencial de la fuerza neta sobre la cuenta. (Una manera de hacer esto es tomando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación $v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$. El primer miembro debería llevarnos hasta $\ddot{s}$ y el segundo hasta F_{tg}). **(c)** Una fuerza que actúa sobre la cuenta es la fuerza normal $\mathbf{N}$ del alambre (que obliga a la cuenta a permanecer insertada en el alambre). Si suponemos que todas las demás fuerzas (gravedad, etc.) son conservativas, entonces sus resultantes pueden derivarse de una energía potencial U. Demostrar que $F_{\text{tg}} = -dU/ds$. Esto demuestra que los sistemas de una dimensión de este tipo pueden abordarse de la misma manera que los sistemas lineales, reemplazando x por s y F_x por F_{tg}.

4.33 ⋆⋆ [Ordenador] **(a)** Verificar la expresión (4.59) para la energía potencial del cubo que se balancea sobre un cilindro en el Ejemplo 4.7 (página 144). **(b)** Determinar $U(\theta)$ para $b = 0{,}9r$ y $b = 1{,}1r$. (Pueden escogerse unidades tales que r, m y g son iguales a 1). **(c)** Usar estos puntos para confirmar el resultado del Ejemplo 4.7 en cuanto a la estabilidad del equilibrio en $\theta = 0$. ¿Existen otros puntos de equilibrio? ¿Son estables?

4.34 ⋆⋆ Un interesante sistema de una dimensión es el péndulo simple, que consiste en un punto de masa m, fijado al extremo de un cordel sin masa (longitud l), y cuyo otro extremo se encuentra sujeto al techo de manera que pueda girar libremente sobre un plano vertical, como se muestra en la Figura 4.26. La posición del péndulo puede determinarse por el ángulo ϕ hasta la posición de equilibrio. (Podría también determinarse por la distancia s desde el equilibrio, desde luego $s = l\phi$, pero en este caso el ángulo es un poco más adecuado). **(a)** Demostrar que la energía potencial del péndulo (medida desde el nivel de equilibrio) es

$$U(\phi) = mgl(1 - \cos\phi). \tag{4.101}$$

Escribir la energía total E como una función de ϕ y $\dot{\phi}$. **(b)** Demostrar que diferenciando la expresión para E con respecto a t se puede obtener la ecuación de movimiento de ϕ y que esta ecuación de movimiento es la conocida $\Gamma = I\alpha$ (donde Γ es el par, I es el momento de inercia, y α es la aceleración angular $\ddot{\phi}$). **(c)** Suponiendo que el ángulo ϕ permanece pequeño durante el movimiento, resolver para $\phi(t)$ y demostrar que el movimiento es periódico con período

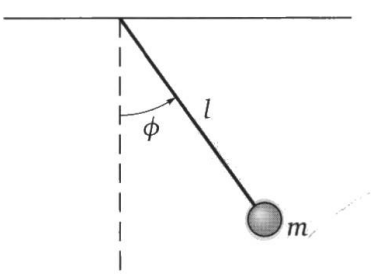


Figura 4.26. Problema 4.34.

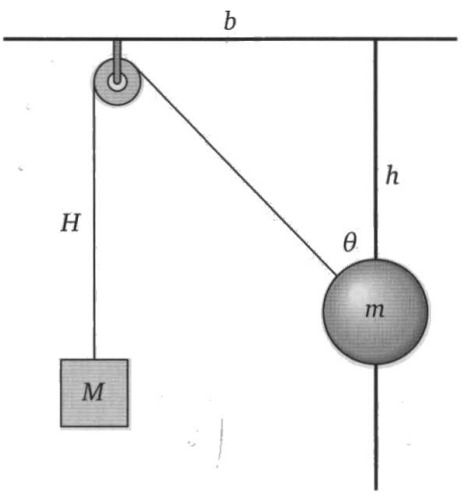


Figura 4.27. Problema 4.36.

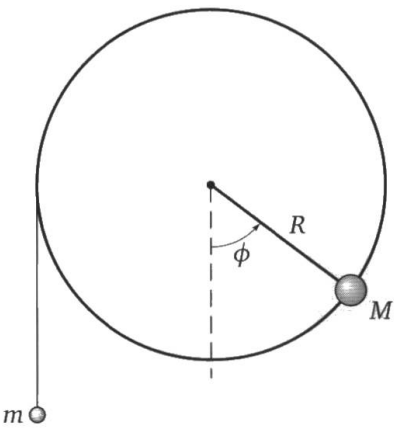


Figura 4.28. Problema 4.37.

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{l/g}. \tag{4.102}$$

(El subíndice «o» es para resaltar que éste es el período para oscilaciones pequeñas).

4.35 ⋆⋆ Consideremos la máquina de Atwood de la Figura 4.15, pero supongamos que la polea tiene un radio R y un momento de inercia I. **(a)** Escribir la energía total de las dos masas y de la polea en términos de las coordenadas x y $\dot{x}$. (Recordar que la energía cinética de una rueda que gira es $\frac{1}{2}I\omega^2$). **(b)** Demostrar cómo puede obtenerse la ecuación de movimiento de la coordenada x diferenciando la ecuación $E =$ constante (lo que es cierto para cualquier sistema conservativo de una dimensión). Comprobar que esta ecuación de movimiento es igual a la que se obtendría aplicando la segunda ley de Newton a cada una de las dos masas y la polea, por separado, y después eliminando las dos tensiones desconocidas de las tres ecuaciones resultantes.

4.36 ⋆⋆ Una bola metálica (masa m) atravesada por un agujero está ensartada en una varilla vertical sin rozamiento. Un cordel (longitud l) sujeto a la bola, pasa por una polea sin masa ni rozamiento y sostiene un bloque de masa M, como se muestra en la Figura 4.27. La posición de cada una de las dos masas puede establecerse mediante el ángulo θ. **(a)** Escribir la energía potencial $U(\theta)$. (La EP puede escribirse fácilmente en términos de las alturas, mostradas como h y H. Eliminar estas dos variables en favor de θ y las constantes b y l. Suponer que la polea y la bola tienen un tamaño despreciable). **(b)** Derivando $U(\theta)$ averiguar si el sistema tiene una posición de equilibrio y en qué valores de m y M dicho equilibrio puede suceder. Discutir sobre la estabilidad de cualquier posición de equilibrio.

4.37 ⋆⋆⋆ [Ordenador] La Figura 4.28 muestra una rueda sin masa, de radio R, montada sobre un eje horizontal sin rozamiento. Un punto de masa M está pegado en el borde de la rueda, y una masa m cuelga de un cordel, enrollado a su vez alrededor del perímetro de la rueda. **(a)** Escribir la EP total de las dos masas como una función del ángulo ϕ. **(b)** Usar este resultado para encontrar los valores de m y M para los cuales existe cualquier posición de equilibrio. Describir las posiciones de equilibrio, discutir sobre su estabilidad y explicar las respuestas en términos de momentos de fuerza. **(c)** Representar $U(\phi)$ para los casos en que $m = 0{,}7M$ y $m = 0{,}8M$, y usar las gráficas para describir el comportamiento del sistema si se deja evolucionar desde el reposo en $\phi = 0$. **(d)** Encontrar el valor crítico de m/M a un lado del cual el sistema oscila y al otro no lo hace (si se deja evolucionar desde el reposo en $\phi = 0$).

4.38 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Considerar el péndulo simple del Problema 4.34. Se puede llegar a una expresión para el período del péndulo (buena para oscilaciones grandes y pequeñas) usando el método discutido en conexión con (4.57), como sigue: **(a)** Usando (4.101) para le EP, hallar $\dot{\phi}$ como función de ϕ. Después usar (4.57), en la forma $t = \int d\phi/\dot{\phi}$, para reescribir el tiempo que tarda el péndulo en ir desde $\phi = 0$ a su valor máximo (la amplitud) Φ. Como este tiempo es un

cuarto del período τ, se puede anotar el período. Mostrar que

$$\tau = \tau_0 \frac{1}{\pi} \int_0^{\Phi} \frac{d\phi}{\sqrt{\text{sen}^2(\Phi/2) - \text{sen}^2(\phi/2)}} = \tau_0 \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-A^2u^2}}, \tag{4.103}$$

donde τ_0 es el período (4.102) (Problema 4.34) para pequeñas oscilaciones y $A = \text{sen}(\Phi/2)$. [Para obtener la primera expresión es necesario usar la identidad trigonométrica para $1 - \cos\phi$ en términos de $\text{sen}^2(\phi/2)$. Para llegar a la segunda es necesario hacer la sustitución $\text{sen}(\phi/2) = Au$]. Estas integrales no se pueden evaluar en términos de funciones elementales. Sin embargo, la segunda de ellas es una integral estándar llamada *integral elíptica completa de primera clase*, a veces denotada por $K(A^2)$, cuyos valores están tabulados[15] y aparecen en los programas de ordenador como Mathematica [que la denomina EllipticK(A^2)]. **(b)** Si se tiene acceso a programas de ordenador en los que aparezca esta función, representar gráficamente τ/τ_0 para amplitudes $0 \leq \Phi \leq 3$ rad. Comentar. ¿Qué sucede con τ a medida que la amplitud de la oscilación se aproxima a π? Explicarlo.

4.39 ⋆⋆⋆ **(a)** Si aún no se ha hecho , hacer ahora el Problema 4.38(a). **(b)** Si la amplitud Φ es pequeña, entonces también es $A = \text{sen}\,\Phi/2$. Si la amplitud es muy pequeña, podemos simplemente ignorar la última raíz cuadrada de (4.103). Mostrar que esto da el resultado conocido para el período de pequeña amplitud, $\tau = \tau_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$. **(c)** Si la amplitud es pequeña pero no muy pequeña, podemos mejorar la aproximación de la parte (b). Usar el desarrollo binomial para dar la aproximación $1/\sqrt{1-A^2u^2} \approx 1 + \frac{1}{2}A^2u^2$ y mostrar que, en esta aproximación, (4.103) da

$$\tau = \tau_0[1 + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}^2(\Phi/2)].$$

¿Qué porcentaje de corrección representa el segundo término para una amplitud de 45°? (La respuesta exacta para $\Phi = 45°$ es $1{,}040\,\tau_0$ para cuatro cifras significativas).

Sección 4.8 Fuerzas centrales

4.40 ⋆ **(a)** Verificar las tres ecuaciones (4.68) que dan x, y, z en términos de las coordenadas polares esféricas r, θ, ϕ. **(b)** Encontrar expresiones para r, θ, ϕ en términos de x, y, z.

4.41 ⋆ Una masa m describe una órbita circular (centrada en el origen) en el seno del campo de una fuerza central atractiva con energía potencial $U = kr^n$. Probar el **teorema del virial** que $T = nU/2$.

4.42 ⋆ En una dimensión, es obvio que una fuerza que obedece la ley de Hooke es conservativa (como $F = -kx$ depende sólo de la posición x, y esto es suficiente para garantizar que F es conservativa en una dimensión). Considerar en lugar de ello un muelle que obedece la ley de Hooke y tiene un extremo fijo en el origen, pero el otro está libre para moverse en las tres dimensiones. (El muelle podría estar sujeto a un punto en el techo y tener en su otro extremo una masa m que rebota, por ejemplo). Escribir la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ejercida por el muelle en términos de su longitud r y su longitud de equilibrio r_0. Probar que esta fuerza es conservativa. [*Ayudas:* ¿Es la fuerza central? Suponer que el muelle no se dobla].

4.43 ⋆⋆ En la Sección 4.8, afirmé que una fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ que es central y esféricamente simétrica es automáticamente conservativa. Aquí hay dos maneras para demostrarlo: **(a)** Como $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es central y esféricamente simétrica, debe tener la forma $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$. Usando coordenadas cartesianas, mostrar que esto implica que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. **(b)** Más rápido todavía, usando la expresión dada en la contracubierta para $\nabla \times \mathbf{F}$ en polares esféricas, mostrar que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

---

[15] Vea, por ejemplo, M. Abramowitz e I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965. Tenga en cuenta que autores diferentes usan notaciones diferentes. En particular, algunos autores llaman a la misma integral $K(A)$.

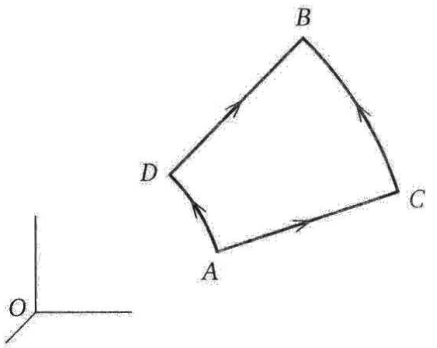


Figura 4.29. Problema 4.44.

4.44 ⋆⋆ El Problema 4.43 sugiere dos pruebas de que una fuerza central, esféricamente simétrica es automáticamente conservativa, pero ninguna de ellas deja realmente claro *por qué* es esto así. He aquí una prueba que es menos completa pero más perspicaz: consideremos dos puntos cualesquiera A y B y dos caminos diferentes ACB y ADB que los conectan tal como muestra la Figura 4.29. El camino ACB va radialmente hacia fuera desde A hasta que alcanza el radio r_B de B, y después alrededor de una esfera (centro O) hasta B. El camino ADB va alrededor de una esfera de radio r_A hasta que alcanza la línea OB, y después radialmente hacia fuera hasta B. Explicar claramente por qué el trabajo realizado por una fuerza central $\mathbf{F}$, esféricamente simétrica, es el mismo por ambos caminos. (Esto no demuestra que el trabajo sea el mismo por *cualesquiera* dos caminos que vayan desde A hasta B. Si se quiere se puede completar la prueba mostrando que cualquier camino se puede aproximar por una serie de caminos radiales hacia adentro o hacia afuera y caminos de r constante).

4.45 ⋆⋆ En la Sección 4.8, probé que una fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$ que es central y conservativa tiene automáticamente simetría esférica. He aquí una prueba alternativa. Considerar los dos caminos ACB y ADB de la Figura 4.29, pero con $r_B = r_A + dr$ donde dr es infinitesimal. Escribir el trabajo realizado por $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ yendo alrededor de los dos caminos, y usar el hecho de que deben ser iguales para demostrar que la función magnitud $f(\mathbf{r})$ debe ser la misma en los puntos A y D; esto es, $f(\mathbf{r}) = f(r)$ y la fuerza tiene simetría es esférica.

Sección 4.9 Energía de interacción de dos partículas

4.46 ⋆ Considerar una colisión elástica de dos partículas como en el Ejemplo 4.8 (página 159), pero con masa desiguales, $m_1 \neq m_2$. Mostrar que el ángulo θ entre las dos velocidades resultantes satisface $\theta < \pi/2$ si $m_1 > m_2$, pero $\theta > \pi/2$ si $m_1 < m_2$.

4.47 ⋆ Considerar una colisión frontal elástica entre dos partículas. (Como la colisión es frontal, el movimiento está confinado a una única línea recta y es por tanto unidimensional). Probar que la velocidad relativa después de la colisión es igual y opuesta a la que tenía antes. Esto es, $v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2')$, donde v_1 y v_2 son las velocidades iniciales v_1' y v_2' las correspondientes velocidades finales.

4.48 ⋆ Una partícula de masa m_1 y velocidad v_1 choca con una segunda partícula de masa m_2 que se encuentra en reposo. Si la colisión es perfectamente inelástica (las dos partículas se unen y salen despedidas como una sola), ¿que fracción de la energía cinética se pierde en la colisión? Comentar la respuesta para los casos en que $m_1 \ll m_2$ y $m_2 \ll m_1$.

4.49 ⋆⋆ Ambas fuerzas, la de Coulomb y la gravitatoria, conducen a energías potenciales de la forma $U = \gamma/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, donde γ denota kq_1q_2 en el caso de la fuerza de Coulomb y $-Gm_1m_2$ para la gravedad, y $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son las posiciones de las dos partículas. Mostrar en detalle que $-\boldsymbol{\nabla}_1 U$ es la fuerza sobre la partícula 1 y $-\boldsymbol{\nabla}_2 U$ aquella sobre la partícula 2.

4.50 ⋆⋆ El formalismo de la energía potencial de dos partículas depende de la afirmación en (4.81) que

$$\boldsymbol{\nabla}_1 U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\boldsymbol{\nabla}_2 U(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2).$$

Probar esto. (Usar la regla de la cadena para la diferenciación. La prueba en tres dimensiones es poco elegante en cuanto a notación, así que probar el resultado unidimensional de que

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1 - x_2) = -\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1 - x_2)$$

y después reflexionar sobre si se extiende a tres dimensiones).

Sección 4.10 Energía de un sistema de muchas partículas

4.51 ⋆⋆ Escribir los argumentos de todas las energías potenciales del sistema de cuatro partículas en (4.94). Por ejemplo $U = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_4)$, en tanto que $U_{34} = U_{34}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)$. Mostrar con detalle que la fuerza neta sobre la partícula 3 (por ejemplo) está dada por $-\boldsymbol{\nabla}_3 U$. [Sabemos que las fuerzas separadas, internas y externas, estás dadas por (4.92) y (4.93)].

4.52 ⋆⋆ Considerar el sistema de cuatro partículas de la Sección 4.10. **(a)** Escribir el teorema Trabajo-EC para cada una de las cuatro partículas separadamente y, sumando estas cuatro ecuaciones, mostrar que la variación en la EC total en un intervalo corto de tiempo dt es $dT = W_{\text{tot}}$ donde W_{tot} es el trabajo total realizado sobre todas las partículas por todas las fuerzas. [Esto no debería llevar más de dos o tres líneas]. **(b)** Después mostrar que $W_{\text{tot}} = -dU$ donde dU es la variación en la EP total durante el mismo intervalo de tiempo. Deducir que la energía mecánica total $E = T + U$ se conserva.

4.53 ⋆⋆ **(a)** Considerar un electrón (carga $-e$ y masa m) en una órbita circular de radio r alrededor de un protón fijo (carga $+e$). Recordando que la fuerza de Coulomb hacia dentro ke^2/r^2 es lo que proporciona al electrón su aceleración centrípeta, probar que la EC del electrón es igual a $-\frac{1}{2}$ veces su EP; esto es, $T = -\frac{1}{2}U$ y por tanto $E = \frac{1}{2}U$. (Este resultado es una consecuencia del denominado *teorema del virial*. Vea el Problema 4.41). Considerar ahora la siguiente colisión inelástica de un electrón con un átomo de hidrógeno: el electrón número 1 está en una órbita circular de radio r alrededor de un protón fijo (esto es el átomo de hidrógeno). El electrón 2 se aproxima desde lejos con energía cinética T_2. Cuando el segundo electrón golpea al átomo, el primer electrón sale despedido, y el segundo es capturado en una órbita circular de radio r'. **(b)** Escribir una expresión para la energía total del sistema de tres partículas en general. (La respuesta debería contener cinco términos, tres Eps pero sólo dos Ecs, porque el protón se considera fijo). **(c)** Identificar los valores de cada uno de los cinco términos y la energía total E mucho antes de que ocurra la colisión, y también mucho después de que ocurra. ¿Cuál es la EC del electrón 1 que sale despedido una vez que está muy lejos? Dar las respuestas en términos de las variables T_2, r, y r'.

CAPÍTULO 5

Oscilaciones

En casi todos los sistemas en los que hay un desplazamiento desde una posición de equilibrio estable se producen *oscilaciones*. Si el desplazamiento es *pequeño*, éstas son casi siempre del tipo llamado armónico simple. Las oscilaciones, y particularmente las armónicas simples, están por ello ampliamente extendidas. Son además extremadamente útiles. Por ejemplo, todos los buenos relojes dependen de un oscilador para regular sus medidas del tiempo: los primeros relojes fiables usaban un péndulo; los primeros relojes precisos (históricamente cruciales en navegación) usaban una rueda de balanza oscilante; los relojes modernos usan las oscilaciones de un cristal de cuarzo; y los relojes más precisos de hoy en día, tales como el reloj atómico del Instituto Nacional para las Normas y la Tecnología en Boulder, Colorado (EE.UU.), usan las oscilaciones de un átomo. En este capítulo exploraremos la física y las matemáticas de las oscilaciones. Comenzaré con oscilaciones armónicas simples y después seguiré con oscilaciones amortiguadas (oscilaciones que se extinguen por las fuerzas resistivas) y oscilaciones forzadas (oscilaciones que se mantienen por una fuerza de conducción exterior, como en todos los relojes). Las últimas tres secciones de este capítulo describen el uso de la serie de Fourier para encontrar el movimiento de un oscilador conducido por una fuerza exterior periódica arbitraria.

5.1 La ley de Hooke

Como seguramente sepa el lector, una masa sujeta al extremo de un muelle que obedece la ley de Hooke ejecuta oscilaciones del tipo que llamamos armónicas simples. Antes de repasar la prueba de esta afirmación, preguntémonos primero por qué la

ley de Hooke es tan importante y aparece con tanta frecuencia. Esta ley afirma que la fuerza que ejerce un muelle tiene la forma (por ahora nos limitaremos a un muelle confinado en el eje x)

$$F_x(x) = -kx \tag{5.1}$$

donde x es el desplazamiento del muelle desde su longitud de equilibrio y k es un número positivo llamado constante recuperadora. Que k sea positiva significa que el equilibrio en $x = 0$ es estable: cuando $x = 0$ no hay fuerza, cuando $x > 0$ (desplazamiento hacia la derecha) la fuerza es negativa (apunta a la izquierda), y cuando $x < 0$ (desplazamiento hacia la izquierda) la fuerza es positiva (apunta a la derecha); de cualquiera de las dos maneras, la fuerza es una fuerza *restauradora*, y el equilibrio es estable. (Si k fuera negativo, la fuerza podría estar lejos del origen, y el equilibrio sería inestable, en cuyo caso no esperamos ver oscilaciones). Una manera completamente equivalente de enunciar la ley de Hooke es que la energía potencial es

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2.$$

Consideremos ahora un sistema unidimensional conservativo arbitrario que está especificado por una coordenada x y tiene energía potencial $U(x)$. Supongamos que el sistema tiene una posición de equilibrio estable $x = x_0$, que podemos también tomar como el origen ($x_0 = 0$). Ahora consideremos el comportamiento de $U(x)$ en la vecindad de la posición de equilibrio. Como cualquier función razonable puede ser desarrollada en una serie de Taylor, podemos escribir sin riesgo

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \tfrac{1}{2}U''(0)x^2 + \cdots. \tag{5.2}$$

Mientras que x permanezca pequeño, los primeros tres términos de esta serie deberían ser una buena aproximación. El primer término es una constante, y, puesto que siempre podemos restar una constante de $U(x)$ sin que ello afecte a la física, podemos también redefinir $U(0)$ como cero. Como $x = 0$ es un punto de equilibrio, $U'(0) = 0$ y el segundo término de la serie (5.2) es automáticamente cero. Como el equilibrio es estable, $U''(0)$ es positiva. Renombrando $U''(0)$ como k, concluimos que para pequeños desplazamientos siempre es una buena aproximación tomar[1]

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2. \tag{5.3}$$

[1] La única excepción es si $U''(0)$ resulta ser cero, pero no me preocuparé por este caso excepcional aquí.

Es decir, para desplazamientos del equilibrio suficientemente pequeños, la ley de Hooke es siempre válida. Observe que si $U''(0)$ fuese negativo, entonces k también sería negativo y el equilibrio sería inestable (un caso que precisamente ahora no nos interesa). La ley de Hooke en la forma (5.3) aparece en muchas situaciones, aunque desde luego no es necesario que la coordenada sea la coordenada rectangular x, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1 *El cubo que se balancea sobre un cilindro*

Considerar de nuevo el cubo del Ejemplo 4.7 (página 144) y demostrar que para ángulos pequeños θ la energía potencial toma la forma de la ley de Hooke $U(\theta) = \frac{1}{2}k\theta^2$.

Vimos en aquel ejemplo que

$$U(\theta) = mg[(r+b)\cos\theta + r\theta\,\mathrm{sen}\,\theta].$$

Si θ es pequeño podemos hacer las aproximaciones $\cos\theta \approx 1-\theta^2/2$ y $\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$, de manera que

$$U(\theta) \approx mg[(r+b)(1-\tfrac{1}{2}\theta^2) + r\theta^2] = mg(r+b) + \tfrac{1}{2}mg(r-b)\theta^2,$$

lo cual, aparte de la nada interesante constante, tiene la forma $\frac{1}{2}k\theta^2$ con la «constante elástica del muelle» $k = mg(r-b)$. Observe que el equilibrio es estable (k positivo) sólo cuando $r > b$, condición que ya habíamos encontrado en el Ejemplo 4.7.

Como ya comentamos en la Sección 4.6, las características generales de movimiento de cualquier sistema unidimensional pueden entenderse comparando una gráfica de $U(x)$ con una de x. Para la energía potencial de la ley de Hooke (5.3), esta gráfica es una parábola, como se muestra en la Figura 5.1. Si una masa m tiene la energía potencial de esta forma y tiene cualquier energía total $E > 0$, se encuentra

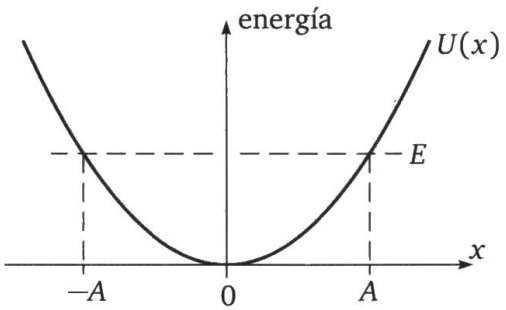


Figura 5.1. Una masa m con energía potencial $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ y energía total E oscila entre los dos puntos de retorno en $x = \pm A$, donde $U(x) = E$ y la energía cinética es cero.

atrapada y oscila entre los dos puntos de retorno donde $U(x) = E$, de tal manera que la energía cinética es cero y la masa se queda instantáneamente en reposo. Como $U(x)$ es simétrica con respecto a $x = 0$, los dos puntos de retorno están a la misma distancia del origen, en lados opuestos, y se denominan tradicionalmente $x = \pm A$, donde A es la amplitud de las oscilaciones.

5.2 Movimiento armónico simple

Estamos ya preparados para examinar la ecuación de movimiento (esto es, la segunda ley de Newton) para una masa m que es desplazada desde una posición de equilibrio estable. Para fijar ideas, consideremos un móvil sobre una pista sin rozamiento enganchado a un muelle fijo tal como muestra la Figura 5.2. Hemos visto que podemos aproximar la energía potencial mediante (5.3) o, análogamente, la fuerza por $F_x(x) = -kx$. Entonces la ecuación de movimiento es $m\ddot{x} = F_x = -kx$ o

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \tag{5.4}$$

donde he introducido la constante

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

la cual veremos que es la frecuencia angular con la que el móvil oscilará. Aunque hemos llegado a la ecuación (5.4) en el contexto de un móvil que está sujeto a un muelle y que se mueve a lo largo del eje x, veremos finalmente que es aplicable a muchos sistemas oscilantes diferentes en muchos sistemas de coordenadas diferentes. Por ejemplo, ya hemos visto en la Ecuación (1.55) que el ángulo ϕ que da la posición de un péndulo (o un monopatín en una pista de medio cañón) están gobernados por la misma ecuación, $\ddot{\phi} = -\omega^2\phi$, al menos para valores pequeños de ϕ. En esta sección voy a repasar las propiedades de las soluciones de (5.4). Desafortunadamente, existen muchas maneras diferentes de escribir la misma solución, todas las cuales tienen sus ventajas, y es conveniente que uno se encuentre cómodo con todas ellas.

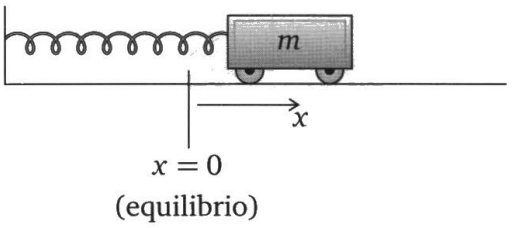


Figura 5.2. Un móvil de masa m que oscila en el extremo de un muelle.

Las soluciones exponenciales

La Ecuación (5.4) es una ecuación diferencial de segundo orden, lineal y homogénea,[2] y por ello tiene dos soluciones independientes. Estas soluciones se pueden escoger de varias maneras, pero quizá la más conveniente sea esta:

$$x(t) = e^{i\omega t} \qquad \text{y} \qquad x(t) = e^{-i\omega t}.$$

Como se puede comprobar fácilmente, estas dos funciones satisfacen (5.4). Más aún, cualquier múltiplo constante de cualquiera de las soluciones es también una solución, y también lo es cualquier suma de tales múltiplos. Por tanto la función

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \tag{5.5}$$

es también una solución para cualesquiera dos constantes C_1 y C_2. (Que cualquier combinación lineal de soluciones como estas sea solución se conoce como **principio de superposición** y juega un papel crucial en muchas ramas de la física). Como esta solución (5.5) contiene dos constantes arbitrarias, es la solución general de nuestra ecuación de segundo orden (5.4).[3] Por lo tanto, *cualquier* solución se puede expresar de la forma (5.5) mediante una elección adecuada de los coeficientes C_1 y C_2.

Las soluciones seno y coseno

Las funciones exponenciales en (5.5) son tan sencillas de manejar que (5.5) muchas veces es la mejor forma de la solución. Sin embargo, esta forma sí tiene una desventaja. Sabemos, por supuesto, que $x(t)$ es real, mientras que las dos exponenciales en (5.5) son complejas. Esto significa que los coeficientes C_1 y C_2 deben escogerse con cuidado para asegurar que el propio $x(t)$ sea real. Volveré a este punto en breve, pero primero reescribiré (5.5) de otra manera útil. De la fórmula de Euler (2.76) sabemos que las dos exponenciales en (5.5) se pueden escribir como

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \operatorname{sen}(\omega t).$$

Sustituyendo en (5.5) y reagrupando encontramos que

$$\begin{aligned} x(t) &= (C_1 + C_2)\cos(\omega t) + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen}(\omega t) \\ &= B_1 \cos(\omega t) + B_2 \operatorname{sen}(\omega t) \end{aligned} \tag{5.6}$$

---

[2] Lineal porque contiene potencias no más altas que la primera potencia de x o sus derivadas, y homogénea porque *cada* término es una primera potencia (es decir, no hay ningún término independiente de x y sus derivadas).

[3] Recordemos el resultado, discutido debajo de la Ecuación (1.56), de que la solución general de una ecuación diferencial de segundo orden contiene precisamente dos constantes arbitrarias.

donde B_1 y B_2 son simplemente nuevos nombres para los coeficientes de la ecuación anterior,

$$B_1 = C_1 + C_2 \qquad \text{y} \qquad B_2 = i(C_1 - C_2). \tag{5.7}$$

La forma (5.6) puede tomarse como la definición de **movimiento armónico simple** (o **MAS**): cualquier movimiento que sea una combinación de un seno y un coseno de esta forma se llama armónico simple. Como las funciones $\cos(\omega t)$ y $\operatorname{sen}(\omega t)$ son reales, el requerimiento de que $x(t)$ sea real significa simplemente que los coeficientes B_1 y B_2 deben ser reales.

Podemos identificar fácilmente los coeficientes B_1 y B_2 en términos de las condiciones iniciales del problema. Claramente en $t = 0$, (5.6) implica que $x(0) = B_1$. Esto es, B_1 es justo la posición inicial $x(0) = x_0$. Análogamente, diferenciando (5.6), podemos identificar ωB_2 como la velocidad inicial v_0.

Si comienzo las oscilaciones tirando del móvil hacia $x = x_0$ y dejándolo libre desde el reposo ($v_0 = 0$), entonces $B_2 = 0$ en (5.6) y sólo el término del coseno perdura, así que

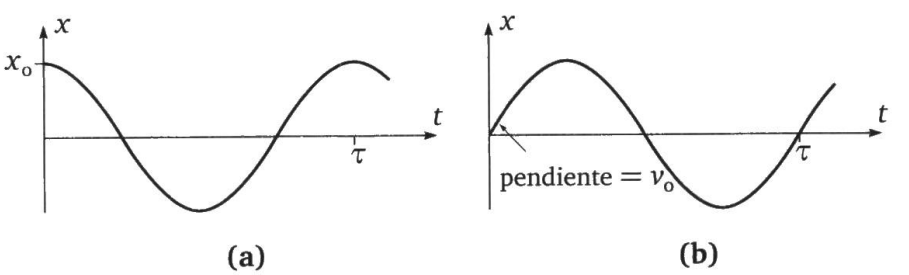
$$x(t) = x_0 \cos(\omega t). \tag{5.8}$$

Si lanzo el móvil desde el origen ($x_0 = 0$) dándole un toque en $t = 0$, sólo perdura el término del seno, y

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t).$$

Estos dos casos simples están ilustrados en la Figura 5.3. Advierta que ambas soluciones, como la solución general (5.6), son periódicas porque tanto el seno como el coseno lo son. Como el argumento de ambos, seno y coseno, es ωt, la función $x(t)$ se repite después del tiempo τ para el cual $\omega\tau = 2\pi$. Esto es, el período es

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{5.9}$$



(a) (b)

Figura 5.3. **(a)** Cuando un móvil se libera desde x_0 en $t = 0$ las oscilaciones siguen una curva coseno. **(b)** Si el móvil es empujado desde el origen en $t = 0$, las oscilaciones siguen una curva seno con pendiente inicial v_0. En cualquiera de los dos casos el período de las oscilaciones es $\tau = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$ y es el mismo para cualesquiera que sean los valores de x_0 o v_0.

La solución coseno desplazada en fase

La solución general (5.6) es más difícil de visualizar que los dos casos especiales de la Figura 5.3, y se puede escribir de una manera más útil como sigue. Primero, definimos otra constante más

$$A = \sqrt{B_1{}^2 + B_2{}^2}. \tag{5.10}$$

Advierta que A es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos otros dos lados son B_1 y B_2. He indicado esto en la Figura 5.4, donde también he definido δ como el ángulo más pequeño de ese triángulo. Podemos ahora reescribir (5.6) como

$$\begin{aligned} x(t) &= A\left[\frac{B_1}{A}\cos(\omega t) + \frac{B_2}{A}\operatorname{sen}(\omega t)\right] \\ &= A[\cos\delta\cos(\omega t) + \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}(\omega t)] \\ &= A\cos(\omega t - \delta). \end{aligned} \tag{5.11}$$

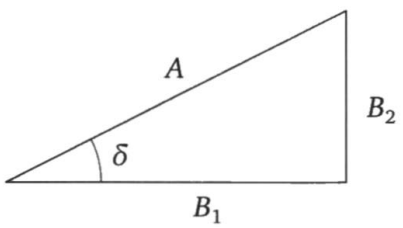


Figura 5.4. Las constantes A y δ están definidas en términos de B_1 y B_2 como se muestra.

A la vista de esta forma está claro que el móvil está oscilando con amplitud A, pero en lugar de ser un simple coseno como en (5.8), es un coseno que está desplazado en la fase: cuando $t = 0$ el argumento del coseno es $-\delta$, y las oscilaciones permanecen detrás del coseno simple por el *cambio de fase* δ. Hemos obtenido el resultado (5.11) de la segunda ley de Newton, pero, como sucede muchas veces, uno puede obtener el mismo resultado de más de una manera. En particular, (5.11) se puede también obtener usando la aproximación de la energía discutida en la Sección 4.6. (Vea el Problema 4.28).

Solución como la parte real de una exponencial compleja

Hay todavía otra manera útil de escribir nuestra solución, en términos de las exponenciales complejas de (5.5). Los coeficientes C_1 y C_2 están relacionados con los coeficientes B_1 y B_2 de la forma seno-coseno por la Ecuación (5.7), la cual podemos resolver para obtener

$$C_1 = \tfrac{1}{2}(B_1 - iB_2) \qquad \text{y} \qquad C_2 = \tfrac{1}{2}(B_1 + iB_2). \tag{5.12}$$

Como B_1 y B_2 son reales, esto muestra que tanto C_1 como C_2 son generalmente complejos y que C_2 es el complejo conjugado de C_1,

$$C_2 = C_1^*.$$

(Recuerde que para cualquier número complejo $z = x+iy$, el complejo conjugado z^* está definido como[4] $z^* = x-iy$). Por tanto la solución (5.5) se puede escribir como

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_1^* e^{-i\omega t} \tag{5.13}$$

donde el segundo término completo del segundo miembro es justo el complejo conjugado del primero. (Vea el Problema 5.35 si no se tiene esto claro). Ahora, para cualquier número complejo $z = x + iy$,

$$z + z^* = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\,\mathrm{Re}\,z$$

donde $\mathrm{Re}\,z$ denota la parte real de z (a saber, x). Entonces (5.13) se puede escribir como

$$x(t) = 2\,\mathrm{Re}\,C_1 e^{i\omega t}.$$

Si definimos una constante final $C = 2C_1$, vemos de la Ecuación (5.12) y la Figura 5.4 que

$$C = B_1 - iB_2 = Ae^{-i\delta} \tag{5.14}$$

y

$$x(t) = \mathrm{Re}\,Ce^{i\omega t} = \mathrm{Re}\,Ae^{i(\omega t\delta)}.$$

Este bonito resultado está ilustrado en la Figura 5.5. El número complejo $Ae^{i(\omega t-\delta)}$ se mueve en sentido contrario a las agujas del reloj con velocidad angular ω alrededor de un círculo de radio A. Su parte real [a saber, $x(t)$] es la proyección del número complejo en el eje real. Mientras que el número complejo describe un círculo, esta proyección oscila hacia atrás y hacia delante en el eje x, con frecuencia angular ω y amplitud A. Específicamente, $x(t) = A\,\cos(\omega t - \delta)$, en consonancia con (5.11).

[4] Mientras que la mayoría de los físicos usan la notación z^*, los matemáticos casi siempre usan $\bar{z}$ para el complejo conjugado de z.

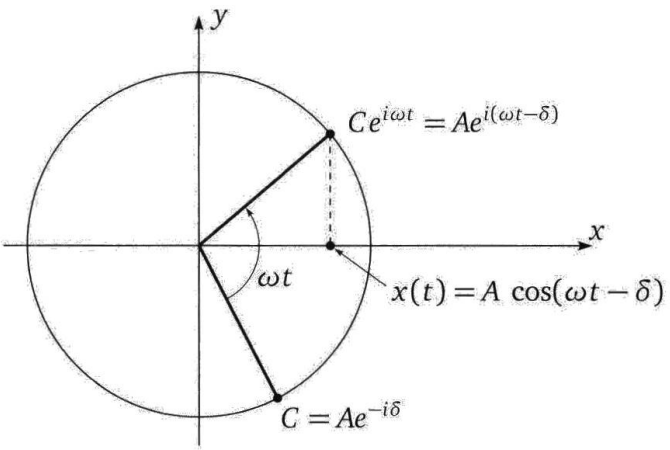


Figura 5.5. La posición $x(t)$ del móvil oscilante es la parte real del número complejo $Ae^{i(\omega t-\delta)}$. Como el último se mueve alrededor del círculo de radio A, el primero oscila hacia atrás y hacia delante sobre el eje x con amplitud A.

Ejemplo 5.2 *Una botella en un cubo de agua*

Una botella está flotando boca arriba en un cubo grande de agua como se muestra en la Figura 5.6. En el equilibrio está sumergida a una profundidad d_0 por debajo de la superficie del agua. Mostrar que si se empuja hacia abajo hasta una profundidad d y se deja libre, ejecutará un movimiento armónico, y encontrar la frecuencia de sus oscilaciones. Si $d_0 = 20$ cm, ¿cuál es el período de las oscilaciones?

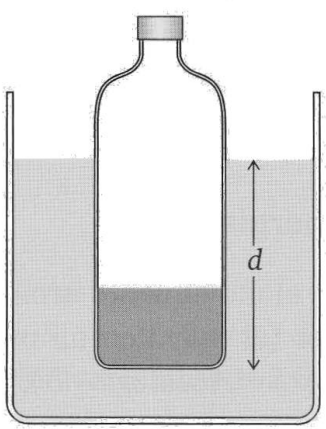


Figura 5.6. La botella mostrada se ha rellenado con arena y flota boca arriba en un cubo de agua. Su profundidad de equilibrio es $d = d_0$.

Las dos fuerzas que actúan sobre la botella son su peso mg hacia abajo y la fuerza flotante hacia arriba ϱgAd, donde ϱ es la densidad del agua y A es la sección transversal de la botella. (Recuerde que el principio de Arquímedes dice que la fuerza flotante es ϱg veces el volumen sumergido, que es justo Ad). La profundidad de equilibrio d_0 se determina a partir de la condición

$$mg = \varrho g A d_0. \tag{5.15}$$

Supongamos ahora que la botella está a una profundidad $d = d_0 + x$. (Esto define x como la distancia *desde el equilibrio*, siempre la mejor coordenada a usar). La segunda ley de Newton se lee ahora

$$m\ddot{x} = mg - \varrho g A(d_0 + x).$$

Por (5.15), los términos primero y segundo de la derecha cancelan, y nos quedamos con $\ddot{x} = -\varrho g A x/m$. Pero de nuevo por (5.15), $\varrho g A/m = g/d_0$, así que la ecuación de movimiento se convierte en

$$\ddot{x} = -\frac{g}{d_0}x,$$

que es exactamente la ecuación para el movimiento armónico simple. Concluimos que la botella se mueve arriba y abajo describiendo un MAS con frecuencia angular $\omega = \sqrt{g/d_0}$. Una característica destacable de este resultado es que la frecuencia de las oscilaciones es independiente de m, ϱ y A; además, la frecuencia es la misma que aquella para un péndulo simple de longitud $l = d_0$. Si $d_0 = 20$ cm, entonces el período es

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}20\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 0{,}9\ \text{s}.$$

¡Este experimento se puede intentar hacer en casa! Pero siendo conscientes de que los detalles del flujo de agua alrededor de la botella complican la situación considerablemente. El cálculo aquí es una versión muy simplificada de la verdad.

Consideraciones sobre la energía

Para concluir esta sección sobre el movimiento armónico simple, consideremos brevemente la energía del oscilador (el móvil en un muelle o en lo que sea) mientras oscila atrás y adelante. Como $x(t) = A\cos(\omega t - \delta)$, la energía potencial es

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t - \delta).$$

Diferenciando $x(t)$ para obtener una velocidad, encontramos para la energía cinética

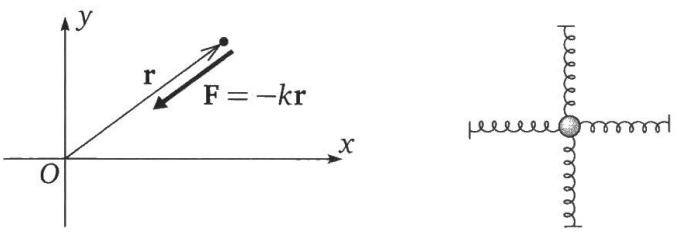
$$\begin{aligned} T = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 &= \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - \delta) \\ &= \tfrac{1}{2}kA^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - \delta) \end{aligned}$$

donde la segunda línea resulta de reemplazar ω^2 por k/m. Vemos que ambas U y T oscilan entre 0 y $\frac{1}{2}kA^2$, con sus oscilaciones perfectamente fuera de paso cuando U

es máxima T es cero y viceversa. En particular, como $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$, la energía total es constante,

$$E = T + U = \tfrac{1}{2}kA^2, \tag{5.16}$$

como debe ser para una fuerza conservativa.



(a) (b)

Figura 5.7. **(a)** Una fuerza restauradora que es proporcional a $\mathbf{r}$ define el oscilador armónico isótropo. **(b)** La masa en el centro de este montaje de muelles experimentará una fuerza neta de la forma $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ mientras se mueve en el plano de los cuatro muelles.

5.3 Osciladores bidimensionales

En dos o tres dimensiones, las posibilidades para la oscilación son considerablemente mayores que en una dimensión. La posibilidad más simple es el llamado **oscilador armónico isótropo**, para el cual la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento desde el equilibrio, con la misma constante de proporcionalidad en todas las direcciones:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}. \tag{5.17}$$

Esto es, $F_x = -kx$, $F_y = -ky$ (y $F_z = -kz$ en tres dimensiones), todas con la misma constante k. Esta fuerza es una fuerza central dirigida hacia la posición de equilibrio, que podemos también tomar como origen, tal como se esboza en la Figura 5.7(a). El montaje de cuatro muelles idénticos que se muestra en la Figura 5.7(b) producirá una fuerza de este tipo; es fácil ver que si la masa situada en el centro se desplaza de su posición de equilibrio experimentará una fuerza neta hacia dentro, y no es difícil demostrar (Problema 5.19) que esta fuerza hacia dentro tiene la forma (5.17) para pequeños desplazamientos $\mathbf{r}$.[5] Otro ejemplo de oscilador armónico isó-

[5] Merece la pena apuntar que uno *no* consigue una fuerza de la forma (5.17) simplemente enganchando una masa a un muelle cuyo otro extremo está anclado en el origen.

tropo en dos dimensiones es (al menos aproximadamente) un rodamiento que rueda cerca del fondo de un cuenco esférico. Dos ejemplos importantes en tres dimensiones son los átomos que vibran cerca de su posición de equilibrio en un cristal simétrico y los protones (o neutrones) cuando se mueven dentro del núcleo.

Consideremos una partícula que está sometida a este tipo de fuerza y supongamos, por simplicidad, que está confinada a dos dimensiones. La ecuación de movimiento, $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}/m$, se separa en dos ecuaciones independientes:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega^2 x \\ \ddot{y} &= -\omega^2 y \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

donde he introducido la familiar frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$ (que es la misma en ambas ecuaciones de x e y porque lo mismo es cierto de las constantes de fuerza). Cada una de estas dos ecuaciones tiene exactamente la forma de la ecuación unidimensional discutida en la última sección, y las soluciones son [como en (5.11)]

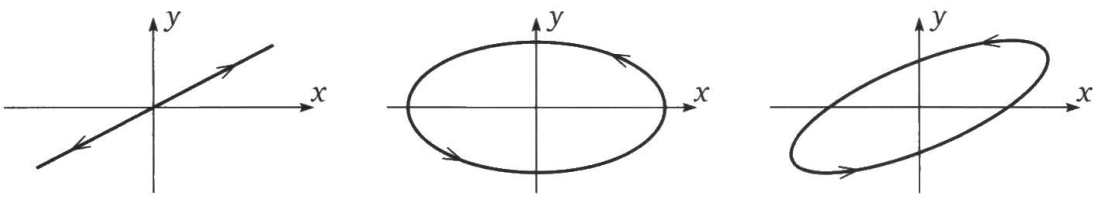
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A_x \cos(\omega t - \delta_x) \\ y(t) &= A_y \cos(\omega t - \delta_y) \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

donde las cuatro constantes A_x, A_y, δ_x y δ_y se determinan a partir de las condiciones iniciales del problema. Redefiniendo el origen de tiempos, podemos deshacernos del cambio de fase δ_x, pero, en general, no podemos deshacernos también de la fase correspondiente en la solución de y. Por tanto la forma más simple para la solución general es

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A_x \cos(\omega t) \\ y(t) &= A_y \cos(\omega t - \delta) \end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

donde $\delta = \delta_y - \delta_x$ es la fase *relativa* de las oscilaciones de y y de x. (Vea el Problema 5.15).

El comportamiento de la solución (5.20) depende de los valores de las tres constantes A_x, A_y y δ. Si alguna de ellas, A_x o A_y, es cero, la partícula ejecuta un movimiento armónico simple a lo largo de uno de los ejes. (El rodamiento en el cuenco rueda atrás y adelante cruzando el origen, y se mueve sólo en la dirección x o sólo en la dirección y). Si ni A_x ni A_y es cero, el movimiento depende críticamente de la fase relativa δ. Si $\delta = 0$, entonces $x(t)$ e $y(t)$ suben y bajan escalonadas, y el punto (x, y) se mueve atrás y adelante sobre la línea inclinada que une (A_x, A_y) con $(-A_x, -A_y)$, como se muestra en la Figura 5.8(a). Si $\delta = \pi/2$, entonces x e y oscilan desfasadas, con x en un extremo cuando y es cero, y viceversa; el punto (x, y) describe una elipse con semiejes mayor y menor A_x y A_y, como en la Figura 5.8(b). Para otros valores de δ, el punto (x, y) se mueve alrededor de una elipse inclinada,



(a) $\delta = 0$ **(b)** $\delta = \pi/2$ **(c)** $\delta = \pi/4$

Figura 5.8. Movimiento de un oscilador bidimensional isótropo como el que resulta de (5.20). **(a)** Si $\delta = 0$, entonces x e y ejecutan un movimiento armónico simple en fase, y el punto (x, y) se mueve atrás y adelante a lo largo de una línea inclinada como se muestra. **(b)** Si $\delta = \pi/2$, entonces (x, y) se mueve describiendo una elipse con ejes a lo largo de los ejes x e y. **(c)** En general (por ejemplo, $\delta = \pi/4$), el punto (x, y) se mueve alrededor de una elipse inclinada como se muestra.

como se muestra para el caso $\delta = \pi/4$ en la Figura 5.8(c). (Para un prueba de que la trayectoria es realmente una elipse, consulte el Problema 8.11).

En el **oscilador anisótropo**, las componentes de la fuerza restauradora son proporcionales a las componentes del desplazamiento, pero con diferentes constantes de proporcionalidad:

$$F_x = -k_x x, \qquad F_y = -k_y y, \qquad \text{y} \qquad F_z = -k_z z. \tag{5.21}$$

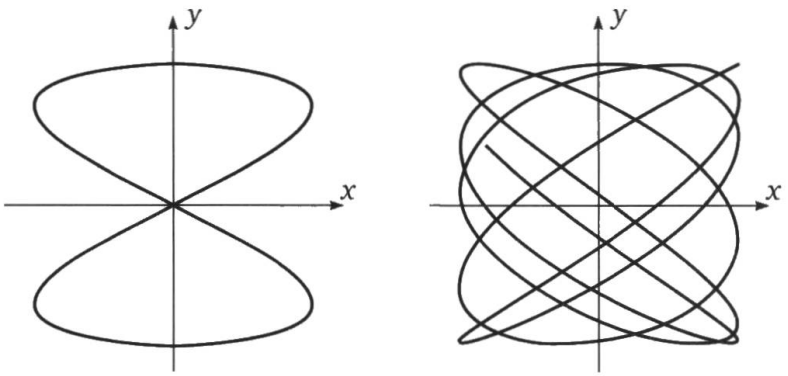
Un ejemplo de tal fuerza es la que experimenta un átomo desplazado de su posición de equilibrio en un cristal de baja simetría, donde las constantes de fuerza son distintas a lo largo de los distintos ejes. Por simplicidad, consideraré otra vez una partícula en dos dimensiones, para la cual la segunda ley de Newton se separa en dos ecuaciones distintas del mismo modo que en (5.18):

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_x^2 x \\ \ddot{y} &= -\omega_y^2 y. \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

La única diferencia entre esta y (5.18) es que hay ahora frecuencias diferentes para los diferentes ejes, $\omega_x = \sqrt{k_x/m}$ y así sucesivamente. La solución de estas dos ecuaciones es justo como (5.20):

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A_x \cos(\omega_x t) \\ y(t) &= A_y \cos(\omega_y t - \delta). \end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

A causa de las dos frecuencias diferentes, hay una variedad mucho más rica de movimientos posibles. Si ω_x/ω_y es un número racional, es bastante fácil ver (Problema 5.17) que el movimiento es periódico, y la trayectoria resultante se llama figura



(a) $\omega_x = 2\omega_y$ (b) $\omega_x = \sqrt{2}\omega_y$

Figura 5.9. **(a)** Un posible camino para un oscilador anisótropo con $\omega_x = 2$ y $\omega_y = 1$. Se puede observar que x va hacia atrás y hacia delante dos veces en el tiempo en que y lo hace una sola vez, y el movimiento luego se repite a sí mismo exactamente. **(b)** Un camino para el caso $\omega_x = \sqrt{2}$ y $\omega_y = 1$ desde $t = 0$ hasta $t = 24$. En este caso el camino nunca se repite a sí mismo, aunque, si esperamos el tiempo suficiente, pasará arbitrariamente cerca de cualquier punto del rectángulo rodeado por $x = \pm A_x$ e $y = \pm A_y$.

de Lissajous (en honor al físico francés Jules Lissajous, 1822-1880). Por ejemplo, la Figura 5.9(a) muestra una órbita de una partícula para la cual $\omega_x/\omega_y = 2$ y el movimiento en x se repite el doble de veces que el movimiento en y . En el caso mostrado, el resultado es una figura en forma de ocho. Si ω_x/ω_y es irracional, el movimiento es más complicado y nunca se repite. Este caso se ilustra mediante $\omega_x/\omega_y = \sqrt{2}$, en la Figura 5.9(b). Este tipo de movimiento se denomina **cuasiperiódico**: el movimiento de las coordenadas separadas x e y es periódico, pero al ser los dos períodos incompatibles, el movimiento de $\mathbf{r} = (x, y)$ no lo es.

5.4 Oscilaciones amortiguadas

Volveré ahora al oscilador unidimensional, y consideraré la posibilidad de que haya fuerzas resistivas que amortiguarán las oscilaciones. Existen varias posibilidades para la fuerza resistiva. El rozamiento de deslizamiento ordinario es aproximadamente constante en magnitud, pero siempre dirigido en el sentido opuesto a la velocidad. La resistencia que opone un fluido, tal como aire o agua, depende de la velocidad de una manera complicada. Sin embargo, como vimos en el Capítulo 2, es a veces una aproximación razonable suponer que la fuerza resistiva es proporcional a v o (bajo diferentes circunstancias) a v^2. Aquí supondré que la fuerza resistiva es proporcional a v; específicamente, $\mathbf{f} = -b\mathbf{v}$. Una de las razones principales de hacerlo así es que este caso conduce a una ecuación especialmente fácil de resolver. La

ecuación es por sí misma una ecuación muy importante que aparece en varios otros contextos y por ello merece la pena estudiarla.[6]

Consideremos, entonces, un objeto en una dimensión, tal como un móvil enganchado a un muelle, que está sometido a la fuerza de la ley de Hooke, $-kx$, y a una fuerza resistiva, $-b\dot{x}$. La fuerza neta sobre el objeto es $-b\dot{x} - kx$, y la segunda ley de Newton dice (si paso los dos términos de fuerza al primer miembro)

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \tag{5.24}$$

Una de las cosas bonitas de la física es la manera en que una misma ecuación matemática puede aparecer en contextos físicos totalmente diferentes, de manera que nuestro entendimiento de la ecuación en una situación se traslada inmediatamente a la otra. Antes de emprender la resolución de la Ecuación (5.24), me gustaría mostrar cómo la misma ecuación aparece en el estudio de los circuitos RLC. Un circuito RLC es un circuito que contiene un resistor (resistencia R), una bobina (inductancia L) y un condensador (capacitancia C), tal como está representado en la Figura 5.10. He elegido la dirección positiva para la corriente que sea en el sentido contrario a las agujas del reloj, y la carga $q(t)$ que sea la carga de la plancha izquierda del condensador [con $-q(t)$ en la derecha], de tal manera que $I(t) = \dot{q}(t)$. Si seguimos por el circuito en la dirección positiva, el potencial eléctrico cae a razón de $L\dot{I} = L\ddot{q}$ a través de la bobina, a razón de $RI = R\dot{q}$ a través del resistor, y a razón de q/C a través del condensador. Aplicando la segunda ley de Kirchhoff para circuitos, concluimos que

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0. \tag{5.25}$$

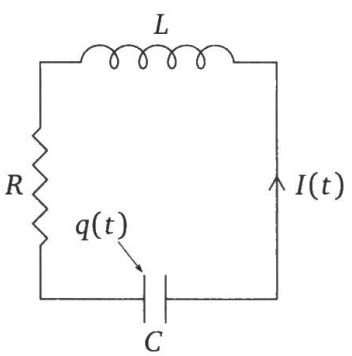


Figura 5.10. Un circuito RLC.

[6] Sin embargo, hay que ser consciente de que aunque el caso que estoy considerando (que la fuerza resistiva **f** es lineal en **v**) es muy importante, es un caso *muy* especial. Describiré algunas de las asombrosas complicaciones que pueden ocurrir cuando **f** no es lineal en **v** en el Capítulo 12 sobre mecánica no lineal y caos.

Esta tiene exactamente la forma de la ecuación (5.24) para el oscilador amortiguado, y todo lo que aprendamos sobre la ecuación para el oscilador será inmediatamente aplicable al circuito RLC. Advierta que la inductancia L del circuito eléctrico juega el papel de la masa del oscilador, el término de la resistencia $R\dot{q}$ corresponde a la fuerza resistiva, y $1/C$ a la constante del muelle k.

Volvamos ahora a mecánica y a la ecuación diferencial (5.24). Para resolver esta ecuación es conveniente dividir por m y después introducir otras dos constantes. Renombraré la constante b/m como 2β,

$$\frac{b}{m} = 2\beta. \tag{5.26}$$

Este parámetro β, que se puede denominar **constante de amortiguamiento**, es simplemente una forma conveniente de caracterizar la resistencia de la fuerza de amortiguamiento (al igual que b, una β grande corresponde a una fuerza de amortiguamiento grande, y al revés). Renombraré la constante k/m como ω_0^2, esto es,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{5.27}$$

Observe que ω_0 es precisamente lo que yo estaba llamando ω en las dos secciones anteriores. He añadido el subíndice porque, una vez que admitimos fuerzas resistivas, varias otras frecuencias toman importancia. De ahora en adelante, usaré la notación ω_0 para denotar la **frecuencia natural** del sistema, la *frecuencia a la cual oscilaría si no hubiera una fuerza resistiva presente*, como la que da (5.27). Con estas notaciones, la ecuación de movimiento (5.24) para el oscilador amortiguado se convierte en

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{5.28}$$

Advierta que ambos parámetros β y ω_0 tienen dimensiones de inverso de tiempo, es decir, de frecuencia.

La ecuación (5.28) es otra ecuación de segundo orden, lineal, homogénea [la última fue (5.4)]. Por lo tanto, si por cualquier motivo podemos encontrar dos soluciones independientes,[7] $x_1(t)$ y $x_2(t)$ por ejemplo, entonces cualquier solución debe tener la forma $C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$. Esto significa que podemos jugar a un juego de acierto inspirado para hallar dos soluciones independientes; y si de alguna manera

[7] Ya es hora que dé una definición de «independiente». En general es un poco complicada, pero para dos funciones es fácil: dos funciones son independientes si ninguna es un múltiplo constante de la otra. De este modo las dos funciones $\text{sen}(x)$ y $\cos(x)$ son independientes; también las dos funciones x y x^2; pero las dos funciones x y $3x$ no lo son.

podemos encontrarlas, entonces tenemos la solución general.

Concretamente, nada nos impide *intentar* encontrar una solución de la forma

$$x(t) = e^{rt} \tag{5.29}$$

para la cual

$$\dot{x} = re^{rt}$$

y

$$\ddot{x} = r^2 e^{rt}.$$

Sustituyendo en (5.28) vemos que nuestra suposición (5.29) satisface (5.28) si y sólo si

$$r^2 + 2\beta r + \omega_o^2 = 0 \tag{5.30}$$

[una ecuación a veces llamada **ecuación auxiliar** para la ecuación diferencial (5.28)]. Las soluciones de esta ecuación son, por supuesto, $r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}$. Por consiguiente, si definimos las dos constantes

$$\begin{aligned} r_1 &= -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2} \\ r_2 &= -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2} \end{aligned} \tag{5.31}$$

entonces las dos funciones $e^{r_1 t}$ y $e^{r_2 t}$ *son* dos soluciones independientes de (5.28) y la solución general es

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \tag{5.32}$$

$$= e^{-\beta t}\left(C_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}\, t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}\, t}\right). \tag{5.33}$$

Esta solución es más bien demasiado desordenada para ser especialmente reveladora, pero, examinando varios valores de la constante de amortiguamiento β, podemos comenzar a ver lo que (5.33) implica.

Oscilación subamortiguada

Si no hay amortiguamiento, entonces la constante de amortiguamiento β es cero, la raíz cuadrada en los exponentes de (5.33) es justo $i\omega_o$, y nuestra solución se reduce a

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_o t} + C_2 e^{-i\omega_o t}, \tag{5.34}$$

la solución familiar para el oscilador armónico.

Amortiguamiento débil

Supongamos ahora que la constante de amortiguamiento β es pequeña. Específicamente, supongamos que

$$\beta < \omega_0, \tag{5.35}$$

una condición a veces denominada **subamortiguamiento**. En este caso, la raíz cuadrada en los exponentes de (5.33) es de nuevo imaginaria, y podemos escribir

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 \beta^2} = i\omega_1,$$

donde

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{5.36}$$

El parámetro ω_1 es una frecuencia, la cual es menor que la frecuencia natural ω_0. En el caso importante de amortiguamiento muy débil ($\beta \ll \omega_0$), ω_1 está muy cerca de ω_0. Con esta notación, la solución (5.33) se convierte en

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}\right). \tag{5.37}$$

Esta solución es el producto de dos factores. El primero, $e^{-\beta t}$, es una exponencial decreciente, que va disminuyendo gradualmente hacia cero. El segundo factor tiene exactamente la forma (5.34) de oscilaciones subamortiguadas, excepto que la frecuencia natural ω_0 se sustituye por la frecuencia ω_1, de alguna manera más baja. Podemos reescribir el segundo factor, como en la ecuación (5.11), de la forma $A\cos(\omega_1 t - \delta)$ y nuestra solución se convierte en

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t - \delta). \tag{5.38}$$

Esta solución describe claramente el movimiento armónico simple de la frecuencia ω_1 con una amplitud que decrece exponencialmente $Ae^{-\beta t}$, como se muestra en la Figura 5.11. El resultado (5.38) sugiere otra interpretación de la constante de amortiguamiento β. Como β tiene dimensiones de inverso de tiempo, $1/\beta$ es un tiempo, y vemos ahora que es el tiempo en el que la función amplitud $Ae^{-\beta t}$ cae a un $1/e$ de su valor inicial. Por tanto, al menos para oscilaciones subamortiguadas, β se puede ver como el parámetro de extinción, una medida del ritmo al que se extingue el movimiento,

$$\text{(parámetro de extinción)} = \beta \qquad \text{[movimiento subamortiguado]}.$$

Cuanto mayor sea β, más rápidamente se extinguen las oscilaciones, al menos para el caso en que $\beta < \omega_0$ que estamos discutiendo aquí.

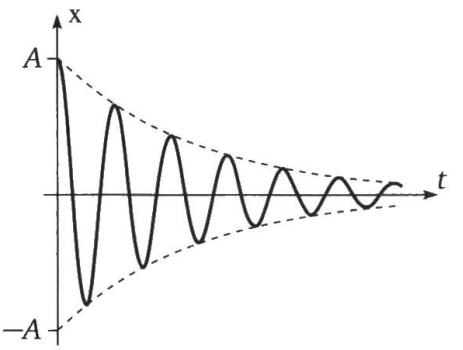


Figura 5.11. Las oscilaciones subamortiguadas se pueden entender como oscilaciones armónicas simples con una amplitud que decrece exponencialmente $Ae^{-\beta t}$. Las curvas a trazos son las envolventes, $\pm Ae^{-\beta t}$.

Amortiguamiento fuerte

Supongamos ahora que la constante de amortiguamiento β es grande. Específicamente supongamos que

$$\beta > \omega_0, \tag{5.39}$$

una condición a veces denominada **sobreamortiguamiento**. En este caso, la raíz cuadrada en los exponentes de (5.33) es real y nuestra solución es

$$x(t) = C_1 e^{-\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} + C_2 e^{-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t}. \tag{5.40}$$

Aquí tenemos dos funciones exponenciales reales, las cuales disminuyen a medida que pasa el tiempo (porque los coeficientes de t en ambos exponentes son negativas). En este caso, el movimiento está tan amortiguado que no completa oscilaciones auténticas. La Figura 5.12 muestra un caso típico en el que el oscilador es empujado desde O en $t = 0$; se mueve hasta un desplazamiento máximo y luego se mueve otra vez hacia atrás aún más despacio; sólo vuelve al origen en el límite en que $t \to \infty$. El primer término del segundo miembro de (5.40) disminuye más len-

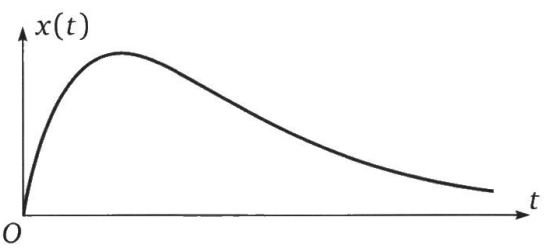


Figura 5.12. El movimiento sobreamortiguado en el que el oscilador es empujado desde el origen en el instante $t = 0$. Se mueve hasta un desplazamiento máximo y después vuelve atrás hacia O asintóticamente cuando $t \to \infty$.

tamente que el segundo, porque el coeficiente en su exponente es el menor de los dos. Por consiguiente el movimiento a largo plazo está dominado por este primer término. En particular, el ritmo al que el movimiento se extingue se puede caracterizar por el coeficiente del primer exponente,

$$\text{(parámetro de extinción)} = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad \text{[movimiento sobreamortiguado]}. \tag{5.41}$$

Una inspección cuidadosa de (5.41) muestra que (al contrario de lo que uno podría esperar) el ritmo de extinción del movimiento sobreamortiguado se hace menor si la constante de amortiguamiento β se hace mayor. (Vea el Problema 5.20).

Amortiguamiento crítico

La frontera entre subamortiguamiento y superamortiguamiento se denomina **amortiguamiento crítico** y ocurre cuando la constante de amortiguamiento es igual a la frecuencia natural, $\beta = \omega_0$. Este caso tiene algunos detalles interesantes, especialmente desde el punto de vista matemático. Cuando $\beta = \omega_0$ las dos soluciones que encontramos en (5.33) son la misma solución, a saber

$$x(t) = e^{-\beta t}. \tag{5.42}$$

[Esto sucedió porque las dos soluciones de la ecuación auxiliar (5.30) coinciden cuando $\beta = \omega_0$]. Este es un caso en el que nuestra intuición, al buscar una solución de la forma $x(t) = e^{rt}$, falla a la hora de encontrar dos soluciones de la ecuación de movimiento, y tenemos que usar algunos otros métodos para encontrar una segunda solución. Afortunadamente, en este caso, no es difícil hallar una segunda solución: como se puede comprobar fácilmente, la función

$$x(t) = te^{-\beta t} \tag{5.43}$$

es también una solución de la ecuación de movimiento (5.28) en el caso especial en que $\beta = \omega_0$. (Consulte los Problemas 5.21 y 5.24). Por tanto la solución general para el caso de amortiguamiento crítico es

$$x(t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t}. \tag{5.44}$$

Observe que ambos términos contienen el mismo factor exponencial $e^{-\beta t}$. Como este factor es el que domina la extinción de las oscilaciones cuando $t \to \infty$, podemos decir que ambos términos disminuyen más o menos al mismo ritmo, con parámetro de extinción

$$\text{(parámetro de extinción)} = \beta = \omega_0 \qquad \text{[amortiguamiento crítico]}.$$

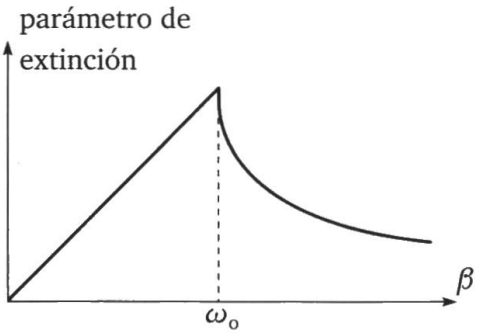


Figura 5.13. Parámetro de extinción para oscilaciones amortiguadas en función de la constante de amortiguamiento β. El parámetro de extinción es mayor, y el movimiento se extingue de la manera más rápida, para amortiguamiento crítico, con $\beta = \omega_0$.

Es interesante comparar los ritmos a los que los distintos tipos de oscilación amortiguada se extinguen. Hemos visto que en cada caso este ritmo está determinado por un «parámetro de extinción», que es justo el coeficiente (negativo) de t en el exponente del factor exponencial dominante de $x(t)$. Nuestros hallazgos se pueden resumir como sigue:

amortiguamiento	β	parámetro de extinción
ninguno	$\beta = 0$	0
infra	$\beta < \omega_0$	β
crítico	$\beta = \omega_0$	β
sobre	$\beta > \omega_0$	$\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

La Figura 5.13 es un gráfico del parámetro de extinción en función de β y muestra claramente que el movimiento se extingue más rápidamente cuando $\beta = \omega_0$; esto es, cuando el amortiguamiento es crítico. Hay situaciones en las que uno quiere que algunas oscilaciones se extingan tan rápido como sea posible, como por ejemplo la aguja de un medidor analógico (voltímetro o indicador de presión, por ejemplo) para que la lectura correcta se establezca rápidamente. Análogamente, en un coche, uno quiere que las oscilaciones causadas por un camino con baches se extingan rápidamente. En tales casos uno debe conseguir que se amortigüen las oscilaciones (por los amortiguadores del coche), y para conseguir los resultados más rápidos el amortiguamiento debe estar razonablemente cerca del crítico.

5.5 Oscilaciones amortiguadas forzadas

Cualquier oscilador natural, si se deja evolucionar, finalmente llega al reposo, a medida que las inevitables fuerzas de amortiguamiento agotan su energía. Por tanto,

si se quiere que continúen las oscilaciones, se debe disponer alguna fuerza «de control» externa que las mantenga. Por ejemplo, el movimiento del péndulo en un reloj de pie funciona por los empujones periódicos causados por los pesos del reloj; el movimiento de un niño pequeño en un columpio se mantiene gracias a los empujones periódicos de sus padres. Si denotamos la fuerza de control externo por $F(t)$ y suponemos como antes que la fuerza de amortiguamiento tiene la forma $-bv$, entonces la fuerza neta sobre el oscilador es $-bv - kx + F(t)$ y la ecuación de movimiento se puede escribir como

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t). \tag{5.45}$$

Como su homóloga para las oscilaciones no forzadas, esta ecuación diferencial aparece en varias otras áreas de la física. Un ejemplo importante es el circuito RLC de la Figura 5.10. Si queremos que la corriente oscilante del circuito persista, debemos aplicar una FEM externa, $\mathcal{E}(t)$, en cuyo caso la ecuación de movimiento para el circuito se convierte en

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}(t) \tag{5.46}$$

en correspondencia perfecta con (5.45).

Como antes, podemos arreglar la ecuación (5.45) si dividimos la ecuación por m y sustituimos b/m por 2β y k/m por ω_0^2. Además, denotaré $F(t)/m$ por

$$f(t) = \frac{F(t)}{m}, \tag{5.47}$$

la fuerza por unidad de masa. Con esta notación, (5.45) se convierte en

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t). \tag{5.48}$$

Operadores diferenciales lineales

Antes de que discutamos cómo resolver esta ecuación, me gustaría optimizar nuestra notación. Es de gran ayuda pensar en el primer miembro de (5.48) como resultado de un cierto operador que actúa sobre la función $x(t)$. Específicamente, definimos el *operador diferencial*

$$D = \frac{d^2}{dt^2} + 2\beta\frac{d}{dt} + \omega_0^2. \tag{5.49}$$

El significado de esta definición es simplemente que cuando D actúa sobre x da el primer miembro de (5.48):

$$Dx \equiv \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x.$$

Esta definición es obviamente una conveniencia de notación; la ecuación (5.48) se convierte justo en

$$Dx = f \tag{5.50}$$

pero es mucho más: la noción de operador como (5.49) es una herramienta matemática poderosa, con aplicaciones en toda la física. Por el momento lo importante es que el operador es *lineal*: sabemos por cálculo elemental que la derivada de ax (donde a es una constante) es $a\dot{x}$ y que la derivada de $x_1 + x_2$ es $\dot{x}_1 + \dot{x}_2$. Como esto también se aplica a las segundas derivadas, se aplica al operador D:

$$D(ax) = aDx \quad \text{y} \quad D(x_1 + x_2) = Dx_1 + Dx_2.$$

(Es importante asegurarse de que se entiende el significado de estas dos ecuaciones). Podemos combinarlas en una sola ecuación:

$$D(ax_1 + bx_2) = aDx_1 + bDx_2 \tag{5.51}$$

para cualesquiera dos constantes a y b y cualesquiera dos funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Cualquier operador que satisface esta ecuación se llama **operador lineal**.

Antes hemos usado realmente la propiedad (5.51) de los operadores lineales. La ecuación (5.28) para un oscilador amortiguado (no forzado) se puede escribir como

$$Dx = 0. \tag{5.52}$$

El principio de superposición afirma que si x_1 y x_2 son soluciones de esta ecuación, entonces también lo es $ax_1 + bx_2$ para cualesquiera constantes a y b. En nuestra nueva notación de operadores, la prueba es muy sencilla: tenemos que $Dx_1 = 0$ y $Dx_2 = 0$, y usando (5.51) se sigue inmediatamente que

$$D(ax_1 + bx_2) = aDx_1 + bDx_2 = 0 + 0 = 0;$$

esto es, $ax_1 + bx_2$ es también una solución.

La ecuación (5.52), $Dx = 0$, para el oscilador forzado se llama ecuación **homogénea**, porque cada término incluye o bien x o bien una de sus derivadas exactamente una vez. La ecuación (5.50), $Dx = f$, se llama ecuación **no homogénea**, porque contiene el término no homogéneo f, que no incluye x en absoluto. Nuestro trabajo ahora es resolver esta ecuación no homogénea.

Soluciones particulares y homogéneas

Usando nuestra nueva notación de operadores, podemos encontrar la solución general de la ecuación (5.48) de manera sorprendentemente fácil; en realidad, ya hemos hecho la mayor parte del trabajo. Supongamos primero que hemos hallado de alguna manera una solución; es decir, hemos encontrado una función $x_p(t)$ que satisface

$$Dx_p = f. \tag{5.53}$$

Llamamos a esta función $x_p(t)$ una **solución particular** de la ecuación, y el subíndice «p» quiere decir «particular». Ahora consideremos por un momento la ecuación homogénea $Dx = 0$ y supongamos que tenemos una solución $x_h(t)$, que satisface

$$Dx_h = 0. \tag{5.54}$$

A esta función la llamamos **solución homogénea**.[8] Ya sabemos todo sobre las soluciones de la ecuación homogénea, y sabemos de (5.32) que x_h debe tener la forma

$$x_h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \tag{5.55}$$

donde ambas exponenciales se extinguen cuando $t \to \infty$.

Estamos ya preparados para probar el resultado crucial. Primero, si x_p es una solución particular que satisface (5.53), entonces $x_p + x_h$ es otra solución, para

$$D(x_p + x_h) = Dx_p + Dx_h = f + 0 = f.$$

Dada una solución particular x_p, ésta nos da muchas otras soluciones $x_p + x_h$. Y hemos encontrado de hecho *todas* las soluciones, porque la función x_h contiene dos constantes arbitrarias, y sabemos que la solución general de cualquier ecuación de segundo orden contiene exactamente dos constantes arbitrarias. Por lo tanto, $x_p + x_h$, con x_h dada por (5.55) es la solución general.

Este resultado significa que todo lo que tenemos que hacer es encontrar de alguna forma una única solución particular $x_p(t)$ de la ecuación de movimiento (5.48), y tendremos *todas* las soluciones de la forma $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$.

Soluciones complejas para una fuerza externa sinusoidal

Me detendré especialmente ahora en el caso en el cual la fuerza externa $f(t)$ es una función sinusoidal del tiempo,

---

[8] Otro nombre frecuente es el de *función complementaria*, aunque tiene la desventaja de que es difícil de recordar cuál es la «particular» y cuál es la «complementaria»

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t), \tag{5.56}$$

donde f_0 denota la amplitud de la fuerza externa [realmente la amplitud dividida por la masa del oscilador, porque $f(t) = F(t)/m$] y ω es la frecuencia angular de la fuerza externa. (Se debe tener cuidado en distinguir la *frecuencia forzada* ω de la *frecuencia natural* ω_0 del oscilador. Éstas son frecuencias totalmente independientes, aunque veremos que el oscilador responde mejor cuando $\omega \approx \omega_0$). La fuerza externa para muchos osciladores forzados es, en una primera aproximación, sinusoidal. Por ejemplo, incluso la acción del padre empujando al niño en un columpio se puede aproximar groseramente por (5.56); la FEM inducida en los circuitos de una radio por una señal de transmisión tiene casi esta forma exactamente. Probablemente la mayor importancia de las fuerzas externas sinusoidales es que, de acuerdo con el teorema de Fourier,[9] esencialmente *cualquier* fuerza externa se puede construir como una serie de fuerzas sinusoidales.

Supongamos por tanto que la fuerza externa está dada por (5.56), de tal manera que la ecuación de movimiento (5.48) toma la forma

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t). \tag{5.57}$$

La resolución de esta ecuación se simplifica enormemente utilizando el siguiente truco: para cualquier solución de (5.57), debe haber una solución de la misma ecuación, pero con el coseno del segundo miembro reemplazado por una función seno. (Después de todo, estas dos difieren sólo por un cambio en el origen de tiempos). De esta manera, debe haber también una función $y(t)$ que cumpla

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = f_0(\operatorname{sen}\omega t). \tag{5.58}$$

Supongamos ahora que definimos la función compleja

$$z(t) = x(t) + iy(t), \tag{5.59}$$

con $x(t)$ como su parte real e $y(t)$ como su parte imaginaria. Si multiplicamos (5.58) por i y lo sumamos a (5.57), encontramos que

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\omega t}. \tag{5.60}$$

Aunque de momento no lo parezca, la Ecuación (5.60) es un avance tremendo. Por las propiedades simples de la función exponencial, (5.60) es mucho más fácil de

[9] Llamado así por el matemático francés, el barón Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830. Vea las Secciones 5.7-5.9.

resolver que (5.57) o (5.58). Y tan pronto como encontremos una solución $z(t)$ de (5.60), sólo tenemos que tomar su parte real para tener una solución de la ecuación (5.57) cuyas soluciones son las que queremos realmente.

En la búsqueda de una solución de (5.60), somos obviamente libres de *probar* cualquier función que queramos. Concretamente, vamos a ver si hay una solución de la forma

$$z(t) = Ce^{i\omega t}, \tag{5.61}$$

donde C es una constante todavía indeterminada. Si sustituimos esta suposición en el primer miembro de (5.60), obtenemos

$$(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2)Ce^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}.$$

En otras palabras, nuestra suposición (5.61) es una solución de (5.60) si y sólo si

$$C = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}, \tag{5.62}$$

y hemos tenido éxito en hallar una solución particular de la ecuación de movimiento.

Antes de tomar la parte real de $z(t) = Ce^{i\omega t}$, es conveniente escribir el coeficiente complejo C de la forma

$$C = Ae^{-i\delta}, \tag{5.63}$$

donde A y δ son reales. [Cualquier número complejo se puede escribir de esta forma; la notación particular está escogida para que coincida con (5.14)]. Para identificar A y δ, debemos comparar (5.62) y (5.63). Primero, tomando el valor absoluto al cuadrado de las dos ecuaciones encontramos que

$$A^2 = CC^* = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega} \cdot \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega}$$

o

$$A^2 = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}. \tag{5.64}$$

(Asegúrese de entender esta deducción. Vea el Problema 5.35 para tener una pauta). Vamos a ver en un momento que A es justo la amplitud de las oscilaciones causadas por la fuerza externa $f(t)$. Por consiguiente el resultado (5.64) es el más importante de nuestra discusión. Muestra cómo la amplitud de la oscilación depende de los distintos parámetros. En particular, vemos que la amplitud es máxima cuando $\omega_0 \approx \omega$, de tal manera que el denominador es pequeño; en otras palabras,

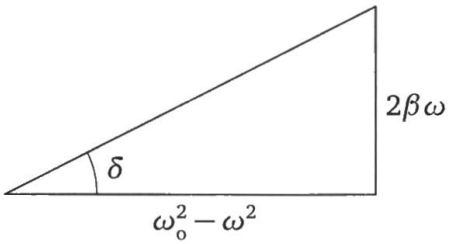


Figura 5.14. El ángulo de fase δ es el ángulo de este triángulo.

el oscilador presenta una respuesta óptima cuando es conducido a una frecuencia ω que está cerca de su frecuencia natural ω_0, como probablemente se había adivinado.

Antes de continuar discutiendo las propiedades de nuestra solución, necesitamos identificar el ángulo de fase δ de (5.63). Comparando (5.63) y (5.62) y reagrupando, vemos que

$$f_0 e^{i\delta} = A(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega).$$

Como f_0 y A son reales, esto quiere decir que el ángulo de fase δ es el mismo que el ángulo de fase del número complejo $(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega$. Esta relación está ilustrada en la Figura 5.14, de la cual concluimos que

$$\delta = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2\omega^2}\right). \tag{5.65}$$

Nuestra búsqueda de una solución particular ha concluido. La solución compleja «ficticia» introducida en (5.59) es

$$z(t) = Ce^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t - \delta)}$$

y la parte real de esta es la solución que estamos buscando,

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta) \tag{5.66}$$

donde las constantes reales A y δ están dadas por (5.64) y (5.65).

La solución (5.66) es justo una solución particular de la ecuación de movimiento. La solución general se halla sumando cualquier solución de la ecuación homogénea correspondiente, como la dada por (5.55); es decir, la solución general es

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta) + C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}. \tag{5.67}$$

Como los dos términos extra en esta solución general se extinguen ambos exponencialmente a medida que pasa el tiempo, se llaman **transitorios**. Dependen de las condiciones iniciales del problema pero son finalmente irrelevantes: el comporta-

miento a largo plazo de nuestra solución particular (5.66) es la solución en la que normalmente estaremos interesados, y exploraremos sus propiedades en la siguiente sección.

Antes de discutir un ejemplo del movimiento (5.67), es importante tener muy claro el tipo de sistema al que (5.67) aplica, a saber, cualquier oscilador para el que tanto la fuerza de restauración $(-kx)$ como la fuerza resistiva $(-b\dot{x})$ son *lineales*; un oscilador *lineal* forzado y amortiguado cuya ecuación de movimiento (5.45) es una ecuación diferencial *lineal*. Como las ecuaciones diferenciales no lineales son muchas veces difíciles de resolver, la mayoría de los libros de mecánica se han centrado en las ecuaciones lineales. Esto ha formado la impresión equivocada de que las ecuaciones lineales eran en algún sentido la norma, y de que la solución (5.67) era la única manera (o, al menos, la única importante) de la que se podía comportar un oscilador. Como veremos en el Capítulo 12 sobre mecánica no lineal y caos, un oscilador cuya ecuación de movimiento es no lineal se puede comportar de varias maneras que son sorprendentemente diferentes de (5.67). Una razón importante para estudiar el oscilador lineal aquí es para proporcionar un telón de fondo sobre el que estudiar el oscilador no lineal más adelante.

Los detalles del movimiento (5.67) dependen de la resistencia del parámetro de amortiguamiento β. Para concretar, supongamos que nuestro oscilador está débilmente amortiguado, con β menor que la frecuencia natural ω_0 (infraamortiguamiento). En este caso, sabemos que los dos términos transitorios de (5.67) se pueden reescribir como en (5.38), así que

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta) + A_{\text{tr}} e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t - \delta_{\text{tr}}). \tag{5.68}$$

Es necesario pensar detenidamente sobre esta fórmula quizá algo confusa. El segundo término del segundo miembro es el término homogéneo o transitorio, y he añadido el subíndice «tr» para distinguir las constantes A_{tr} y δ_{tr} de las A y δ del primer término. Las dos constantes A_{tr} y δ_{tr} son *constantes arbitrarias*; (5.68) es un movimiento posible de nuestro sistema para *cualesquiera* valores de A_{tr} y δ_{tr}, que vienen determinados por las condiciones iniciales. El factor $e^{-\beta t}$ pone de manifiesto que este término transitorio decrece exponencialmente y es de hecho irrelevante para el comportamiento a largo plazo. A medida que decrece, el término transitorio oscila con la frecuencia angular ω_1 del oscilador no forzado (pero todavía amortiguado), como en (5.36). El primer término es nuestra solución particular y sus dos constantes A y δ son ciertamente no arbitrarias; están determinadas por (5.64) y (5.65) en términos de los parámetros del sistema. Este término oscila con la frecuencia ω de la fuerza externa y con amplitud invariable, por el tiempo que esté actuando la fuerza externa.

Ejemplo 5.3 *Representación gráfica de un oscilador lineal amortiguado y forzado*

Trazar un plano de $x(t)$ como se da en (5.68) para un oscilador lineal amortiguado y forzado que se deja evolucionar desde el reposo en el origen en el instante $t = 0$, con los siguientes parámetros: frecuencia forzada $\omega = 2\pi$, frecuencia natural $\omega_0 = 5\omega$, extinción constante $\beta = \omega_0/20$ y amplitud forzada $f_0 = 1000$. Mostrar los cinco primeros ciclos del movimiento forzado.

La elección de una frecuencia forzada igual a 2π significa que el período forzado es $\tau = 2\pi/\omega = 1$; esto significa sencillamente que hemos elegido medir el tiempo en unidades del período forzado, a menudo una buena elección. Que $\omega_0 = 5\omega$ significa que la frecuencia natural de nuestro oscilador es cinco veces la frecuencia forzada; esto nos permitirá distinguirlas con facilidad sobre una gráfica. Que $\beta = \omega_0/20$ significa que el oscilador está débilmente amortiguado. Finalmente, la elección de $f_0 = 1000$ es sencillamente la elección de nuestra unidad de fuerza; la razón para esta aparentemente peculiar elección es que nos lleva a una amplitud de tamaño conveniente de oscilación (principalmente A cercana a 1).

Nuestra primera tarea será determinar las distintas constantes de (5.68) en términos de los parámetros dados. De hecho esto es más fácil si reescribimos el término transitorio de (5.68) en la forma «coseno más seno», de manera que

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta) + e^{-\beta t}[B_1 \cos(\omega_1 t) + B_2 \operatorname{sen}(\omega_1 t)]. \tag{5.69}$$

Las constantes A y δ vienen determinadas por (5.64) y (5.65), que para los parámetros dados son

$$A = 1{,}06 \quad \text{y} \quad \delta = 0{,}0208.$$

La frecuencia ω_1 es

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 9{,}987\pi,$$

que es muy cercana a ω_0, algo que esperaríamos de un oscilador débilmente amortiguado. Para encontrar B_1 y B_2, debemos equiparar $x(0)$ tal como viene dado por (5.69) para su valor inicial dado x_0, y de la misma manera la expresión correspondiente para $\dot{x}_0$ al valor inicial v_0. Esto nos da dos ecuaciones simultáneas para B_1 y B_2, que se resuelven fácilmente (Problema 5.33) para dar

$$B_1 = x_0 - A\cos\delta \quad \text{y} \quad B_2 = \frac{1}{\omega_1}(v_0 - \omega A \operatorname{sen}\delta + \beta B_1) \tag{5.70}$$

o, con los números, incluyendo las condiciones iniciales $x_0 = v_0 = 0$,

$$B_1 = -1{,}05 \quad \text{y} \quad B_2 = -0{,}0572.$$

Poniendo todos estos números en (5.69), podemos trazar el movimiento, como se muestra en la Figura 5.15, donde la parte (a) muestra la fuerza externa $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$ y la parte (b) el movimiento resultante $x(t)$ del oscilador. La fuerza externa es, por supuesto, perfectamente sinusoidal con período 1. El movimiento resultante es mucho más interesante. Después de unos tres ciclos forzados ($t \gtrsim 3$), el movimiento es indistinguible de un coseno puro, y oscila exactamente a la frecuencia forzada; esto es, los transitorios se han extinguido y sólo permanece el movimiento a largo plazo. Sin embargo, antes de $t \approx 3$, los efectos de los transitorios son claramente visibles. Como oscilan a la frecuencia natural más rápida ω_0, aparecen como una rápida sucesión de picos y caídas. De hecho, puede verse fácilmente que hay cinco picos dentro del primer ciclo forzado, lo que indica que $\omega_0 = 5\omega$.

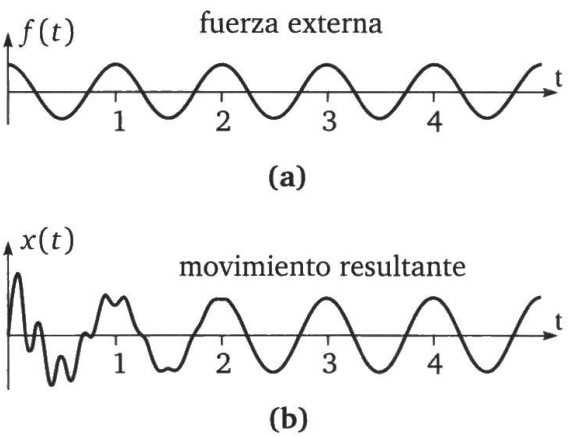


Figura 5.15. Respuesta de un oscilador lineal amortiguado a una fuerza externa sinusoidal, con tiempo t medido en unidades del período forzado. **(a)** La fuerza externa es un coseno puro en una función del tiempo. **(b)** El movimiento resultante para las condiciones iniciales $x_0 = v_0 = 0$. Para los dos o tres primeros ciclos, el movimiento transitorio es claramente visible, pero después sólo el movimiento a largo plazo permanece, oscilando como un seno a exactamente la frecuencia forzada. Tal y como se explica en el texto, el movimiento sinusoidal, después de $t \approx 3$ se denomina *atractor*.

Debido a que la oscilación momentánea depende de los valores iniciales de x_0 y v_0, valores diferentes de x_0 y v_0 nos llevarían a un movimiento inicial bien distinto. (Vea el Problema 5.36). Sin embargo, después de un corto período de tiempo (en este ejemplo, un par de ciclos), las diferencias iniciales desaparecen y el movimiento se ajusta al mismo movimiento sinusoidal de esta solución en particular (5.66), *independientemente de las condiciones iniciales*. Por esta razón, el movimiento de (5.66) es a veces denominado un **atractor** (los movimientos correspondientes a varias condiciones iniciales son «atraídos» por el particular movimiento (5.66)). Para el oscilador lineal aquí mencionado, hay un atractor único (para una fuerza externa dada): cada uno de los movimientos posibles del sistema, cualesquiera que

sean sus condiciones iniciales, es atraído al mismo movimiento (5.66). Veremos en el Capítulo 12 que para osciladores no lineales puede haber diferentes atractores y que para algunos valores de los parámetros el movimiento de un atractor puede ser mucho más complicado que la oscilación armónica simple en la frecuencia forzada.

La amplitud y fase del atractor visto en la Figura 5.15(b) depende de los parámetros de la fuerza externa (pero no, por supuesto, de las condiciones iniciales). La dependencia de la amplitud y la fase en estos parámetros es el objeto de la siguiente sección.

5.6 Resonancia

En la sección anterior consideramos un oscilador amortiguado controlado por una fuerza externa sinusoidal (en realidad fuerza dividida por masa) $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$ con frecuencia angular ω. Vimos que, además de los movimientos transitorios que se extinguen rápidamente, la respuesta del sistema es oscilar sinusoidalmente a la misma frecuencia, ω:

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta),$$

con una amplitud A dada por (5.64),

$$A^2 = \frac{{f_0}^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}, \tag{5.71}$$

y cambio de fase δ dado por (5.65).

La característica más obvia de (5.71) es que la amplitud A de la respuesta es proporcional a la amplitud de la fuerza externa, $A \propto f_0$, un resultado que se habrá adivinado. Aún más interesante es la dependencia de A en las frecuencias ω_0 (la frecuencia natural del oscilador) y ω (la frecuencia forzada), y en la constante de amortiguamiento β. El caso más interesante en cuando la constante de amortiguamiento β es muy pequeña. Hablaré sobre este caso. Con β pequeña, el segundo término en el denominador de (5.71) es pequeño. Si ω_0 y ω son muy diferentes, entonces el primer término en el denominador de (5.71) es grande, y la amplitud de las oscilaciones forzadas pequeña. Por otra parte, si ω_0 está muy cercana a ω, ambos términos en el denominador son pequeños, y la amplitud A es grande. Esto significa que si variamos o bien ω_0 o bien ω, puede haber cambios drásticos en la amplitud del movimiento del oscilador. Esto se ilustra en la Figura 5.16, que muestra A^2 como una función de ω_0 con ω fijos, para un sistema débilmente amortiguado ($\beta = 0{,}1\omega$). (Observe que, debido a que la energía del sistema es proporcional a A^2, es normal hacer gráficas de A^2 en lugar de A).

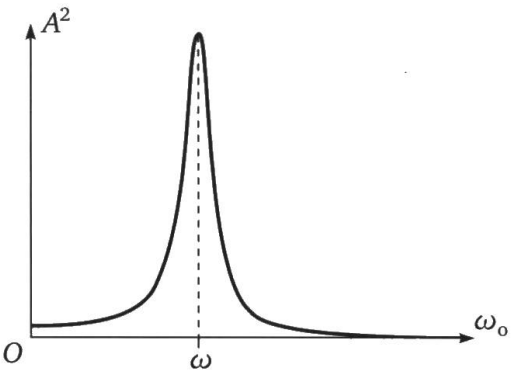


Figura 5.16. La amplitud al cuadrado, A^2, de un oscilador forzado, mostrada como una función de la frecuencia natural ω_0, con la frecuencia forzada ω fija. La respuesta es notablemente más grande cuando ω_0 y ω son parecidas.

Aunque el comportamiento ilustrado en la Figura 5.16 es sorprendentemente drástico, las características cualitativas son lo que se podía haber esperado. Si se deja evolucionar, el oscilador vibra a su frecuencia natural ω_0 (o con la frecuencia ligeramente más baja ω_1 si permitimos el amortiguamiento). Si intentamos forzarlo para que vibre con la frecuencia ω, entonces para los valores de ω cercanos a ω_0 el oscilador responde muy bien, pero si ω está lejos de ω_0, difícilmente responde en absoluto. Nos referimos a este fenómeno (la respuesta notablemente más grande de un oscilador cuando está forzado a la frecuencia correcta) como **resonancia**.

Una aplicación cotidiana de la resonancia es la recepción de las señales de radio por el circuito RLC de la radio de casa. Como vimos, la ecuación de movimiento de un circuito RLC es exactamente la misma que aquella para el oscilador forzado, y los circuitos RLC muestran el mismo fenómeno de resonancia. Cuando sintonizamos la radio para recibir la emisora KVOD a 90,1 MHz, estamos ajustando un circuito RLC en la radio para que su frecuencia natural sea 90,1 MHz. Las muchas emisoras de radio de tu barrio están todas mandando señales, cada una a su propia frecuencia y cada una induciendo una diminuta FEM en el circuito de nuestra radio. Pero sólo la señal con la frecuencia correcta realmente tiene éxito en conducir una corriente apreciable, que imita la señal mandada por nuestra emisora favorita y reproduce sus sonidos de emisión.

Un ejemplo de resonancia mecánica del tipo discutido aquí es el comportamiento de un coche que circula por una carretera tipo «tabla de lavar» en la que hay una serie de ondulaciones igualmente espaciadas. Cada vez que una rueda cruza una cresta, se impulsa hacia arriba, y la frecuencia de estos impulsos depende de la velocidad del coche. Hay una velocidad a la cual la frecuencia de estos impulsos se iguala con la frecuencia natural de la vibración de las ruedas sobre los amortiguadores[10] y las

[10] Son las ruedas (junto con los ejes) las que manifiestan las oscilaciones resonantes; la carrocería del coche, mucho más pesada, no se ve relativamente afectada.

ruedas resuenan, haciendo que el viaje sea incómodo. Si el coche reduce la velocidad o acelera, se aleja de la resonancia y el viaje es mucho más suave.

Otro ejemplo es cuando una sección de soldados marcha por un puente. Un puente, como casi cualquier sistema mecánico, tiene ciertas frecuencias naturales, y si los soldados aciertan a marchar con una frecuencia igual a alguna de estas frecuencias naturales, el puente podría posiblemente resonar de forma suficientemente violenta como para romperse. Por esta razón los soldados rompen el paso cuando cruzan un puente.

Los detalles del fenómeno de resonancia son un poco complicados. Por ejemplo, la localización exacta de la máxima respuesta depende de si variamos ω_0 con ω fijo o viceversa. La amplitud A es un máximo cuando el denominador,

$$\text{denominador} = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 \tag{5.72}$$

de (5.71) es un mínimo. Si variamos ω_0 con ω fijo (como cuando sintonizamos la radio para oír nuestra emisora favorita) este mínimo obviamente ocurre cuando $\omega_0 = \omega$, haciendo el primer término cero. Por otro lado, si variamos ω con ω_0 fijo (que es lo que pasa en muchas aplicaciones), entonces el segundo término en (5.72) también varía y como muestra la diferenciación directa el máximo ocurre cuando

$$\omega = \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \tag{5.73}$$

Sin embargo, cuando $\beta \ll \omega_0$ (que suele ser el caso más interesante), la diferencia entre (5.73) y $\omega = \omega_0$ es despreciable.

Hemos conocido tantas frecuencias diferentes en este capítulo que puede que valga la pena hacer una pausa para repasarlas. Primero está ω_0 la frecuencia natural del oscilador (en ausencia de cualquier tipo de amortiguamiento). Después, cuando añadimos un amortiguamiento pequeño, vimos que el mismo sistema oscilaba sinusoidalmente con frecuencia $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ bajo una envolvente que decrece exponencialmente. Entonces añadimos una fuerza externa con frecuencia ω, que puede, en principio, tomar cualquier valor independientemente de los dos primeros. No obstante, la respuesta del oscilador forzado es máxima cuando $\omega \approx \omega_0$; concretamente, si variamos ω con ω_0 fijo, la máxima respuesta se produce cuando $\omega = \omega_2$ como está definido por (5.73). Resumiendo:

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ = frecuencia natural del oscilador

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ = frecuencia del oscilador amortiguado

ω = frecuencia de la fuerza externa

$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ = valor de ω a cuya respuesta es máxima.

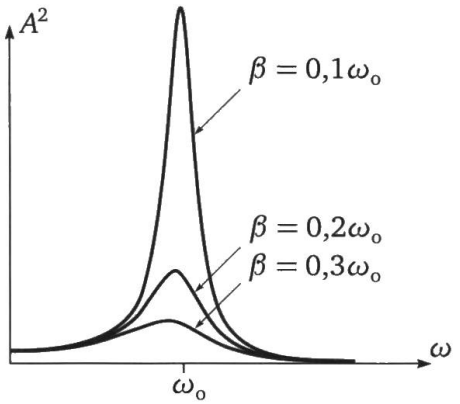


Figura 5.17. Amplitud para oscilaciones forzadas en función de la frecuencia forzada ω para tres valores diferentes de la constante de amortiguamiento β. Observe cómo a medida que β disminuye el pico de resonancia se hace más alto y más fino.

En cualquier caso, la máxima amplitud de las oscilaciones controladas se calcula poniendo $\omega_0 \approx \omega$ en (5.71), lo que da

$$A_{\text{máx}} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}. \tag{5.74}$$

Esto muestra que valores más pequeños de la constante de amortiguamiento β conducen a valores más grandes de la amplitud máxima de la oscilación, como está ilustrado en la Figura 5.17.[11]

Anchura de la resonancia; el factor *Q*

Se puede ver claramente de la Figura 5.17 que si hacemos más pequeña la constante de amortiguamiento β, el pico de resonancia no solamente se hace más alto, sino que también se hace más estrecho. Podemos precisar un poco esta idea definiendo la **anchura** (o **anchura completa a mitad de máximo** o **FWHM**) como el intervalo entre dos puntos donde A^2 es igual a la mitad de su máxima altura. Es un ejercicio sencillo (Problema 5.41) mostrar que los dos puntos de mitad de máximo están en $\omega \approx \omega_0 \pm \beta$, como en la Figura 5.18. Por lo tanto la anchura completa a mitad de máximo es

$$\text{FWHM} \approx 2\beta \tag{5.75}$$

[11] En esta figura decidí representar A^2 frente a ω con ω_0 fijo, en lugar de la forma que lo hice en la Figura 5.16. Observe que las curvas tienen formas muy parecidas de cualquiera de las dos maneras.

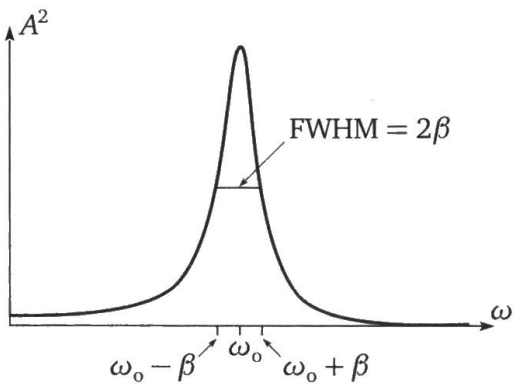


Figura 5.18. La anchura completa a mitad de máximo (FWHM) es la distancia entre los puntos donde A^2 es la mitad de su valor máximo.

o, análogamente, la **media anchura a mitad de máximo** es

$$\text{HWHM} \approx \beta. \tag{5.76}$$

La nitidez del pico de resonancia está indicada por la razón de su anchura 2β y su posición, ω_0. Para muchos propósitos, queremos una resonancia muy nítida (muy aguda), así que es práctica común definir un **factor de calidad** Q como el recíproco de esta razón:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}. \tag{5.77}$$

Un Q grande indica una resonancia estrecha, y al revés. Por ejemplo, los relojes dependen de la resonancia en un oscilador (un péndulo, o un cristal de cuarzo, por ejemplo) para regular el mecanismo y hacer que se mueva con una frecuencia muy bien definida. Esto requiere que la anchura 2β sea muy pequeña comparada con la frecuencia natural ω_0. En otras palabra, un buen reloj necesita un Q grande. El Q para un péndulo típico puede estar alrededor de 100; y aquel para un cristal de cuarzo alrededor de 10 000. Por lo tanto los relojes de cuarzo miden mucho mejor el tiempo que el típico reloj de pie.[12]

Hay otra manera de entender el factor de calidad Q. Vimos que, en ausencia de ninguna fuerza externa, las oscilaciones se extinguen en un tiempo del orden de $1/\beta$,

$$(\text{tiempo de extinción}) = 1/\beta.$$

[12] Realmente, ambos relojes, de cuarzo y de pie, miden mucho mejor el tiempo que lo que esta simple discusión parece sugerir. Un buen cronómetro mantiene la frecuencia muy cerca del *centro* de la resonancia. Por consiguiente la variabilidad de la frecuencia es realmente mucho más pequeña que la anchura de la resonancia. Sin embargo, la conclusión enunciada es correcta.

(Este fue realmente el tiempo que tardó la amplitud en caer hasta $1/e$ de su valor inicial). El período de una única oscilación es, por supuesto,

$$\text{período} = 2\pi/\omega_0.$$

(Recuerde que estamos suponiendo que $\beta \ll \omega_0$, así que no necesitamos distinguir entre ω_0 y ω_i). Por tanto podemos reescribir la definición de Q como

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \pi \frac{1/\beta}{2\pi/\omega_0} = \pi \frac{\text{tiempo de extinción}}{\text{período}}. \tag{5.78}$$

La razón de la derecha es justo el número de períodos en el tiempo de extinción. Por tanto, el factor de calidad Q es π veces el número de ciclos que realiza nuestro oscilador en un tiempo de extinción.[13]

La fase en resonancia

La diferencia de fase δ por la cual el movimiento del oscilador se retrasa con respecto a la fuerza externa viene dada por (5.65) como

$$\delta = \text{arctg}\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \tag{5.79}$$

Sigamos esta fase mientras variamos ω, empezando muy por debajo de una resonancia estrecha (β pequeño). Con $\omega \ll \omega_0$, (5.79) implica que δ es muy pequeño; esto es, mientras $\omega \ll \omega_0$ las oscilaciones están casi en fase con la fuerza externa. (Este era el caso en la Figura 5.15). A medida que ω aumenta y se acerca a ω_0, también δ aumenta lentamente. En resonancia, donde $\omega = \omega_0$, el argumento del arco tangente en (5.79) es infinito, así que $\delta = \pi/2$ y las oscilaciones están 90° por detrás de la fuerza externa. Una vez que $\omega > \omega_0$, el argumento del arco tangente es negativo y tiende a 0 cuando ω aumenta; por consiguiente δ aumenta más allá de $\pi/2$ y finalmente tiende a π. En particular, una vez que $\omega \gg \omega_0$, las oscilaciones están casi perfectamente fuera de fase con la fuerza externa. Todo este comportamiento está ilustrado para dos valores diferentes de β en la Figura 5.19. Advierta, en particular, que cuanto más estrecha sea la resonancia, más rápidamente δ salta de 0 a π.

En las resonancias de mecánica clásica, el comportamiento de la fase (como en la Figura 5.19) es normalmente menos importante que el de la amplitud (como en la Figura 5.18).[14] En las colisiones nucleares y atómicas, el cambio de fase es muchas

[13] Todavía otra definición (y quizá la más fundamental) es que $Q = 2\pi$ veces el cociente de la energía almacenada en el oscilador y la energía disipada en un ciclo. Vea el Problema 5.44.

[14] No obstante, el comportamiento de δ se puede observar. Construya un péndulo simple con un trozo de cuerda y una bola de metal, y hágalo oscilar sujetándolo por la parte de arriba

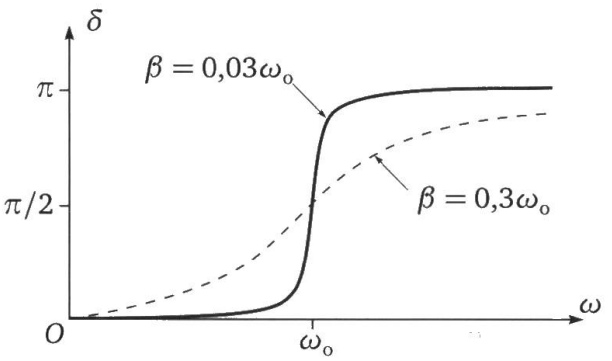


Figura 5.19. El cambio de fase δ aumenta desde 0 pasando por $\pi/2$ hasta π mientras la frecuencia forzada ω pasa por la resonancia. Cuanto más estrecha es la resonancia, más rápidamente ocurre este aumento. La curva continua es para una resonancia relativamente estrecha ($\beta = 0{,}03\omega_0$ o $Q = 16{,}7$), y la curva a trazos es para una resonancia más ancha ($\beta = 0{,}3\omega_0$ o $Q = 1{,}67$).

veces la magnitud de mayor interés. Tales colisiones está gobernadas por la mecánica cuántica, pero existe un fenómeno correspondiente de resonancia. Un haz de neutrones, por ejemplo, puede «conducir» un núcleo diana. Cuando la energía del haz es igual a una energía resonante del sistema (en mecánica cuántica la energía juega el papel de la frecuencia) se produce una resonancia y el cambio de fase aumenta rápidamente de 0 a π.

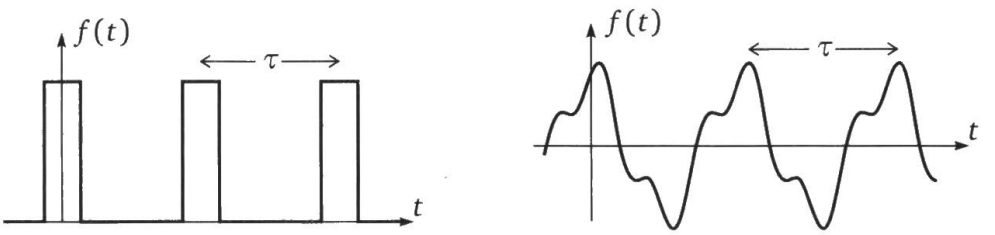
5.7 Series de Fourier*

* *Las series de Fourier tienen amplia aplicación en casi todas las áreas de la física moderna. Sin embargo, no las usaremos otra vez hasta el Capítulo 16. Por consiguiente, si vamos un poco justos de tiempo, podemos omitir las últimas tres secciones de este capítulo en una primera lectura.*

En las últimas dos secciones hemos discutido un oscilador que está forzado por una fuerza externa sinusoidal $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$. Hay dos razones principales por las que las fuerzas externas sinusoidales son importantes: la primera es simplemente que existen muchos sistemas importantes en los cuales la fuerza externa *es* sinusoidal (el circuito eléctrico de una radio es un buen ejemplo). La segunda es algo más sutil. Resulta que *cualquier* fuerza externa periódica se puede construir a partir de

---

y moviendo la mano de un lado a otro. Es obvio que el péndulo oscila mejor cuando la frecuencia de la mano iguala su frecuencia natural, pero también se puede observar que cuando la frecuencia es menor que la natural el péndulo se mueve en fase con la mano, mientras que cuando es mayor se mueve al revés que la mano.



(a) (b)

Figura 5.20. Dos ejemplos de funciones periódicas con período τ. **(a)** Un impulso rectangular, que podría representar un martillo que golpea un clavo con una fuerza constante a intervalos de τ, o una señal digital en una línea de teléfono. **(b)** Una señal periódica suave, que podría ser la variación de presión de un instrumento musical.

fuerzas sinusoidales usando la potente técnica de las series de Fourier. Por tanto, en un sentido que intentaré describir, resolviendo el movimiento con una fuerza sinusoidal hemos resulto ya el movimiento para cualquier fuerza periódica. Antes de poder apreciar este magnífico resultado, necesitamos repasar algunos aspectos de las series de Fourier. En esta sección esbozo las propiedades necesarias de las series de Fourier;[15] en la siguiente podemos aplicarlas al oscilador forzado.

Consideremos una función $f(t)$ que es periódica con período τ; esto es, la función se repite cada vez que el tiempo t avanza un período τ:

$$f(t+\tau) = f(t)$$

sea cual sea el valor de t. Podemos describir una función con esta propiedad como que es τ-periódica. Un ejemplo simple de una función τ-periódica sería la fuerza que un martillo ejerce sobre un clavo que está siendo golpeado a intervalos de τ, como se ha esbozado en la Figura 5.20(a). Otra podría ser la presión que ejerce sobre el tímpano de nuestro oído una nota ejecutada en un instrumento musical, como se ha esbozado en 5.20(b). Es fácil pensar en muchas más funciones periódicas. Hay un gran número de funciones sinusoidales que son periódicas con cualquier período dado: las funciones

$$\cos(2\pi t/\tau),\ \cos(4\pi t/\tau),\ \cos(6\pi t/\tau),\ \cdots \tag{5.80}$$

son todas τ-periódicas, como son las correspondientes funciones seno. (Si t aumenta en una cantidad τ, cada una de estas funciones retorna a su valor original (vea la Figura 5.21). Podemos escribir estas funciones sinusoidales de una forma un poco

[15] Como siempre, trataré de describir todo lo referente a la teoría que necesitemos. Para más detalles, vea, por ejemplo, *Mathematical Methods in the Physical Sciences* por Mary Boas (Wiley, 1983), Capítulo 7.

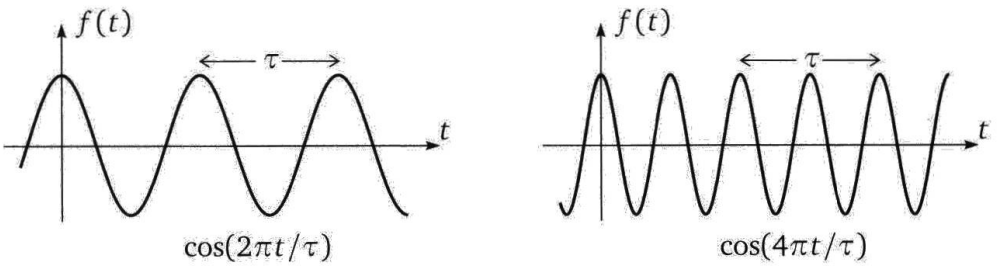


Figura 5.21. Cualquier función de la forma $\cos(2n\pi t/\tau)$ (o el seno correspondiente) es periódica con período τ si n es un entero. Observe que $\cos(4\pi t/\tau)$ también tiene el período más pequeño $\tau/2$, pero esto no cambia el hecho de que tiene período τ también.

más compacta si introducimos la frecuencia angular $\omega = 2\pi/\tau$, en cuyo caso todas las funciones de (5.80) y los senos correspondientes se pueden escribir como

$$\cos(n\omega t) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(n\omega t) \qquad [n = 0, 1, 2, \ldots] \tag{5.81}$$

(Si $n = 0$ la función coseno es la constante 1, que es ciertamente periódica, mientras que el seno es 0 y en absoluto interesante).

El que las funciones seno y coseno (5.81) sean todas τ-periódicas es razonablemente obvio. (Asegúrese de que entiende este punto). Lo realmente increíble es que, en cierto sentido, estas funciones seno y coseno definen *todas las posibles* funciones τ-periódicas. En 1807 el matemático francés Jean Baptiste Fourier (1768-1830) se dio cuenta de que *toda* función τ-periódica se puede escribir como una combinación lineal de senos y cosenos de (5.81). Es decir, si $f(t)$ es cualquier[16] función periódica con período τ entonces puede expresarse como la suma

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t)] \tag{5.82}$$

donde las constantes a_n y b_n dependen de la función $f(t)$. Este resultado extraordinariamente útil se llama teorema de Fourier, y la suma (5.82) se denomina **serie de Fourier** para $f(t)$.

No es difícil comprender por qué el teorema de Fourier fue recibido con una gran sorpresa, e incluso escepticismo, la primera vez que fue publicado. Afirma que una función discontinua, tal como el impulso rectangular de la Figura 5.20(a), se puede

[16] En los teoremas de este tipo siempre existen ciertas restricciones sobre la «razonabilidad» de la función $f(t)$, pero ciertamente el teorema de Fourier es válido para todas las funciones que tendremos ocasión de usar.

construir con funciones seno y coseno que son continuas y perfectamente suaves. Sorprendente o no, esto resulta ser cierto, como veremos enseguida mediante un ejemplo. Quizás aún más interesante es que muchas veces se da el caso en el que uno llega a una aproximación excelente reteniendo sólo algunos de los primeros términos de una serie de Fourier. Así, en lugar de tener que manejar una función posiblemente discontinua y bastante desagradable, sólo tenemos que manejar un número razonablemente pequeño de senos y cosenos. Antes de discutir la aplicación del teorema de Fourier al oscilador forzado, es necesario considerar algunas propiedades de las series de Fourier.

La prueba del teorema de Fourier es difícil (de hecho fue muchos años después del descubrimiento de Fourier cuando se encontró una prueba satisfactoria) y solamente pediré que se acepte directamente. No obstante, una vez que se acepta el resultado es fácil aprender a utilizarlo. En particular, para cualquier función periódica dada $f(t)$ es fácil hallar los coeficientes a_n y b_n. El Problema 5.48 brinda la oportunidad de demostrar que estos coeficientes están dados por

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad [n \geq 1] \tag{5.83}$$

y

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega t)\,dt \qquad [n \geq 1]. \tag{5.84}$$

Desafortunadamente los coeficientes para $n = 0$ requieren atención especial. Como el término $\mathrm{sen}\, n\omega t$ en (5.82) es idénticamente cero para $n = 0$, el coeficiente b_0 es irrelevante y podemos simplemente definirlo para que sea cero. Es muy fácil demostrar (Problema 5.46) que

$$a_0 = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)\,dt \tag{5.85}$$

Armados con estas fórmulas para los coeficientes de Fourier, es fácil encontrar la serie de Fourier para cualquier función periódica dada. En el siguiente ejemplo, hacemos esto para los impulsos rectangulares de la Figura 5.20(a).

Ejemplo 5.4 *Serie de Fourier para el impulso rectangular*

Hallar la serie de Fourier para el impulso rectangular periódico $f(t)$ mostrado en la Figura 5.22 en términos del período τ, la altura del impulso $f_{\text{máx}}$, y la duración del impulso $\Delta\tau$. Usando los valores $\tau = 1$, $f_{\text{máx}} = 1$, y $\Delta\tau = 0{,}25$, representar $f(t)$, también como la suma de los primeros tres términos de su serie de Fourier, y la suma de los primeros once términos.

Nuestra primera tarea es calcular los coeficientes de Fourier a_n y b_n para la función dada. Primero, de acuerdo con (5.85), el término constante a_0 es

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\tau}\int_{-\Delta\tau/2}^{\Delta\tau/2} f_{\text{máx}}\,dt = \frac{f_{\text{máx}}\,\Delta\tau}{\tau} \end{aligned} \tag{5.86}$$

donde el cambio en los límites de integración estaba permitido porque el integrando $f(t)$ es cero fuera de $\pm\Delta\tau/2$. Después, de acuerdo con (5.83), todos los demás coeficientes a $(n \geq 1)$ están dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2f_{\text{máx}}}{\tau}\int_{-\Delta\tau/2}^{\Delta\tau/2} \cos(n\omega t)\,dt \\ &= \frac{4f_{\text{máx}}}{\tau}\int_{0}^{\Delta\tau/2} \cos\left(\frac{2\pi n t}{\tau}\right)dt = \frac{2f_{\text{máx}}}{\pi n}\,\text{sen}\left(\frac{\pi n\,\Delta\tau}{\tau}\right). \end{aligned} \tag{5.87}$$

Advierta que para pasar de la segunda a la tercera línea he usado un truco que es muchas veces útil para evaluar coeficientes de Fourier. El integrando en la segunda línea, $\cos(n\omega t)$, es una función *par*; esto es, tiene el mismo valor en cualquier punto t que en $-t$. Por lo tanto podríamos sustituir cualquier integral desde $-T$ hasta T por dos veces la integral desde 0 hasta T.

Finalmente, los coeficientes b son todos exactamente cero, y si se examina la integral (5.84) se verá que (en este caso) el integrando es una función *impar*; esto

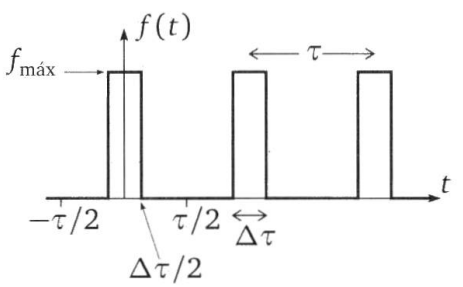


Figura 5.22. Un impulso rectangular periódico. El período es τ, la duración del impulso es $\Delta\tau$, y la altura del impulso es $f_{\text{máx}}$.

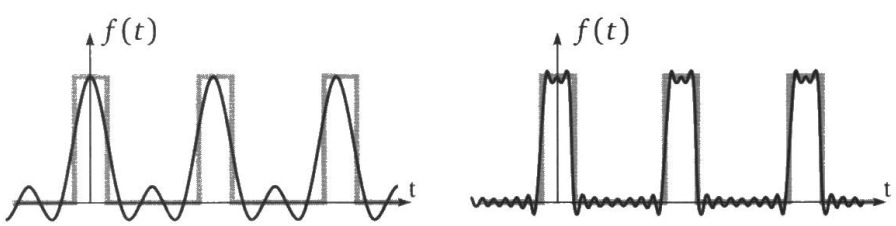
es, su valor en cualquier punto t es el negativo de su valor en $-t$. [Moverse desde t hasta $-t$ deja a $f(t)$ inalterada, pero cambia el signo de $\text{sen}(n\omega t)$]. Por lo tanto cualquier integral desde $-T$ hasta T es cero, porque la mitad izquierda cancela exactamente a la derecha. La serie de Fourier requerida es por tanto

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) \tag{5.88}$$

con el término constante a_0 dado por (5.86) y todos los coeficientes a restantes ($n \geq 1$) dados por (5.87). Si introducimos los números dados, todos estos coeficientes pueden ser evaluados y la serie de Fourier resultante es

$$\begin{aligned} f(t) = f_{\text{máx}}[&0{,}25 + 0{,}45\cos(2\pi t) + 0{,}32\cos(4\pi t) + 0{,}15\cos(6\pi t) \\ &+ 0\cos(8\pi t) - 0{,}09\cos(10\pi t) - 0{,}11\cos(12\pi t) + \cdots] \end{aligned} \tag{5.89}$$

El valor práctico de una serie de Fourier es normalmente mayor si la serie converge rápidamente, de tal forma que conseguimos una aproximación fiable tomando sólo unos pocos primeros términos de la serie. La Figura 5.23(a) muestra la suma de los primeros tres términos de la serie (5.89) y el impulso rectangular. Como probablemente espere el lector, con sólo tres términos suaves no obtenemos una aproximación exageradamente precisa de la función discontinua original. Sin embargo, los tres términos hacen un trabajo destacado imitando la forma general. Cuando hayamos incluido 11 términos, como en la Figura 5.23(b), el parecido es increíble.[17] En la próxima sección usaremos el método de las series de Fourier para resolver el movimiento de un oscilador forzado por los impulsos periódicos de este ejemplo. Encontraremos la solución como una serie de Fourier, que converge tan rápidamente que sólo los primeros 3 ó 4 términos ya nos dicen más de lo que queremos saber.



(a) 3 términos **(b)** 11 términos

Figura 5.23. **(a)** La suma de los primeros tres términos de la serie de Fourier para el impulso rectangular de la Figura 5.22. **(b)** La suma de los primeros 11 términos.

[17] Advierta, no obstante, que la serie de Fourier todavía tiene una pequeña dificultad en el entorno inmediato de las discontinuidades de $f(t)$. Esta tendencia de la serie de Fourier de salirse cerca de una discontinuidad se denomina «fenómeno de Gibbs».

5.8 Solución en serie de Fourier para el oscilador forzado*

* *Esta sección contiene una aplicación bonita del método de la serie de Fourier. Aunque es importante para entender este método, esta sección se puede omitir sin pérdida de continuidad.*

En esta sección combinaremos nuestros conocimientos sobre series de Fourier (Sección 5.7) con nuestra solución del oscilador forzado sinusoidalmente (Sección 5.5) para resolver el movimiento de un oscilador que está forzado por una fuerza externa periódica arbitraria. Para ver cómo funciona esto, volvamos a la ecuación de movimiento (5.48)

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f$$

donde $x = x(t)$ es la posición del oscilador, β es la constante de amortiguamiento, ω_0 es la frecuencia natural y $f = f(t)$ es cualquier fuerza externa periódica (realmente fuerza/masa) con período τ. Como antes, es conveniente reescribir esta ecuación en la forma compacta

$$Dx = f$$

donde D representa el operador diferencial lineal

$$D = \frac{d^2}{dt^2} + 2\beta\frac{d}{dt} + \omega_0^2.$$

El uso de series de Fourier para resolver este problema se apoya en la siguiente observación: supongamos que la fuerza $f(t)$ es la suma de dos fuerzas, $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, para cada cual hemos ya resuelto la ecuación de movimiento. Esto es, ya conocemos funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que cumplen

$$Dx_1 = f_1 \quad \text{y} \quad Dx_2 = f_2.$$

Entonces la solución[18] al problema de interés es justo la suma $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, como se puede demostrar fácilmente:

$$Dx = D(x_1 + x_2) = Dx_1 + Dx_2 = f_1 + f_2 = f$$

[18] Estrictamente hablando no deberíamos hablar de *la* solución, porque nuestra ecuación diferencial de segundo orden tiene muchas soluciones. Sin embargo, sabemos que la diferencia entre dos soluciones cualesquiera es transitoria (se anula) y nuestro interés principal es el comportamiento a largo plazo, que es por tanto único.

donde el segundo paso crucial es válido porque D es lineal. Este argumento funcionaría igualmente bien aunque hubiera muchos términos en la suma para $f(t)$, así que llegamos a la conclusión siguiente: si la fuerza externa $f(t)$ se puede expresar como la suma de algún número de términos

$$f(t) = \sum_n f_n(t)$$

y si sabemos las soluciones $x_n(t)$ para cada una de las fuerzas individuales $f_n(t)$, entonces la solución para la fuerza externa total $f(t)$ es justo la suma

$$x(t) = \sum_n x_n(t).$$

Este resultado es perfectamente apropiado para usar en combinación con el teorema de Fourier. Cualquier fuerza externa periódica $f(t)$ se puede desarrollar en una serie de senos y cosenos, y ya sabemos las soluciones para las fuerzas sinusoidales. Por consiguiente, sumando estas soluciones sinusoidales, podemos hallar la solución para cualquier fuerza externa periódica. Para simplificar la escritura, supongamos que la fuerza externa $f(t)$ contiene sólo términos coseno en su serie de Fourier. [Este era el caso para el impulso rectangular del Ejemplo 5.4, y es cierto para cualquier función par (que cumple $f(-t) = f(t)$) porque esta condición garantiza que los coeficientes de los términos seno son todos cero]. En este caso, la fuerza externa se puede escribir como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos(n\omega t) \tag{5.90}$$

donde f_n denota el n-ésimo coeficiente de Fourier de $f(t)$, y $\omega = 2\pi/\tau$ como es habitual. Ahora bien, cada término individual $f_n \cos(n\omega t)$ tiene la misma forma (5.56) que asumimos para la fuerza externa sinusoidal de la Sección 5.5 (excepto que la amplitud f_0 se ha convertido en f_n y la frecuencia ω se ha convertido en $n\omega$). La solución correspondiente fue dada en (5.66),[19]

$$x_n(t) = A_n \cos(n\omega t - \delta_n) \tag{5.91}$$

[19] Para $n = 0$, el término constante necesita una consideración aparte. Es fácil ver que para una fuerza constante f_0 la solución es $x_0 = f_0/\omega_0^2$. Esto es realmente exactamente lo que se obtiene si sencillamente se pone $n = 0$ en (5.92) y (5.93).

donde

$$A_n = \frac{f_n}{\sqrt{(\omega_o^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\beta^2 n^2 \omega^2}} \tag{5.92}$$

de (5.64), y

$$\delta_n = \text{arctg}\left(\frac{2\beta n\omega}{\omega_o^2 - n^2\omega^2}\right) \tag{5.93}$$

de (5.65). Como (5.91) es la solución para la fuerza externa $f_n \cos(n\omega t)$, la solución para la fuerza completa (5.90) es la suma

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \delta_n). \tag{5.94}$$

Esto completa la solución para el movimiento a largo plazo de un oscilador forzado por una fuerza externa periódica $f(t)$. Para resumir, los pasos son:

1. Encontrar los coeficientes f_n de la serie de Fourier (5.90) para la fuerza externa dada $f(t)$.
2. Calcular las cantidades A_n y δ_n a partir de (5.92) y (5.93).
3. Escribir la solución $x(t)$ como una serie de Fourier (5.94).

En la práctica, normalmente uno necesita incluir sorprendentemente sólo unos pocos términos de la solución (5.94) para conseguir una aproximación satisfactoria, como ilustra el siguiente ejemplo.[20]

Ejemplo 5.5 *Un oscilador forzado por un impulso rectangular*

Consideremos un oscilador amortiguado débilmente que está siendo controlado por los impulsos rectangulares periódicos del Ejemplo 5.4 (Figura 5.22). Sea el período natural del oscilador $\tau_o = 1$, de tal manera que la frecuencia natural es $\omega_o = 2\pi$, y sea la constante de amortiguamiento $\beta = 0{,}2$. La duración del impulso es $\Delta\tau = 0{,}25$ y el mismo tiene una altura de $f_{\text{máx}} = 1$. Calcular los primeros seis coeficientes de Fourier A_n para el movimiento a largo plazo $x(t)$ del oscilador, suponiendo primero que el período forzado es el mismo que el período natural, $\tau = \tau_o = 1$. Representar

[20] La solución contenida en las Ecuaciones (5.92) a (5.94) se puede escribir de manera más compacta si no hay problema en usar notación compleja. Vea el Problema 5.51.

gráficamente el movimiento resultante para varias oscilaciones completas. Repetir estos ejercicios para $\tau = 1{,}5\tau_0, 2{,}0\tau_0$ y $2{,}5\tau_0$.

Antes de observar cualquiera de estos ejercicios, vale la pena pensar en el sistema real que este problema puede representar. Una posibilidad sencilla es una masa que cuelga del extremo de un muelle, a la que un profesor está aplicando pequeños golpes hacia arriba regularmente espaciados a intervalos τ. Un ejemplo todavía más familiar sería un niño en un columpio, al que el padre está dando empujones regularmente espaciados (aunque en este caso es necesario poner atención en mantener la amplitud pequeña para justificar el uso de la ley de Hooke). Dijimos de empezar tomando $\tau = \tau_0 = 1$; esto es, el padre está empujando al niño exactamente a la frecuencia natural.

Los coeficientes de Fourier f_n de la fuerza externa ya fueron calculados en las ecuaciones (5.86) y (5.87) del Ejemplo 5.4 (donde se llamaron a_n). Si los sustituimos en (5.92) para los coeficientes A_n y ponemos los números dados (incluyendo $\tau = \tau_0 = 1$), encontramos para los primeros seis coeficientes de Fourier $A_0, \ldots, A_5$:

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
63	1791	27	5	0	−1

(Como lo números son más bien pequeños, he indicado los valores multiplicados por 10^4; esto es, $A_0 = 63 \times 10^{-4}$, $A_1 = 1791 \times 10^{-4}$, y así sucesivamente). Hay dos cosas que destacar de estos números: primera, después de A_1, se hacen rápidamente más pequeños, y para casi todo propósito sería una excelente aproximación ignorar todos menos los primeros tres términos de la serie de Fourier para $x(t)$; y segunda, el coeficiente A_1 es muchísimo más grande que todos los demás. Esto es fácil de entender si se observa (5.92) para el coeficiente A_1: como $\omega = \omega_0$ (recuerde que el padre está empujando al niño a la frecuencia natural del columpio) y $n = 1$, el primer término en el denominador es exactamente cero, el denominador es anormalmente peque-

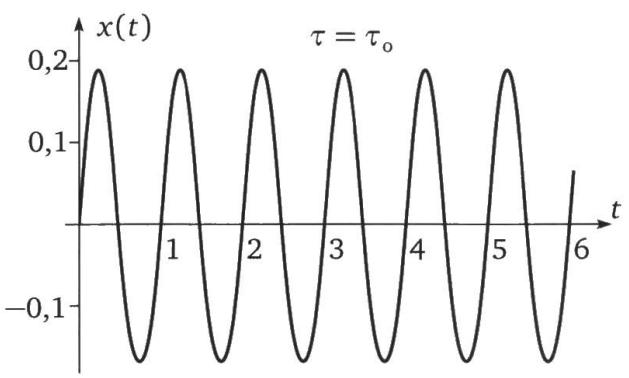


Figura 5.24. Movimiento de un oscilador lineal forzado por impulsos periódicos rectangulares, con período forzado τ igual al período natural τ_0 del oscilador (y por lo tanto $\omega = \omega_0$). El eje horizontal muestra el tiempo en unidades del período natural τ_0. Como cabría esperar, el movimiento es casi perfectamente sinusoidal, con período igual al período natural.

ño, y A_1 es anormalmente grande comparado con todos los demás coeficientes. En otras palabras, cuando la frecuencia forzada es la misma que la frecuencia natural, el término $n = 1$ en la serie de Fourier para $x(t)$ está en *resonancia*, y el oscilador responde especialmente con fuerza con frecuencia ω_0.

Antes de poder representar $x(t)$ como viene dado por (5.94), debemos calcular los cambios de fase δ_n usando (5.93). Esto es muy fácil de hacer, pero no desperdiciaré espacio mostrando los resultados. En realidad no podemos representar la serie infinita (5.94); en vez de ello, debemos escoger algún número finito de términos con los cuales aproximarnos a $x(t)$. En el caso que nos ocupa, parece claro que tres términos serían suficientes, pero para estar seguro usaré seis. La Figura 5.24 muestra $x(t)$ aproximado por la suma de los seis primeros términos de (5.94). En la escala mostrada, esta gráfica aproximada es totalmente indistinguible del resultado exacto, el cual a su vez es indistinguible de un coseno puro,[21] con frecuencia igual a la frecuencia natural del oscilador. La fuerte respuesta a la frecuencia natural es justo lo que debíamos esperar. Por ejemplo, cualquiera que haya columpiado a un niño sabe que la manera más efectiva de conseguir que el columpio se eleve mucho es empujar de manera regular en intervalos de período natural, esto es, $\tau = \tau_0$; y por lo tanto el columpio oscilará vigorosamente a su frecuencia natural.

Una fuerza externa con otro período τ puede plantearse de la misma manera. Los coeficientes de Fourier $A_0, \ldots, A_5$ para todos los valores de τ requeridos más arriba se muestran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1. Los seis primeros coeficientes de Fourier A_n para el movimiento $x(t)$ de un oscilador lineal forzado por impulsos periódicos rectangulares, para cuatro períodos forzados diferentes $\tau = \tau_0$, $1{,}5\tau_0$, $2{,}0\tau_0$ y $2{,}5\tau_0$. Todos los valores se han multiplicado por 10^4.

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\tau = 1{,}0\,\tau_0$	63	1791	27	5	0	−1
$\tau = 1{,}5\,\tau_0$	42	145	89	18	6	2
$\tau = 2{,}0\,\tau_0$	32	82	896	40	13	6
$\tau = 2{,}5\,\tau_0$	25	59	130	97	25	11

Los datos de las cuatro filas de esta tabla merecen un estudio cuidadoso. La primera fila ($\tau = \tau_0$) muestra los coeficientes de los que ya hemos hablado, cuya característica más importante es que el coeficiente $n = 1$ es el más grande porque está exactamente en resonancia. En la siguiente fila ($\tau = 1{,}5\tau_0$), la componente de Fourier $n = 1$ se ha apartado de la resonancia, y A_1 ha caído alrededor de un factor 12. Algunos otros coeficientes han aumentado ligeramente, pero el efecto neto es que el oscilador se mueve mucho menos que cuando $\tau = \tau_0$. Esto se ve claramente

[21] Realmente es un *seno* puro, pero esto en realidad es $\cos(\omega t - \delta_1)$ con $\delta_1 = \pi/2$ como debíamos esperar porque estamos exactamente en resonancia.

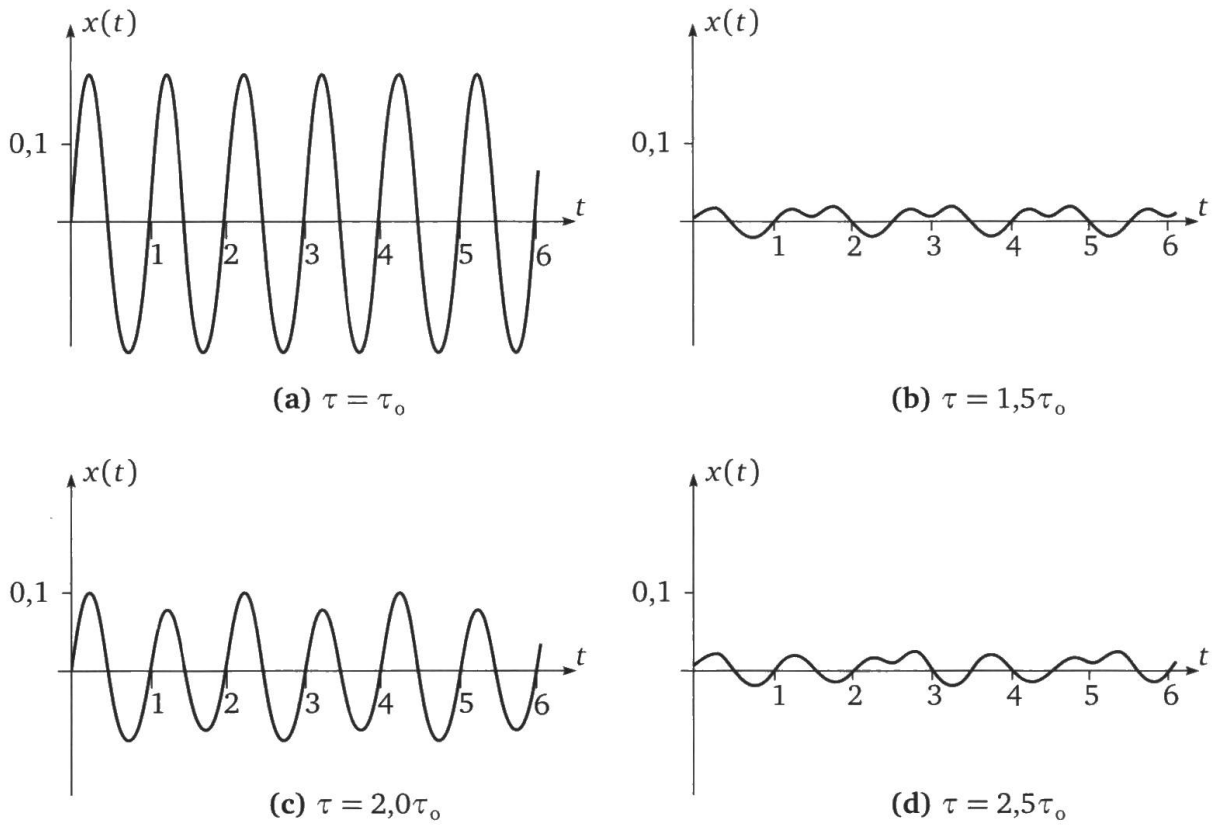


Figura 5.25. El movimiento de un oscilador lineal, forzado por impulsos periódicos rectangulares, muestra cuatro valores diferentes del período forzado τ. **(a)** cuando el oscilador está forzado a su frecuencia natural ($\tau = \tau_0$), el término $n = 1$ de la serie de Fourier está en resonancia y el oscilador responde enérgicamente. **(b)** Cuando $\tau = 1{,}5\tau_0$, la respuesta es débil. **(c)** Cuando $\tau = 2{,}0\tau_0$, el término $n = 2$ está en resonancia y la respuesta es fuerte otra vez. **(d)** Cuando $\tau = 2{,}5\tau_0$, la respuesta es otra vez débil.

en las Figuras 5.25(a) y (b), que muestran $x(t)$ (aproximado por los seis primeros términos se sus series de Fourier) para estos dos valores del período forzado.

La tercera fila de la Tabla 5.1 muestra los coeficientes de Fourier para un período forzado igual a dos veces el período natural, el padre empuja el columpio una vez cada dos oscilaciones. Ahora bien, con $\tau = 2{,}0\tau_0$, la frecuencia forzada es la mitad de la frecuencia natural ($\omega = \frac{1}{2}\omega_0$). Esto significa que la componente de Fourier $n = 2$ de frecuencia $2\omega = \omega_0$, está exactamente en resonancia, y el coeficiente A_2 es anormalmente grande. De nuevo obtenemos una respuesta grande, como se ve en la Figura 5.25(c).

Observemos más detenidamente el caso de la Figura 5.25(c). Por experiencia sabemos que una manera perfectamente satisfactoria de columpiar a un niño es empujar una vez cada *dos* pasadas, aunque esto no produce el mismo resultado que empujar en *todas* las pasadas. Si se observa cuidadosamente la Figura 5.25(c), se verá que las pasadas alternan en tamaño; las pasadas pares son ligeramente más grandes que las impares. Esto también era de esperar: como el oscilador está amor-

tiguado, la segunda pasada después de cada empujón tiene que ser un poco más pequeña que la primera.

Finalmente, cuando $\tau = 2{,}5\tau_0$, la componente de Fourier $n = 2$ se aleja de la resonancia y A_2 es mucho menor otra vez. Por otro lado, la componente $n = 3$ se aproxima a la resonancia por lo que A_3 se está haciendo más grande. De hecho, A_2 y A_3 son más o menos del mismo tamaño, así que $x(t)$ contiene dos componentes de Fourier dominantes y muestra comportamiento algo raro que aparece en la Figura 5.25(d). (Consideraciones similares se aplican al caso $\tau = 1{,}5\tau_0$, donde los coeficientes A_1 y A_2 son ambos bastante grandes).

5.9 El desplazamiento RMS; teorema de Parseval*

* *La relación de Parseval, que introducimos y aplicamos en esta sección, es una de las propiedades más útiles de las series de Fourier. Sin embargo, se puede omitir si se va mal de tiempo.*

En la sección anterior estudiamos cómo la respuesta de un oscilador variaba con la frecuencia de la fuerza externa periódica aplicada. Lo hicimos calculando el movimiento $x(t)$, usando el método de las series de Fourier, para cada una de las distintas frecuencias aplicadas de interés. Sería conveniente que pudiéramos encontrar un único número para medir la respuesta del oscilador y entonces representar únicamente este número frente a la frecuencia forzada (o el período forzado). De hecho, existen varias maneras de hacerlo. Quizás lo más obvio que se puede probar sería el desplazamiento medio del oscilador desde el equilibrio, $\langle x \rangle$. (Estoy usando paréntesis angulares $\langle\,\rangle$ para indicar una media temporal). Desafortunadamente, como el oscilador pasa tanto tiempo en cualquier región de las x positivas como en la región correspondiente de las x negativas, la media $\langle x \rangle$ es cero.[22] Para superar esta dificultad la magnitud más conveniente a usar es el desplazamiento *cuadrático medio* $\langle x^2 \rangle$, y para dar una cantidad con dimensiones de longitud normalmente hablamos de desplazamiento **cuadrático medio** o **RMS** (del inglés: *root mean square*)

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\langle x^2 \rangle}. \tag{5.95}$$

La definición de una media temporal necesita un poco de atención. La práctica común es definir $\langle\,\rangle$ como la media *sobre un período* τ. Por consiguiente,

[22] No del todo cierto. El término constante pequeño A_0 en (5.94) contribuye a un promedio distinto de cero $\langle x \rangle = A_0$, pero esto no refleja ninguna *oscilación*, que es lo que estamos intentando caracterizar.

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x^2 \, dt. \tag{5.96}$$

Como el movimiento es periódico, esto es lo mismo que la media sobre cualquier número entero de períodos, y por ello la media sobre cualquier intervalo grande. (Si esto no le queda claro, vea el Problema 5.54).

Para evaluar la media $\langle x^2 \rangle$, usamos el desarrollo de Fourier (5.94) de $x(t)$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \delta_n). \tag{5.97}$$

(En general, esta serie contendrá tanto senos como cosenos, pero en el Ejemplo 5.5 la fuerza externa sólo contenía cosenos, así que para simplificar seguiremos suponiendo que éste es el caso. Para el caso general, vea el Problema 5.56). Sustituyendo x para cada uno de los factores de (5.96), obtenemos la apabullante doble suma

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sum_n \sum_m A_n \cos(n\omega t - \delta_n) A_m \cos(m\omega t - \delta_m) \, dt. \tag{5.98}$$

Afortunadamente, esto se simplifica de manera significativa. Resulta bastante sencillo demostrar (Problema 5.55) que la integral es

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(n\omega t - \delta_n) \cos(m\omega t - \delta_m) \, dt = \begin{cases} \tau & \text{si } m = n = 0 \\ \tau/2 & \text{si } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases} \tag{5.99}$$

Por lo tanto, en la doble suma (5.98), sólo aquellos términos con $m = n$ deben retenerse, y así obtenemos el increíblemente sencillo resultado

$$\langle x^2 \rangle = A_0^2 + \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2. \tag{5.100}$$

Esta relación se denomina **teorema de Parseval.**[23] Tiene muchos e importantes usos teóricos, pero para nuestros propósitos su principal aplicación es la siguiente: como sabemos calcular los coeficientes A_n, el teorema de Parseval nos permite encontrar la respuesta $\langle x^2 \rangle$ de nuestro oscilador. Más aún, si dejamos casi todos los términos de número finito de la suma (5.100), salvo unos pocos, obtenemos una aproximación excelente y fácilmente calculada de $\langle x^2 \rangle$, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

---

[23] Recordemos que asumimos que nuestras series de Fourier contenían sólo términos en coseno. Por lo general, la suma de (5.100) debe incluir contribuciones B_n^2 de los términos en seno también. Vea el Problema 5.56.

Ejemplo 5.6 *El desplazamiento RMS para un oscilador forzado*

Consideremos de nuevo el oscilador del Ejemplo 5.5, forzado por los impulsos periódicos rectangulares del Ejemplo 5.4 (Figura 5.22). Encontrar el desplazamiento RMS $x_{\text{rms}} = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ que viene dado por (5.100) para este oscilador. Usando los mismos valores numéricos que anteriormente ($\tau_0 = 1$, $\beta = 0{,}2$, $f_{\text{máx}} = 1$, $\Delta\tau = 0{,}25$) y aproximando (5.100) con sus primeros seis términos, representar x_{rms} como una función del período forzado τ para $0{,}25 < \tau < 5{,}5$.

Ya hemos realizado todos los cálculos necesarios para escribir una fórmula de $x_{\text{rms}} = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$. En primer lugar, $\langle x^2 \rangle$ viene dado por (5.100), donde los coeficientes de Fourier A_n vienen dados por (5.92) como

$$A_n = \frac{f_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\beta^2 n^2 \omega^2}} \tag{5.101}$$

y los coeficientes de Fourier f_n de la fuerza externa vienen dados por (5.87) y (5.86) como

$$f_n = \frac{2f_{\text{máx}}}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n \Delta\tau}{\tau}\right), \qquad [\text{para } n \geq 1] \tag{5.102}$$

mientras que $f_0 = f_{\text{máx}}\,\Delta\tau/\tau$. Si juntamos todo esto obtenemos la anhelada fórmula de x_{rms} (el que quiera comprobarlo la puede escribir).

Si ahora introducimos los números dados, nos quedamos únicamente con una variable independiente, el período de la fuerza externa τ. (Recordemos que $\omega = 2\pi/\tau$). Truncando la serie infinita (5.100) después de seis términos, llegamos a una expresión que se calcula fácilmente con algún programa de ordenador adecuado (e incluso con una calculadora programable) y a una representación como la que se muestra en la Figura 5.26. Esta gráfica muestra de manera clara y sucinta lo que ya encontramos

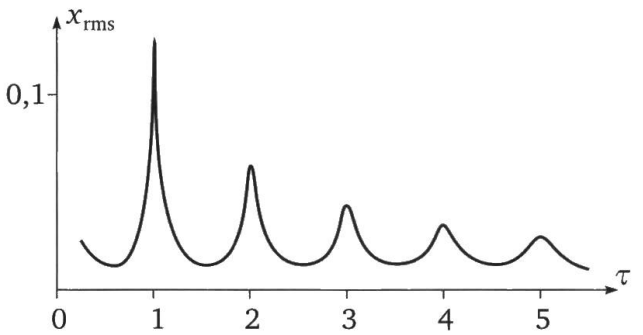


Figura 5.26. El desplazamiento RMS de un oscilador lineal, forzado por impulsos periódicos rectangulares, como una función del período forzado τ (calculado usando los primero seis términos de la expresión de Parseval (5.100)). El eje horizontal muestra τ en unidades del período natural τ_0. Cuando τ es una integral múltiple de τ_0 la respuesta es especialmente fuerte.

en el ejemplo anterior. A medida que aumentamos el período forzado τ, la respuesta del oscilador varía de manera significativa. Cada vez que τ pasa por un múltiplo entero del período natural τ_0 (esto es, $\tau = n\tau_0$), la respuesta muestra un máximo muy pronunciado porque la componente n de Fourier está en resonancia. Por otra parte, cada pico sucesivo es más bajo que su predecesor, ya que elegimos fijar el ancho en $\Delta\tau$ y la altura de los impulsos en $f_{\text{máx}}$; por lo tanto a medida que el período forzado se hace más largo, se espera que el efecto neto de la fuerza disminuya.

Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 5

Ley de Hooke

$$F = -kx \Longleftrightarrow U = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \text{[Sección (5.1)]}$$

Movimiento armónico simple

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \Longleftrightarrow x(t) = A\cos(\omega t - \delta), \text{ etc.} \qquad \text{[Sección (5.2)]}$$

Oscilaciones amortiguadas

Si el oscilador está sujeto a una fuerza amortiguadora $-bv$, entonces

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Longleftrightarrow x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t - \delta) \qquad \text{[Ecs. (5.28) y (5.38)]}$$

donde $\beta = 2b/m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, y la solución dada aquí es para «amortiguamiento débil» ($\beta < \omega_0$).

Oscilaciones amortiguadas forzadas y resonancia

Si el oscilador además está sujeto a una fuerza externa sinusoidal $F(t) = mf_0\cos(\omega t)$, el movimiento a largo plazo tiene la forma

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta) \qquad \text{[Ec. (5.66)]}$$

donde

$$A^2 = \frac{f_0^{\,2}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \qquad \text{[Ec. (5.64)]}$$

y el cambio de fase δ viene dado por (5.65). A esta solución se le puede añadir una solución «transitoria» de la ecuación homogénea correspondiente, pero ésta se extingue al cabo del tiempo. La solución a largo plazo «resuena» (tiene un máximo muy agudo) cuando ω se aproxima a ω_0.

Series de Fourier

Si la fuerza externa no es sinusoidal, pero sí periódica, puede construirse como una serie de Fourier de términos sinusoidales, como en (5.90), y el movimiento resultante es la serie correspondiente

de soluciones sinusoidales, como en (5.94):

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \delta_n). \qquad \text{[Ec. (5.94)]}$$

El desplazamiento RMS

El desplazamiento cuadrático medio

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x^2 dt} \qquad \text{[Ecs. (5.95) y (5.96)]}$$

es una buena medida de la respuesta media del oscilador y viene dado por el teorema de Parseval como

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{A_0^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2}. \qquad \text{[Ec. (5.100)]}$$

Problemas para el Capítulo 5

Los asteriscos indican el nivel aproximado de dificultad, desde los más fáciles (⋆) hasta los más difíciles (⋆ ⋆ ⋆).

Sección 5.1 Ley de Hooke

5.1 ⋆ Un muelle sin masa tiene una longitud de l_0 sin estirar y una constante recuperadora k. Uno de sus extremos está sujeto al techo y del otro cuelga una masa m. La longitud de equilibrio del muelle ahora es l_1. **(a)** Escribir la condición que determina l_1. Suponer ahora que el muelle se estira una distancia x adicional más allá de su nueva longitud de equilibrio. Mostrar que la fuerza neta (muelle más gravedad) sobre la masa es $F = -kx$. Esto es, la fuerza neta obedece la ley de Hooke, cuando x es la distancia desde la posición de equilibrio; un resultado muy útil, que nos permite tratar una masa situada en un muelle vertical igual que si fuera horizontal. **(b)** Probar el mismo resultado mostrando que la energía potencial neta (muelle más gravedad) tiene la forma $U(x) = \text{const} + \frac{1}{2}kx^2$.

5.2 ⋆ La energía potencial de dos átomos en una molécula puede a veces aproximarse mediante la función de Morse,

$$U(r) = A\left[\left(e^{(R-r)/S} - 1\right)^2 - 1\right]$$

donde r es la distancia entre los dos átomos y A, R y S son constantes positivas con $S \ll R$. Esbozar esta función para $0 < r < \infty$. Encontrar la separación de equilibrio r_0, a la cual $U(r)$ es mínimo. Ahora escribir $r = r_0 + x$ de tal manera que x es el desplazamiento desde el equilibrio, y mostrar que, para pequeños desplazamientos, U tiene la forma aproximada $U = \text{const} + \frac{1}{2}kx^2$. Es decir, aplica la ley de Hooke. ¿Cuál es la constante de recuperación k?

5.3 ⋆ Escribir la energía potencial $U(\phi)$ de un péndulo simple (masa m, longitud l) en términos del ángulo ϕ entre el péndulo y la vertical. (Elegir el cero de U en el fondo). Mostrar que, para ángulos pequeños, U tiene la forma de la ley de Hooke $U(\phi) = \frac{1}{2}k\phi^2$, en términos de la coordenada ϕ. ¿Qué es k?

5.4 ⋆ ⋆ Un péndulo poco habitual se construye fijando una cuerda a un cilindro horizontal de radio R, enrollando la cuerda varias veces alrededor del cilindro, y después atando una masa m al

extremo suelto. En equilibrio la masa cuelga a una distancia l_0 verticalmente por abajo del borde del cilindro. Hallar la energía potencial si el péndulo ha oscilado a un ángulo ϕ de la vertical. Mostrar que para pequeños ángulos, se puede escribir en la forma de la ley de Hooke $U = \frac{1}{2}k\phi^2$. Hacer comentarios sobre el valor de k.

Sección 5.2 Movimiento armónico simple

5.5 ⋆ En la Sección 5.2 discutimos cuatro maneras equivalentes de representar el movimiento armónico simple en una dimensión:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} && \text{(I)} \\ &= B_1 \cos(\omega t) + B_2 \operatorname{sen}(\omega t) && \text{(II)} \\ &= A\cos(\omega t - \delta) && \text{(III)} \\ &= \operatorname{Re} C e^{i\omega t} && \text{(IV)} \end{aligned}$$

Para confirmar que hemos entendido todas ellas, conviene mostrar que son equivalentes probando las siguientes implicaciones: I ⇒ II ⇒III ⇒ IV ⇒ I. Para cada forma, dar una expresión para las constantes (C_1, C_2, etc.) en términos de las constantes de la forma anterior.

5.6 ⋆ Una masa enganchada en el extremo de un muelle está oscilando con frecuencia angular ω. En $t = 0$, su posición es $x_0 > 0$ y le doy un empujón de tal manera que se mueve para atrás hacia el origen y ejecuta un movimiento armónico simple con amplitud $2x_0$. Hallar su posición en función del tiempo en la forma (III) del Problema 5.5.

5.7 ⋆ **(a)** Resolver para los coeficientes B_1 y B_2 de la forma (II) del Problema 5.5 en términos de la posición inicial x_0 y la velocidad v_0 en $t = 0$. **(b)** Si la masa del oscilador es $m = 0{,}5$ kg y la constante recuperadora es $k = 50$ N/m, ¿cuál es la frecuencia angular ω? Si $x_0 = 3{,}0$ m y $v_0 = 50$ m/s, ¿cuáles son B_1 y B_2? Esbozar $x(t)$ para un par de ciclos. **(c)** ¿Cuáles son los primeros instantes de tiempo en los que $x = 0$ y en los cuales $\dot{x} = 0$?

5.8 ⋆ **(a)** Si una masa $m = 0{,}2$ kg se ata a un extremo de un muelle cuya constante recuperadora es $k = 80$ N/m y cuyo otro extremo está sujeto fijo, ¿cuáles son la frecuencia angular ω, la frecuencia f, y el período τ de sus oscilaciones? **(b)** Si la posición y la velocidad iniciales son $x_0 = 0$ y $v_0 = 40$ m/s, ¿cuáles son las constantes A y δ en la expresión $x(t) = A\cos(\omega t - \delta)$?

5.9 ⋆ El desplazamiento máximo de una masa que oscila alrededor de su posición de equilibrio es 0,2 m, y su velocidad máxima es 1,2 m/s. ¿Cuál es el período τ de sus oscilaciones?

5.10 ⋆ La fuerza sobre una masa m en la posición x sobre el eje x es $F = -F_0 \operatorname{senh} \alpha x$, donde F_0 y α son constantes. Hallar la energía potencial $U(x)$, y dar una aproximación para $U(x)$ válida para pequeñas oscilaciones. ¿Cuál es la frecuencia angular de tales oscilaciones?

5.11 ⋆ Se nos dice que, a las posiciones conocidas x_1 y x_2, un masa oscilante m tiene velocidades v_1 y v_2. ¿Cuáles son la amplitud y la frecuencia angular de las oscilaciones?

5.12 ⋆⋆ Consideremos un oscilador armónico simple con período τ. Sea $\langle f \rangle$ el valor medio de una variable cualquiera $f(t)$, promediado en un ciclo completo:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\, dt. \tag{5.103}$$

Probar que $\langle T \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{2}E$ donde E es la energía total del oscilador. [*Ayuda*: Comenzar probando los resultados más generales, y enormemente útiles, de que $\langle \operatorname{sen}^2(\omega t - \delta) \rangle = \langle \cos^2(\omega t - \delta) \rangle = \frac{1}{2}$. Explicar por qué estos dos resultados son casi obvios, y después probarlos usando identidades trigonométricas para reescribir $\operatorname{sen}^2 \theta$ y $\cos^2 \theta$ en términos de $\cos(2\theta)$].

5.13 ⋆⋆ La energía potencial de una masa unidimensional m a una distancia r desde el origen es

$$U(r) = U_0 \left(\frac{r}{R} + \lambda^2 \frac{R}{r} \right)$$

para $0 < r < \infty$, con U_0, R y λ todas constantes positivas. Encontrar la posición de equilibrio r_0. Si x es la distancia desde el equilibrio, mostrar que, para pequeñas x, la EP tiene la forma $U = \text{const} + \frac{1}{2}kx^2$. ¿Cuál es la frecuencia angular de las oscilaciones pequeñas?

Sección 5.3 Osciladores bidimensionales

5.14 ⋆ Consideremos una partícula en dos dimensiones, sometida a una fuerza restauradora de la forma (5.21). (Las dos constantes k_x y k_y pueden no ser iguales; si lo son, el oscilador es isótropo). Probar que su energía potencial es

$$U = \tfrac{1}{2}(k_x x^2 + k_y y^2). \tag{5.104}$$

5.15 ⋆ La solución general para un oscilador bidimensional isótropo está dada por (5.19). Mostrar que cambiando el origen de tiempos se puede convertir en la forma más simple (5.20) con $\delta = \delta_y - \delta_x$. [*Ayuda*: Un cambio de origen de tiempos es un cambio de variables de t a $t' = t + t_0$. Hacer este cambio y escoger la constante t_0 apropiadamente, después renombrar t' para que se t].

5.16 ⋆ Considerar un oscilador isótropo en dos dimensiones que se mueve de acuerdo con la Ecuación (5.20). Mostrar que si la fase relativa es $\delta = \pi/2$, la partícula se mueve en una elipse con ejes semimayor y semimenor A_x y A_y respectivamente.

5.17 ⋆⋆ Considerar el oscilador anisótropo en dos dimensiones con el movimiento dado por la Ecuación (5.23). **(a)** Probar que si el cociente entre las frecuencias es racional (esto es, $\omega_x/\omega_y = p/q$ donde p y q son enteros) entonces el movimiento es periódico. ¿Cuál es el período? **(b)** Probar que si el mismo cociente es irracional, el movimiento nunca se repite en ningún instante.

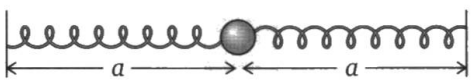


Figura 5.27. Problema 5.18.

5.18 ⋆⋆⋆ La masa mostrada desde arriba en la Figura 5.27 está en reposo sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Cada uno de los dos muelles idénticos tiene constante recuperadora k y longitud sin estirar l_0. En el equilibrio la masa está en reposo en el origen, y las distancias a no son necesariamente iguales a l_0. (Esto es, los muelles pueden ya estar estirados o comprimidos). Mostrar que cuando la masa se mueve a una posición (x, y), con x e y pequeños, la energía potencial tiene la forma (5.104) (Problema 5.14) para un oscilador anisótropo. Mostrar que si $a < l_0$ el equilibrio en el origen es inestable y explicar por qué.

5.19 ⋆⋆⋆ Considerar la masa enganchada a cuatro muelles idénticos, como se muestra en la Figura 5.7(b). Cada muelle tiene constante recuperadora k y longitud sin estirar l_0, y la longitud de cada muelle cuando la masa está en equilibrio en el origen es a (no necesariamente la misma que l_0). Cuando la masa es desplazada una distancia pequeña al punto (x, y), mostrar que su energía potencial tiene la forma $\frac{1}{2}k'r^2$ apropiada para un oscilador armónico isótropo. ¿Cuál es la constante k' en términos de k? Dar la expresión para la correspondiente fuerza.

Sección 5.4 Oscilaciones amortiguadas

5.20 ⋆ Verificar que el parámetro de extinción $\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ para un oscilador sobreamortiguado ($\beta > \omega_0$) *disminuye* con β aumentando. Esbozar su comportamiento para $\omega_0 < \beta < \infty$.

5.21 ⋆ Verificar que la función (5.43), $x(t) = te^{-\beta t}$, es realmente una segunda solución de la ecuación de movimiento (5.28) para el oscilador críticamente amortiguado ($\beta = \omega_0$).

5.22 ⋆ **(a)** Considerar un móvil sobre un muelle que está críticamente amortiguado. En el instante $t = 0$, está situado en su posición de equilibrio y es empujado en la dirección positiva con velocidad v_0. Encontrar su posición $x(t)$ para todos los instantes subsiguientes y esbozar la respuesta.

(b) Hacer lo mismo para el caso en que se deja libre desde el reposo en la posición $x = x_0$. En este último caso, ¿cómo de lejos está el móvil del equilibrio después de un tiempo igual a $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$, el período en la ausencia de ningún amortiguamiento?

5.23 ⋆ Un oscilador amortiguado satisface la ecuación (5.24), donde $F_{\text{amort}} = -b\dot{x}$ es la fuerza de amortiguamiento. Encontrar la tasa de variación de la energía $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ (mediante la diferenciación directa), y, con la ayuda de (5.24) mostrar que dE/dt es precisamente el ritmo al que se disipa la energía por F_{amort}.

5.24 ⋆ En nuestra discusión del amortiguamiento crítico ($\beta = \omega_0$), la segunda solución (5.43) se obtuvo sin demasiados fundamentos. Se puede llegar a ella de una manera sistemática razonable observando las soluciones para $\beta < \omega_0$ y dejando con cuidado que $\beta \to \omega_0$, como sigue: para $\beta < \omega_0$, podemos escribir las dos soluciones como $x_1(t) = e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t)$ y $x_2(t) = e^{-\beta t}\,\text{sen}(\omega_1 t)$. Mostrar que cuando $\beta \to \omega_0$, el primero de ellos tiende a la primera solución para amortiguamiento crítico, $x_1(t) = e^{-\beta t}$. Desafortunadamente, cuando $\beta \to \omega_0$, la segunda de ellas tiende a cero. (Comprobarlo). Sin embargo, siempre que $\beta \neq \omega_0$, se puede dividir $x_2(t)$ por ω_1 y se tendrá todavía una segunda solución perfectamente buena. Mostrar que cuando $\beta \to \omega_0$, esta nueva segunda solución tiende al anunciado $te^{-\beta t}$.

5.25 ⋆⋆ Considerar un oscilador amortiguado con $\beta < \omega_0$. Hay una pequeña dificultad para definir el «período» τ_1 ya que el movimiento (5.38) no es periódico. Sin embargo, una definición que sí tiene sentido es que τ_1 es el tiempo entre máximos consecutivos de $x(t)$. **(a)** Representar $x(t)$ frente a t y señalar esta definición de τ en la gráfica. Demostrar que $\tau_1 = 2\pi/\omega_1$. **(b)** Demostrar que una definición equivalente es que τ_1 es dos veces el tiempo entre ceros consecutivos de $x(t)$. Mostrar esto en el dibujo. **(c)** Si $\beta = \omega_0/2$, ¿en qué factor disminuye la amplitud en un período?

5.26 ⋆⋆ Un oscilador sin amortiguar tiene un período de $\tau_0 = 1000$ s, pero ahora añadimos un poco de amortiguación de manera que el período cambia a $\tau_1 = 1001$ s. ¿Cuál es el factor de amortiguamiento β? Después de 10 ciclos, ¿cuánto disminuirá la amplitud de oscilación? ¿Qué efecto de amortiguamiento sería más detectable, el cambio de período o la disminución de la amplitud?

5.27 ⋆⋆ A medida que se aumenta el amortiguamiento sobre un oscilador, llega un momento en que la denominación «oscilador» ya no es apropiada. **(a)** Para ilustrarlo, demostrar que un oscilador críticamente amortiguado nunca puede pasar por el origen $x = 0$ más de una vez. **(b)** Demostrar lo mismo para un oscilador sobreamortiguado.

5.28 ⋆⋆ Un muelle sin masa cuelga del techo verticalmente y sin carga. Se le sujeta una masa en el extremo inferior y se suelta. Después de un segundo, ¿cómo de cerca está la masa de su posición de reposo, teniendo en cuenta que alcanza el reposo a 0,5 metros por debajo del punto de liberación y que el movimiento está críticamente amortiguado?

5.29 ⋆⋆ Un oscilador sin amortiguamiento tiene un período de $\tau_0 = 1$ segundos. Si añadimos amortiguamiento débil, encontramos que la amplitud de oscilación cae un 50 % en un período τ_1. (El período de las oscilaciones amortiguadas se define como el tiempo entre máximos consecutivos, $\tau_1 = 2\pi/\omega_1$. Ver el Problema 5.25). ¿Cómo de grande es β comparada con ω_0? ¿Qué es τ_1?

5.30 ⋆⋆ La posición $x(t)$ de un oscilador sobreamortiguado viene dada por (5.40). **(a)** Encontrar las constantes C_1 y C_2 en términos de la posición x_0 y la velocidad v_0 iniciales. **(b)** Representar el comportamiento de $x(t)$ para los dos casos en que $v_0 = 0$ y que $x_0 = 0$. **(c)** Para demostrar de nuevo cómo las matemáticas son a veces más listas que nosotros (comprobar la respuesta), demostrar que si dejamos que $\beta \to 0$, nuestra solución para $x(t)$ en la parte (a) se aproxima a la solución correcta para el movimiento sin amortiguamiento.

5.31 ⋆⋆ [Ordenador] Consideremos un móvil sobre un muelle con frecuencia natural $\omega_0 = 2\pi$, y que es liberado desde el reposo en $x_0 = 1$ y $t = 0$. Usando algún programa de ordenador apropiado para hacer gráficas, trazar la posición $x(t)$ para $0 < t < 2$ y para las constantes de amortiguamiento $\beta = 0$, 1, 2, 4, 6, 2π, 10 y 20. [Recuerde que $x(t)$ viene dado por diferentes fórmulas para $\beta < \omega_0$, $\beta = \omega_0$ y $\beta > \omega_0$].

5.32 ⋆⋆ [Ordenador] Consideremos un oscilador sin amortiguar (como una masa sujeta al extremo de un muelle) que se deja evolucionar desde el reposo en la posición x_0 en un instante $t = 0$. **(a)** Encontrar la posición $x(t)$ en tiempos posteriores en la forma

$$x(t) = e^{-\beta t}[B_1 \cos(\omega_1 t) + B_2 \operatorname{sen}(\omega_1 t)].$$

Esto es, encontrar B_1 y B_2 en términos de x_0. **(b)** Ahora demostrar que si dejamos que β se aproxime al valor crítico ω_0, nuestra solución automáticamente nos da la solución crítica. **(c)** Usando algún programa para hacer gráficas, trazar la solución para $0 \leq t \leq 20$, con $x_0 = 1$, $\omega_0 = 1$ y $\beta = 0, 0{,}02, 0{,}1, 0{,}3$ y 1.

Sección 5.5 Oscilaciones amortiguadas forzadas

5.33 ⋆ La solución para $x(t)$ para un oscilador amortiguado forzado aparece muy convenientemente en la expresión (5.69). Resolver la ecuación y la expresión correspondiente para $\dot{x}$, para dar los coeficientes B_1 y B_2 en términos de A, δ, y la posición inicial y la velocidad x_0 e v_0. Comprobar las expresiones dadas en (5.70).

5.34 ⋆ Supongamos que hemos encontrado una solución concreta $x_p(t)$ para la ecuación homogénea (5.48) de un oscilador forzado amortiguado, de manera que $Dx_p = f$ en la notación del operador de (5.49). Supongamos también que $x(t)$ es cualquier otra solución, de tal manera que $Dx = f$. Probar que la diferencia $x - x_p$ debe satisfacer la ecuación homogénea correspondiente, $D(x - x_p) = 0$. Esta es una prueba alternativa de que *cualquier* solución x de la ecuación no homogénea puede ser escrita como la suma de la solución particular más una solución homogénea; esto es, $x = x_p + x_h$.

5.35 ⋆⋆ Este problema es para refrescar la memoria sobre algunas propiedades de los números complejos que se necesitan en varios puntos de este capítulo, pero especialmente en deducir la fórmula de la resonancia (5.64). **(a)** Probar que cualquier número complejo $z = x + iy$ (con x e y reales) se puede escribir como $z = re^{i\theta}$ donde r y θ son las coordenadas polares de z en el plano complejo. (Recuerde la fórmula de Euler). **(b)** Probar que el valor absoluto de z, definido como $|z| = r$, también viene dado por $|z|^2 = zz^*$, donde z^* denota el *complejo conjugado* de z, definido como $z^* = x - iy$. **(c)** Probar que $z^* = re^{-i\theta}$. **(d)** Probar que $(zw)^* = z^*w^*$ y que $(1/z)^* = 1/z^*$. **(e)** Deducir que si $z = a/(b + ic)$, con a, b y c reales, entonces $|z|^2 = a^2/(b^2 + c^2)$.

5.36 ⋆⋆ [Ordenador] Repetir los cálculos del Ejemplo 5.3 (página 205) con todos los mismos parámetros, pero con las condiciones iniciales $x_0 = 2$ y $v_0 = 0$. Representar gráficamente $x(t)$ para $0 \leq t \leq 5$ y comparar con la gráfica del Ejemplo 5.3. Explicar las similitudes y las diferencias.

5.37 ⋆⋆ [Ordenador] Repetir los cálculos del Ejemplo 5.3 (página 205) pero con los siguientes parámetros

$$\omega = 2\pi, \qquad \omega_0 = 0{,}25\omega, \qquad \beta = 0{,}2\omega_0, \qquad f_0 = 1000$$

y con las condiciones iniciales $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$. Representar $x(t)$ para $0 \leq t \leq 12$ y comparar con la gráfica del Ejemplo 5.3. Explicar las similitudes y las diferencias. [Ayudará a la explicación si se representan gráficamente la solución homogénea y la solución completa (homogénea más particular)].

5.38 ⋆⋆ [Ordenador] Repetir los cálculos del Ejemplo 5.3 (página 205) pero tomar los parámetros del sistema que sean $\omega = \omega_0 = 1$, $\beta = 0{,}1$ y $f_0 = 0{,}4$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0$ y $v_0 = 6$ (todas en algunas unidades apropiadas). Encontrar A y δ, y después B_1 y B_2, y hacer una gráfica de $x(t)$ para las primeros diez períodos o así.

5.39 ⋆⋆ [Ordenador] Para practicar un poco en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, repetir los cálculos del Ejemplo 5.3 (página 205), pero en lugar de encontrar todos los distintos coeficientes solamente usar algún programa apropiado (por ejemplo, el comando NDSolve de Mathematica) para resolver la ecuación diferencial (5.48) con las condiciones iniciales $x_0 = v_0 = 0$. Comprobar que la gráfica está en consonancia con la Figura 5.15.

Sección 5.6 Resonancia

5.40 ⋆ Considerar un oscilador amortiguado, con frecuencia natural fija ω_0 y constante de amortiguamiento fija β (no demasiado grande), que está forzado por una fuerza sinusoidal con frecuencia variable ω. Mostrar que la amplitud de la respuesta, como la dada por (5.71) es máxima cuando $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. (Observar que siempre que la resonancia sea estrecha esto implica que $\omega \approx \omega_0$).

5.41 ⋆ Sabemos que si la frecuencia forzada ω varía, la máxima respuesta (A^2) de un oscilador amortiguado forzado ocurre en $\omega \approx \omega_0$ (si la frecuencia natural es ω_0 y la constante de amortiguamiento $\beta \ll \omega_0$). Mostrar que A^2 es igual a la mitad de su valor máximo cuando $\omega \approx \omega_0 \pm \beta$, de tal manera que la anchura completa a medio máximo es justo 2β. [*Ayuda*: Tener cuidado con las aproximaciones. Por ejemplo, está bien decir $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$, pero ciertamente no se puede decir $\omega - \omega_0 \approx 0$].

5.42 ⋆ Un péndulo grande de Foucault tal como los que cuelgan en muchos museos de ciencias puede oscilar muchas horas antes de que se detenga. Tomando el tiempo de extinción que sea 8 horas y la longitud 30 metros, hallar el factor de calidad Q.

5.43 ⋆⋆ Cuando un coche va por un camino de tierra con ondulaciones regulares (como una «tabla de lavar»), los golpes hacen que las ruedas oscilen sobre los amortiguadores. (Lo que en realidad oscila es el conjunto del eje con sus dos ruedas). Encontrar la velocidad del coche a la cual resuena la oscilación, con la siguiente información: **(a)** Al subirse en el coche cuatro hombres de 80 kg de peso, éste se hunde un par de centímetros. Utilizar este dato para estimar la constante k de cada uno de los cuatro amortiguadores. **(b)** Si el eje más las dos ruedas tiene una masa total de 50 kg, ¿cuál es la frecuencia natural del conjunto cuando oscila sobre sus dos amortiguadores? **(c)** Si las ondulaciones de la carretera están cada 80 cm, ¿a qué velocidad entrarían en resonancia estas oscilaciones?

5.44 ⋆⋆ Otra interpretación del Q de una resonancia viene de lo siguiente: consideremos el movimiento de un oscilador amortiguado forzado después de que cualquier transitorio se haya extinguido, y supongamos que está siendo forzado casi hasta la resonancia, de manera que se establece $\omega = \omega_0$. **(a)** Demostrar que la energía total del oscilador (cinética más potencial) es $E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$. **(b)** Demostrar que la energía ΔE_{dis} que se disipa durante un ciclo por la fuerza de amortiguamiento F_{amort} es $2\pi m\beta\omega A^2$. (Recordar que la tasa a la cual la fuerza trabaja es Fv). **(c)** Por consiguiente, demostrar que Q es 2π veces el ratio $E/\Delta E_{\text{dis}}$.

5.45 ⋆⋆⋆ Consideremos un oscilador amortiguado, con frecuencia natural ω_0 y una constante de amortiguamiento β ambas fijas, forzado por una fuerza $F(t) = F_0\cos(\omega t)$. **(a)** Encontrar la tasa $P(t)$ asociada a $F(t)$ y demostrar que la tasa media $\langle P\rangle$ sobre cualquier número de ciclos completos es $m\beta\omega^2 A^2$. **(b)** Comprobar que es la misma que la tasa media a la cual la energía se pierde en favor de la fuerza resistiva. **(c)** Demostrar que si ω varía $\langle P\rangle$ es el máximo cuando $\omega = \omega_0$; esto significa que la resonancia de la potencia sucede a $\omega = \omega_0$ (exactamente).

Sección 5.7 Series de Fourier*

5.46 ⋆ El término constante a_0 en una serie de Fourier es un pequeño incordio, ya que siempre requiere un tratamiento ligeramente especial. Por lo menos su interpretación es relativamente sencilla: demostrar que si $f(t)$ contiene las series de Fourier estándar (5.82), entonces a_0 es igual a la media $\langle f\rangle$ de $f(t)$ tomado durante un ciclo completo.

5.47 ⋆⋆ Para poder demostrar las fórmulas cruciales (5.83)–(5.85) de los coeficientes a_n e b_n de Fourier, primero habrá que demostrar lo siguiente:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = \begin{cases} \tau/2 & \text{si } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases} \tag{5.105}$$

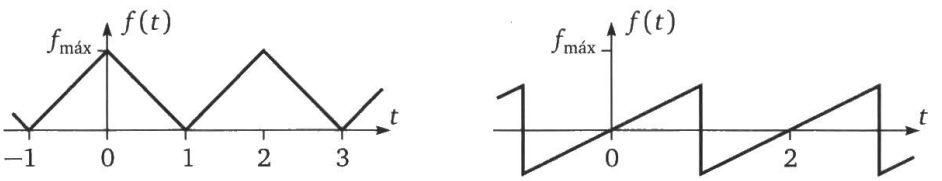


Figura 5.28. **(a)** Problema 5.49. **(b)** Problema 5.50.

(Obviamente, esta integral es τ si $m = n = 0$). Existe un resultado idéntico en el que todos los cosenos se reemplazan por senos, y finalmente

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(n\omega t)\,\mathrm{sen}(m\omega t)\,dt = 0 \qquad \text{para todos los enteros } n \text{ y } m, \tag{5.106}$$

donde como es habitual $\omega = 2\pi/\tau$. Demostrarlos. [*Ayuda*: Usar identidades trigonométricas para reemplazar $\cos(\theta)\cos(\phi)$ para términos como $\cos(\theta + \phi)$ etcétera].

5.48 ⋆⋆ Usar los resultados (5.105) y (5.106) para demostrar las fórmulas (5.83)–(5.85) para los coeficientes de Fourier a_n e b_n. [*Ayuda:* Multiplicar ambos miembros del desarrollo de Fourier (5.82) por $\cos(m\omega t)$ o $\mathrm{sen}(m\omega t)$ y después integrar desde $-\tau/2$ hasta $\tau/2$].

5.49 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Encontrar los coeficientes de Fourier a_n y b_n para la función mostrada en la Figura 5.28(a). Hacer una gráfica similar a la Figura 5.23, comparando la propia función con los dos primeros términos de la serie de Fourier y otro para los primeros seis términos. Tomar $f_{máx} = 1$.

5.50 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Hallar los coeficientes de Fourier a_n y b_n para la función mostrada en la Figura 5.28(b). Hacer una gráfica similar a la de la Figura 5.23, comparando la propia función con la suma de la primera pareja de términos en la serie de Fourier, y otra para los primeros 10 términos aproximadamente. Tomar $f_{máx} = 1$.

Sección 5.8 Solución en serie de Fourier para el oscilador forzado*

5.51 ⋆ Se puede obtener una solución más prolija de la serie de Fourier para un oscilador forzado periódicamente si no se tiene inconveniente en usar números complejos. Obviamente la fuerza periódica de la ecuación (5.90) puede escribirse como $f = \mathrm{Re}(g)$, donde la función compleja g es

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\omega t}.$$

Demostrar que la solución real para el movimiento del oscilador puede también escribirse como $x = \mathrm{Re}(z)$, donde

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{in\omega t}$$

y

$$C_n = \frac{f_n}{\omega_o^2 - n^2\omega^2 + 2i\beta n\omega}.$$

Esta solución nos evita tener que preocuparnos de la amplitud real A_n y del cambio de fase δ_n por separado. (Por supuesto A_n y δ_n están escondidas dentro del número complejo C_n).

5.52 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Repetir todos los cálculos y gráficos del Ejemplo 5.5 (página 221) con todos los parámetros iguales excepto $\beta = 0{,}1$. Comparar los resultados con los del ejemplo.

5.53 ⋆ ⋆ ⋆ [Ordenador] Un oscilador es forzado por la fuerza periódica del Problema 5.49 [Figura 5.28(a)], que tiene un período $\tau = 2$. **(a)** Encontrar el movimiento a largo plazo $x(t)$, suponiendo los siguientes parámetros: período natural $\tau_0 = 2$ (esto es, $\omega_0 = \pi$), período de amortiguamiento $\beta = 0{,}1$ y fuerza máxima de forzado $f_{\max} = 1$. Encontrar los coeficientes de la serie de Fourier para $x(t)$ y trazar una gráfica para la suma de los primeros cuatro términos de la serie para $0 \leq t \leq 6$. **(b)** Repetir, excepto con el período natural igual a 3.

Sección 5.9 El desplazamiento RMS; teorema de Parseval*

5.54 ⋆ Sea $f(t)$ una función periódica con período τ. Explicar claramente por qué la media de f en un período no es necesariamente la misma que la media en otro intervalo de tiempo. Explicar por qué, por otra parte, la media en un tiempo *largo* T se aproxima a la media en un período, como $T \to \infty$.

5.55 ⋆ ⋆ Para probar la relación de Parseval (5.100), uno debe primero probar el resultado (5.99) para la integral de un producto de cosenos. Probar este resultado, y después usarlo para probar la relación de Parseval.

5.56 ⋆ ⋆ La relación de Parseval como se establece en (5.100) se aplica a una función cuya serie de Fourier parece contener únicamente cosenos. Escribir la relación y demostrarla para una función

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t - \delta_n) + B_n \operatorname{sen}(n\omega t - \delta_n)\,].$$

5.57 ⋆ ⋆ [Ordenador] Repetir los cálculos que nos llevaron a la Figura 5.26, usando los mismos parámetros excepto $\beta = 0{,}1$. Representar gráficamente el resultado y compararlo con la Figura 5.26.

CAPÍTULO 6

Cálculo de variaciones

Existen muchos problemas en los que es necesario usar coordenadas diferentes de las cartesianas. En general, existen dos tipos de tales problemas. En primer lugar, para ciertas simetrías resulta más ventajoso utilizar coordenadas especiales: en problemas de simetría esférica hay que usar coordenadas polares esféricas; de manera similar, los problemas de simetría axial se tratan mejor con coordenadas polares cilíndricas. En segundo lugar, cuando las partículas están forzadas de alguna manera concreta, normalmente es mejor escoger un sistema de coordenadas apropiado y no el cartesiano. Por ejemplo, para un objeto forzado a moverse sobre una superficie esférica, suele ser más recomendable usar coordenadas esféricas; si una cuenta de collar se desliza por un alambre curvado, la coordenada más recomendable podría ser justamente la distancia a lo largo de la curva del alambre desde un origen conveniente.

Desafortunadamente, como ya hemos visto, las expresiones para las componentes de la aceleración en coordenadas no cartesianas son un poco liosas, y la situación empeora rápidamente a medida que pasamos a sistemas más complejos. Esto hace más difícil usar la segunda ley de Newton en coordenadas no cartesianas. Necesitamos una ecuación del movimiento alternativa (aunque equivalente) que funcione igual de bien en cualquier coordenada, y dicha alternativa la proporcionan las ecuaciones de Lagrange.

La mejor manera de demostrar y entender la enorme flexibilidad de las ecuaciones de Lagrange es usando un «principio variacional». Los principios variacionales son importantes en muchas áreas de las matemáticas y la física. Se ha demostrado la posibilidad de formular casi cualquier rama de la mecánica clásica, mecánica cuántica, óptica, electromagnetismo, etc., en términos de alguna variación. Para el principiante, acostumbrado a las leyes de Newton, una reformulación de la mecá-

nica clásica, en términos de un principio variacional puede no parecer una mejora. Pero al permitir una formulación similar de tantos temas diferentes, los métodos variacionales han dado unidad a la física y han jugado un papel esencial en la historia reciente de la física teórica. Por esta razón me gustaría introducir los métodos variacionales de una manera general. Por tanto este capítulo es una breve introducción a los problemas variacionales en general. En el siguiente capítulo aplicaré lo que hayamos aprendido aquí para establecer la formulación lagrangiana de la mecánica. Si ya se está familiarizado con el «cálculo de variaciones», se puede ir directamente al Capítulo 7.

6.1 Dos ejemplos

El cálculo de variaciones requiere encontrar el mínimo o el máximo de una magnitud que puede ser expresada como una integral. Para ilustrar esto con claridad, empezaré con dos ejemplos simples pero concretos.

El camino más corto entre dos puntos

El primer ejemplo es este problema: dados dos puntos de un plano, ¿cuál es el camino más corto entre ellos? Aunque indudablemente conocemos la respuesta, una línea recta, probablemente no se haya visto la demostración, a no ser que se hayan estudiado variaciones en cálculo. El problema se ilustra en la Figura 6.1, que muestra los dos puntos dados, (x_1, y_1) e (x_2, y_2), y un camino, $y = y(x)$, que los une. Nuestra tarea es definir el camino $y(x)$ que tiene la longitud más corta y demostrar que de hecho es una línea recta.

La longitud de un segmento corto del camino es $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, pero dado que

$$dy = \frac{dy}{dx}dx \equiv y'(x)\,dx,$$

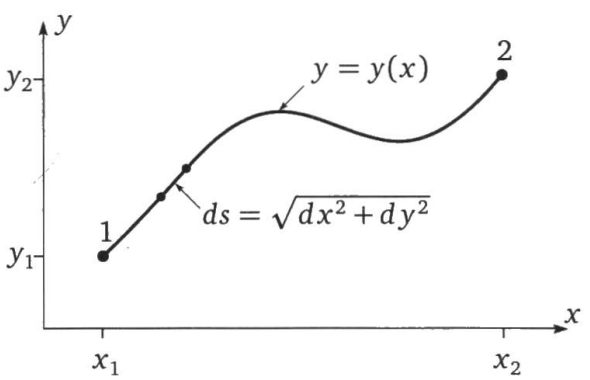


Figura 6.1. Un camino que une los puntos 1 y 2. La longitud del segmento corto es $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, y la longitud total del camino es $L = \int_1^2 ds$.

lo podemos reescribir como

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx. \tag{6.1}$$

Por tanto la longitud total del camino entre los puntos 1 y 2 es

$$L = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx. \tag{6.2}$$

Esta expresión reformula nuestro problema en forma matemática: la incógnita es la *función* $y = y(x)$ que define el camino entre los puntos 1 y 2. El problema es encontrar la función $y(x)$ para la cual la integral (6.2) es un mínimo. Es interesante contrastar esto con la minimización estándar del problema de cálculo elemental, donde lo desconocido es el valor de una variable x en la cual una función conocida $f(x)$ es un mínimo. Obviamente este nuevo problema es un poco más complicado que el anterior.

Antes de establecer los hechos para resolver este nuevo problema, consideremos otro ejemplo.

Principio de Fermat

Un problema similar es encontrar el camino que seguirá la luz entre dos puntos. Si el índice de refracción del medio es constante, entonces el camino es una línea recta, pero si el índice de refracción varía, o si interponemos un espejo o lente, el camino ya no es tan obvio. El matemático francés, Fermat (1601-1665), descubrió que el camino requerido es aquel para el cual el tiempo que tarda la luz en recorrerlo es mínimo. Podemos ilustrar el principio de Fermat usando la Figura 6.1. El tiempo para que la luz viaje una distancia corta ds es ds/v donde v denota la velocidad de la luz en el medio. Por lo tanto, el principio de Fermat nos dice que el camino correcto entre los puntos 1 y 2 es aquel para el cual el tiempo

$$\text{(tiempo de viaje)} = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \frac{1}{c}\int_1^2 n\, ds$$

es mínimo. Si n es constante, entonces puede sacarse de la integral y el problema se reduce a encontrar el camino más corto entre los puntos 1 y 2 (y la respuesta es, por supuesto, una línea recta). Por lo general, el índice de refracción puede variar, $n = n(x, y)$, y nuestro problema es encontrar el camino $y(x)$ para el cual la integral

$$\int_1^2 n(x, y)\, ds = \int_{x_1}^{x_2} n(x, y)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx \tag{6.3}$$

es mínima. [Al escribir la última expresión, he sustituido (6.1) por ds].

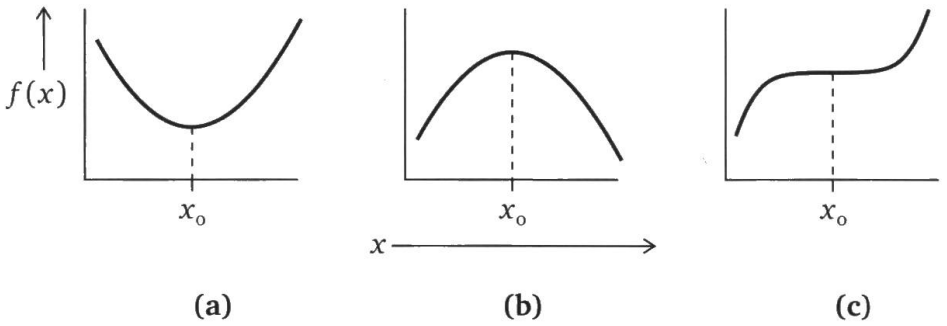


Figura 6.2. Si $df/dx = 0$ en x_0, existen tres posibilidades: **(a)** Si la segunda derivada es positiva, entonces $f(x)$ tiene un mínimo en x_0. **(b)** Si la segunda derivada es negativa, entonces $f(x)$ tiene un máximo. **(c)** Si la segunda derivada es cero, entonces puede haber mínimo o máximo, o ninguno de los dos (como se muestra).

La integral que debe ser minimizada en relación con el principio de Fermat es muy similar a la integral (6.2) que da la longitud de un camino; es sólo un poco más complicado, ya que el factor $n(x, y)$ introduce una dependencia adicional de x e y. En muchos otros problemas aparecen integrales similares. A veces buscamos el camino para el cual una integral es un *máximo*, y a veces nos interesa tanto el máximo como el mínimo. Para hacernos una idea de las posibilidades, resulta útil pensar de nuevo en el problema de encontrar máximos y mínimos de funciones en cálculo elemental. En este punto sabemos que la condición necesaria para un máximo o mínimo de una función $f(x)$ es que sus derivadas se anulen, $df/dx = 0$. Lamentablemente, esta condición no es suficiente para garantizar un máximo o mínimo. Como se recordará de cursos elementales de cálculo, existen principalmente tres posibilidades, como se ilustra en la Figura 6.2. Un punto x_0 donde df/dx es cero puede ser tanto máximo como mínimo, si d^2f/dx^2 también es cero, aunque también puede ser *ninguno*, como se indica en la Figura 6.2(c). Cuando $df/dx = 0$ en un punto x_0, pero no sabemos cuál de las tres posibilidades se obtiene, decimos que x_0 es un **punto estacionario** de la función $f(x)$, ya que un desplazamiento infinitesimal de x a x_0 deja a $f(x)$ igual (porque la pendiente es cero).

La situación para los problemas abordados en este capítulo es muy similar. El método que describiré en la siguiente sección realmente encuentra el camino que logra una integral como (6.2) o (6.3) **estacionaria**, en el sentido de que una variación infinitesimal del camino de su curso correcto no cambia el valor de la integral que nos preocupa. Si queremos saber si la integral es realmente mínima (o máxima, o quizá ninguno de los dos casos anteriores), tendríamos que comprobarlo por separado. Y ahora, estamos listos para explicar el nombre de este capítulo: ya que nuestra preocupación es la manera en que las variaciones infinitesimales de un camino cambian alguna integral, el tema se denomina **cálculo de variaciones**. Por la misma razón, los métodos que desarrollaremos se denominan métodos variacionales, y un principio como el de Fermat es un principio variacional.

6.2 La ecuación de Euler-Lagrange

Los dos ejemplos de la última sección ilustran la forma general del llamado problema variacional. Tenemos una integral de la forma

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x), x]\, dx \tag{6.4}$$

donde $y(x)$ es una curva aún desconocida que une los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) como en la Figura 6.1; esto es,

$$y(x_1) = y_1 \qquad \text{y} \qquad y(x_2) = y_2. \tag{6.5}$$

Entre todas las curvas posibles (6.5) (esto es, que unen los puntos 1 y 2), tenemos que intentar encontrar la que hace que la integral S sea mínima (o máxima, o al menos estacionaria). Para concretar, supondré que deseamos encontrar un mínimo. Observe que la función f en (6.4) es una función de tres variables $f = f(y, y', x)$, pero como la integral sigue el camino $y = y(x)$ el integrando $f[y(x), y'(x), x]$ es realmente una función de una sola variable x.

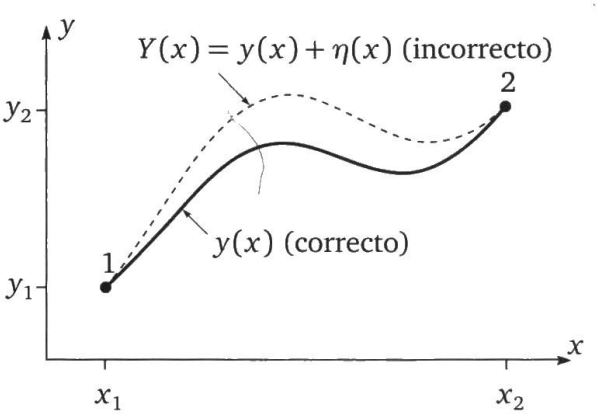


Figura 6.3. El camino $y = y(x)$ entre los puntos 1 y 2 es el camino «correcto», para el que la integral S de (6.4) es un mínimo. Cualquier otro camino $Y(x)$ es «incorrecto», ya que nos da un valor más grande para S.

Denotemos la solución correcta para nuestro problema como $y = y(x)$. Entonces la integral S en (6.4) analizada para $y = y(x)$ es menor para cualquier curva vecina $y = Y(x)$, como se ilustra en la Figura 6.3. Resulta conveniente escribir la curva «errónea» $Y(x)$ como

$$Y(x) = y(x) + \eta(x) \tag{6.6}$$

donde $\eta(x)$ (eta griega) es únicamente la diferencia entre el $Y(x)$ erróneo y el $y(x)$ correcto. Ya que $Y(x)$ debe pasar justo por los puntos finales 1 y 2, $\eta(x)$ debe satisfacer

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \tag{6.7}$$

Existen infinitas posibilidades para la diferencia $\eta(x)$; por ejemplo, podríamos escoger $\eta = (x - x_1)(x_2 - x)$ o $\eta(x) = \text{sen}[\pi(x - x_1)/(x_2 - x_1)]$.

La integral S tomada a lo largo de la curva errónea $Y(x)$ debe ser mayor que la que va a lo largo de la curva correcta $y(x)$, sin importar lo cerca que está la primera de la segunda. Para expresar este requerimiento, introduciré el parámetro α y redefiniré $Y(x)$ para que sea

$$Y(x) = y(x) + \alpha\eta(x). \tag{6.8}$$

La integral S tomada a lo largo de la curva $Y(x)$ ahora depende del parámetro α, de manera que lo llamaré $S(\alpha)$. La curva correcta $y(x)$ se obtiene de (6.8) estableciendo $\alpha = 0$. Por lo tanto el requerimiento de que S sea mínimo para la curva correcta $y(x)$ implica que $S(\alpha)$ es mínimo en $\alpha = 0$. Con este resultado hemos convertido el problema en un problema tradicional del cálculo elemental, asegurándonos de que una función normal [concretamente $S(\alpha)$] tiene un mínimo en un punto específico ($\alpha = 0$). Para asegurar esto, sólo debemos asegurar que la derivada $dS/d\alpha$ es cero cuando $\alpha = 0$.

Si escribimos la integral $S(\alpha)$ en detalle, tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} f(Y, Y', x)\, dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x)\, dx \end{aligned} \tag{6.9}$$

Para derivar (6.9) respecto de α, observemos que α aparece en el integrando f, por lo que debemos analizar $\partial f/\partial\alpha$. Ya que α aparece en dos de los argumentos de f, esto proporciona dos términos, principalmente (usando la regla de cadena)

$$\frac{\partial f(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x)}{\partial\alpha} = \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'},$$

y para $dS/d\alpha$ (que tiene que ser cero)

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial\alpha}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx = 0. \tag{6.10}$$

Esta condición debe cumplirse para cualquier $\eta(x)$ que cumpla (6.7); esto es, para cualquier elección del camino «erróneo» $Y(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$.

Para aprovechar la condición (6.10), tenemos que reescribir el segundo término del segundo miembro usando una integración por partes[1] (recuerde que η' significa $d\eta/dx$):

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}dx = \left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx.$$

Debido a la condición (6.7), el primer término del segundo miembro (el «término del punto final») es cero. Por lo tanto[2]

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}dx = -\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx. \tag{6.11}$$

Sustituyendo esta identidad por (6.10), encontramos que

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx = 0. \tag{6.12}$$

Esta condición debe ser satisfecha para cualquier elección de la función $\eta(x)$. Por lo tanto y tal y como diré enseguida, el factor en el paréntesis grande debe ser cero:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \qquad \text{(Ecuación de Euler-Lagrange)} \tag{6.13}$$

para todas las x (en el intervalo relevante $x_1 \leq x \leq x_2$). Esta es la denominada **ecuación de Euler-Lagrange** (en honor del matemático suizo Leonhard Euler, 1707-1783, y del matemático físico ítalo-francés Joseph Lagrange, 1736-1813), que nos permite encontrar el camino para el cual la integral de S es estacionaria. Antes de ilustrar su uso, debo hablar sobre el paso de (6.12) a (6.13), que no es ni mucho menos obvio.

---

[1] Si suele pensar en la integración por partes en la forma $\int v\,du = [uv] - \int u\,dv$, resultará útil reconocer que otra forma de decir lo mismo es: $\int u'v\,dx = [uv] - \int uv'\,dx$. En palabras: en la integral $\int u'v\,dx$ se puede pasar la «prima» de la u a la v si cambiamos el signo y se añade la contribución del punto final $[uv]$.

[2] Esta es la manera sencilla en que la integración por partes a menudo aparece en física: si el término de un punto final $[uv]$ es cero (como sucede a menudo), la integración por partes nos permite pasar la derivada de u a v siempre y cuando se cambie el signo; esto es, $\int u'v\,dx = -\int uv'dx$.

La ecuación (6.12) tiene la forma $\int \eta(x)g(x)\,dx = 0$. Desde luego no afirmaría que esta única condición implica que $g(x) = 0$ para todas las x. Sin embargo, (6.12) sirve para cualquier elección de la función $\eta(x)$, y si $\int \eta(x)g(x)\,dx = 0$ para *cualquier* $\eta(x)$, entonces *podemos* concluir que $g(x) = 0$ para todas las x. Para demostrarlo, debemos suponer que todas las funciones que nos interesan son continuas, pero, como físicos, daríamos por supuesto que este es el caso.[3] Ahora bien, para demostrar la afirmación supondremos lo contrario, que $g(x)$ no es cero en algún intervalo entre x_1 y x_2. Escojamos una función $\eta(x)$ con el mismo signo que $g(x)$ (esto es, η es positivo cuando g es positivo y η es negativo cuando g es negativo). Entonces cuando el integrando es continuo, cumple $\eta(x)g(x) \geq 0$, y no es cero al menos en algún intervalo. Bajo estas condiciones $\int \eta(x)g(x)\,dx$ no puede ser cero. Esta contradicción implica que $g(x)$ *es* cero para todas las x.

Esto completa la demostración de la ecuación de Euler-Lagrange. El procedimiento para su utilización es: (1) Formular el problema de manera que la cantidad cuyo camino estacionario buscamos venga expresada como una integral en la forma estándar

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x), x]\,dx, \tag{6.14}$$

donde $f[y(x), y'(x), x]$ es la función adecuada para el problema. (2) Escribir la ecuación de Euler–Lagrange (6.13) en términos de la función $f[y(x), y'(x), x]$. (3) Finalmente, resolver (a ser posible) la ecuación diferencial (6.13) para la función $y(x)$ que define el camino estacionario requerido. Ilustraré este procedimiento con un par de ejemplos en la siguiente sección.

6.3 Aplicaciones de la ecuación de Euler-Lagrange

Comencemos con el problema que abría este capítulo, el de encontrar el camino más corto entre dos puntos sobre un plano.

Ejemplo 6.1 *Camino más corto entre dos puntos*

Vimos que la longitud de un camino entre los puntos 1 y 2 está dada por la integral (6.2) como

$$L = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

[3] El resultado es claramente falso si se admiten funciones discontinuas. Por ejemplo, si hiciéramos $g(x)$ distinta de cero en un solo punto, entonces $\int \eta(x)g(x)\,dx$ seguiría siendo cero

Ésta tiene la forma estándar (6.14), con la función f dada por

$$f(y, y', x) = (1 + y'^2)^{1/2}. \tag{6.15}$$

Para usar la ecuación de Euler-Lagrange (6.13), debemos evaluar las dos derivadas parciales involucradas:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}}. \tag{6.16}$$

Como $\partial f / \partial y = 0$, (6.13) implica simplemente que

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

En otras palabras, $\partial f / \partial y'$ es una constante, C. De acuerdo con (6.16), esto implica que

$$y'^2 = C^2(1 + y'^2),$$

o, con un pequeño reajuste, $y'^2 =$ constante. Esto implica que $y'(x)$ es una constante, a la que podríamos llamar m. Integrando la ecuación $y'(x) = m$, encontramos que $y(x) = mx + b$, ¡y hemos demostrado que el camino más corto entre dos puntos es una línea recta!

Una nota sobre las variables

Hasta ahora hemos considerado problemas con dos variables, a las que hemos llamado x e y. De éstas, x ha sido la variable independiente, e y la dependiente, a través de la relación $y = y(x)$. Lamentablemente, estamos frecuentemente forzados (por conveniencia o tradición) a llamar a las variables de manera diferente. Por ejemplo, en un problema unidimensional de mecánica, la variable independiente es el tiempo t y la variable dependiente es la posición $x = x(t)$. Esto significa que tendremos que acostumbrarnos a ver la ecuación de Euler-Lagrange con las variables x e y sustituidas por un surtido de otras variables, tales como t y x. En el siguiente ejemplo, las dos variables son x e y, pero la variable independiente es y, y los papeles de x e y en (6.13) y (6.14) estarán exactamente cambiados.

Ejemplo 6.2 *La braquistócrona*

Un famoso problema del cálculo de variaciones es este: dados dos puntos 1 y 2, con 1 por encima del suelo, ¿de qué forma deberíamos construir un raíl de una montaña rusa sin rozamiento para que un móvil (una vagoneta) que se deje caer libremente

en el punto 1 alcance el punto 2 en el menor tiempo posible? Este problema se llama el problema de la *braquistócrona*, por las palabras griegas *braquistos* que significan «más corto» y *cronos* que significa «tiempo». La geometría del problema está esbozada en la Figura 6.4, donde he tomado el punto 1 como el origen y he elegido medir y verticalmente hacia abajo.

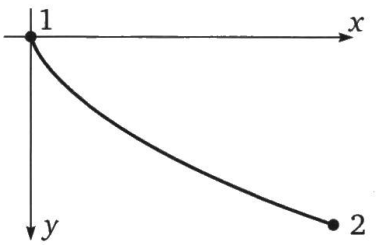


Figura 6.4. El problema de la braquistócrona es hallar la forma del raíl de una montaña rusa tal que si se deja caer libremente una vagoneta desde el punto 1 alcance el punto 2 en el mínimo tiempo posible.

El tiempo en ir desde 1 hasta 2 es

$$\text{tiempo } (1 \to 2) = \int_1^2 \frac{ds}{v} \tag{6.17}$$

donde la velocidad a una altura cualquiera y se determina por la conservación de la energía y es $v = \sqrt{2gy}$. (Problema 6.8). Como esto proporciona v en función de y, es conveniente tomar y como nuestra variable independiente. Es decir, escribiremos el camino desconocido como $x = x(y)$. Esto significa que la distancia ds entre puntos vecinos sobre el camino se debe escribir como

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(y)^2 + 1}\, dy \tag{6.18}$$

donde una prima ahora significa derivación con respecto a y; esto es, $x'(y) = dx/dy$. Por consiguiente, de acuerdo con (6.17) el tiempo de interés es

$$\text{tiempo } (1 \to 2) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_2} \frac{\sqrt{x'(y)^2 + 1}}{\sqrt{y}}\, dy. \tag{6.19}$$

La ecuación (6.19) da la integral cuyo mínimo tenemos que encontrar. Es de la forma estándar (6.14), excepto que los papeles de x e y se han intercambiado, con el integrando

$$f(x, x', y) = \frac{\sqrt{x'^2 + 1}}{\sqrt{y}}. \tag{6.20}$$

Para hallar el camino que hace el tiempo tan pequeño como sea posible, sólo tenemos que aplicar la ecuación de Euler-Lagrange (de nuevo con x e y intercambiadas) para esta función,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial x'}. \tag{6.21}$$

La función de (6.20) es independiente de x, así que la derivada $\partial f/\partial x$ es cero, y (6.21) nos dice simplemente que $\partial f/\partial x'$ es una constante. Evaluando esta derivada (y elevándola al cuadrado por conveniencia) concluimos que

$$\frac{x'^2}{y(1+x'^2)} = \text{const} = \frac{1}{2a} \tag{6.22}$$

donde he nombrado la constante $1/2a$ por futura conveniencia. Esta ecuación se resuelve fácilmente para x' para dar

$$x' = \sqrt{\frac{y}{2a-y}},$$

de donde

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{2a-y}}\, dy. \tag{6.23}$$

Esta integral se puede calcular mediante la aparentemente insospechada sustitución

$$y = a(1-\cos\theta) \tag{6.24}$$

que nos da (como debería comprobarse)

$$\begin{aligned} x &= a\int (1-\cos\theta)\, d\theta \\ &= a(\theta - \operatorname{sen}\theta) + \text{const}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Las dos ecuaciones (6.25) y (6.24) son ecuaciones paramétricas para el camino requerido, dando x e y como funciones del parámetro θ. Hemos seleccionado el punto inicial 1 para obtener $x = y = 0$, de (6.24) vemos que el valor inicial de θ es cero. Esto a su vez implica que la constante de integración en (6.25) es cero. Por lo tanto, la ecuación paramétrica final para el camino es

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \quad \text{e} \quad y = a(1-\cos\theta) \tag{6.26}$$

con la constante a calculada para que la curva pase por el punto dado (x_2, y_2).

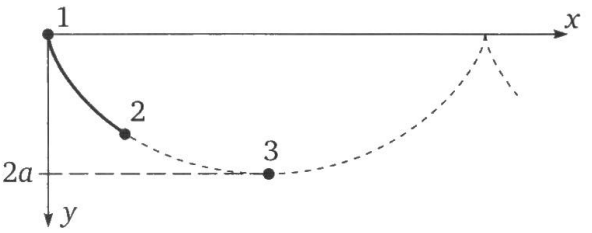


Figura 6.5. El trazado de una montaña rusa que produce el tiempo más corto entre los puntos dados 1 y 2 forma parte de la cicloide con el vértice en 1 mientras pasa por 2. La cicloide es la curva trazada por un punto del borde de una rueda de radio a que rueda a lo largo de la parte inferior del eje x. El punto 3 es el punto más bajo de la curva.

La curva (6.26) está representada en la Figura 6.5. En esa figura he continuado la curva (con guiones) más allá del punto 2 para mostrar que la curva que resuelve el problema de la braquistócrona resulta ser una cicloide, a saber, la curva descrita por un punto del borde de una rueda de radio a que rueda a lo largo de la parte inferior del eje x (Problema 6.14). Otra característica destacable de esta curva es la siguiente: si liberamos la vagoneta desde el reposo en el punto 2 y dejamos que caiga hasta el fondo de la curva (el punto 3 de la figura), el tiempo que tarda de 2 a 3 es el mismo cualquiera que sea la posición de 2, en cualquier punto entre 1 y 3. Esto significa que las oscilaciones de un móvil que se mueve hacia adelante y hacia atrás sobre una pista cicloide son exactamente *isócronas* (período totalmente independiente de la amplitud), en contraste con las oscilaciones de un péndulo simple, que sólo son aproximadamente isócronas, siempre que la amplitud sea pequeña. (Vea el Problema 6.25). La propiedad isócrona de la cicloide de hecho fue usada en el diseño de algunos relojes, uno de los cuales puede verse en el Victoria and Albert Museum de Londres.

Máximo y mínimo frente a estacionario

Se habrá notado que en ninguno de los dos ejemplos de esta sección he comprobado que las curvas encontradas dan realmente un valor mínimo para la integral que nos interesa, es decir, que la línea recta entre dos puntos realmente hace que la longitud del camino sea *mínima*, ni máxima ni estacionaria. La ecuación de Euler-Lagrange sólo garantiza un camino para el cual la integral original es estacionaria. El problema de decidir si lo que tenemos es un máximo o un mínimo (o una curva estacionaria que no es ninguno de los dos) es normalmente difícil. En algunos problemas es fácil ver cuál es el caso. Por ejemplo, resulta obvio que una línea recta nos da una distancia *mínima* entre dos puntos en un plano. En el caso de la braquistócrona, no resulta tan obvio que el camino que encontramos produce un tiempo mínimo, pero sí es cierto.

Para ilustrar la variedad de posibilidades, consideremos el problema de encontrar el camino más corto o **geodésico**, entre los puntos 1 y 2 sobre la superficie de un globo esférico. Como ya sabemos, la respuesta es el arco del círculo mayor o máximo que une los dos puntos.[4] Usando el cálculo variacional podemos demostrar con facilidad que un círculo mayor realmente hace que la distancia sea estacionaria: usando coordenadas esféricas polares, cada punto del globo puede identificarse por los ángulos θ y ϕ. Si establecemos un camino como $\phi = \phi(\theta)$ y establecemos una integral que nos dé la distancia entre 1 y 2 a lo largo de este camino, podemos demostrar que la ecuación de Euler-Lagrange para $\phi(\theta)$ requiere que el camino siga un círculo mayor. (Vea el Problema 6.16 para más detalles). Pero hay que pensar con cuidado antes de decidir que esto necesariamente nos va a dar una distancia mínima, ya que existen *dos diferentes* caminos del círculo mayor que conectan dos puntos 1 y 2 cualesquiera sobre un globo. Para simplificar consideremos dos ciudades sobre el ecuador, Quito (cercana a la costa del Pacífico en Ecuador) y Macapá (en la desembocadura del Amazonas en la costa atlántica de Brasil). El camino «correcto» más corto entre estas dos ciudades es por supuesto, el círculo mayor que sigue el ecuador a lo largo de unos 3200 kilómetros a través de América del Sur. Pero una segunda posibilidad, que también cumple la ecuación de Euler-Lagrange, es dirigirse hacia el oeste alrededor del ecuador desde Quito, a través del Pacífico, siguiendo por el continente africano y el Atlántico, para llegar a Macapá después de unos 35 500 kilómetros. Podríamos decir que este camino sería el máximo, pero de hecho no es ni máximo ni mínimo: es muy fácil establecer caminos cercanos más cortos, pero también es fácil encontrar otros más largos. En otras palabras, este segundo círculo mayor no da ni un máximo ni un mínimo. El segundo camino es por supuesto análogo al punto de inflexión horizontal en cálculo elemental. Por suerte en este problema resulta obvio que el primer camino nos da el mínimo verdadero. Sin embargo, queda claro que, en general, decidir qué tipo de camino estacionario nos ha dado la ecuación de Euler-Lagrange puede ser complicado.

Afortunadamente, estas ecuaciones resultan irrelevantes para nuestros propósitos. Encontraremos que para las aplicaciones en mecánica lo que importa es tener un camino que haga *estacionaria* determinada integral. Realmente no importa si nos da un máximo o un mínimo, o ninguno.

6.4 Más de dos variables

Hasta ahora hemos considerado únicamente problemas con dos variables, la variable independiente (normalmente x) y la dependiente (normalmente y). Para la mayo-

[4] El círculo mayor o máximo es aquel que se obtiene por la intersección de la superficie del globo con un plano que contiene al centro del mismo.

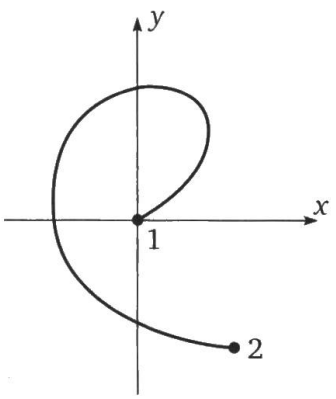


Figura 6.6. Este camino entre los dos puntos 1 y 2 no se puede escribir como $y = y(x)$ ni como $x = x(y)$. Se *puede* escribir en la forma paramétrica (6.27).

ría de las aplicaciones en mecánica, encontraremos que existen diferentes variables dependientes, pero afortunadamente sólo una variable independiente, normalmente el tiempo t. Para ver un ejemplo sencillo en el cual hay dos variables dependientes, podemos volver al problema del camino más corto entre dos puntos. Al encontrar el camino más corto entre los puntos 1 y 2, asumimos que el camino requerido podía escribirse en la forma $y = y(x)$. Aunque parezca razonable, es fácil pensar en caminos que no pueden escribirse en esta forma, como el camino mostrado en la Figura 6.6. Para estar totalmente seguros de que hemos encontrado el camino más corto entre *todos* los caminos posibles, debemos encontrar un método que los incluya a todos. La forma de hacer esto es escribir el camino en forma paramétrica como

$$x = x(u) \quad \text{e} \quad y = y(u), \tag{6.27}$$

donde u es cualquier variable conveniente en cuyos términos la curva puede parametrizarse (por ejemplo, la distancia a lo largo del camino). La forma paramétrica (6.27) incluye todas las curvas consideradas anteriormente. [Si $y = y(x)$, sólo hay que usar x para el parámetro u]. También incluye curvas como la de la Figura 6.6 y de hecho, todas las curvas de interés.[5]

La longitud de un segmento pequeño del camino (6.27) es

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du \tag{6.28}$$

donde, como siempre, una prima significa derivación con respecto del argumento de la función; esto es, $x'(u) = dx/du$ e $y'(u) = dy/du$. Por tanto la longitud total del camino es

[5] Por si alguien tiene interés en curiosidades matemáticas, diré que en lo que sigue supondré que todas las funciones que nos ocupan son continuas y tienen derivadas segundas continuas. Este hecho puede cambiarse ligeramente permitiendo algunas discontinuidades en las derivadas

$$L = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du, \tag{6.29}$$

y nuestro trabajo es encontrar las dos funciones $x(u)$ e $y(u)$ para las cuales esta integral es mínima.

Este problema es más complicado que cualquiera que hayamos considerado antes, porque ahora hay dos funciones desconocidas $x(u)$ e $y(u)$. El problema general de este tipo es el siguiente: dada una integral de la forma

$$S = \int_{u_1}^{u_2} f[x(u), y(u), x'(u), y'(u), u]\, du \tag{6.30}$$

entre dos puntos fijos $[x(u_1), y(u_1)]$ y $[x(u_2), y(u_2)]$, hallar el camino $[x(u), y(u)]$ para el cual la integral S es estacionaria. La solución a este problema es muy similar al caso de una variable, y sólo la esbozaré, dejando al lector completar los detalles. El resultado final es que con dos variables dependientes obtenemos dos ecuaciones de Euler-Lagrange. Para probarlo, procedemos de manera muy parecida a como lo hicimos antes. Si el camino correcto está dado por

$$x = x(u) \quad \text{e} \quad y = y(u), \tag{6.31}$$

y entonces consideramos un camino vecino «incorrecto» de la forma

$$x = x(u) + \alpha\xi(u) \quad \text{e} \quad y = y(u) + \beta\eta(u) \tag{6.32}$$

(donde ξ es la letra griega «xi»). El requerimiento de que la integral S sea estacionaria para el camino correcto (6.31) es equivalente al requerimiento de que la integral $S(\alpha, \beta)$, tomada a lo largo del camino incorrecto (6.32), satisfaga

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \tag{6.33}$$

donde $\alpha = \beta = 0$. Estas dos condiciones son la generalización natural de la condición (6.10) para el caso de una variable. Por un argumento que es exactamente paralelo a aquél de conduce desde (6.10) a (6.13), se puede demostrar que estas dos condiciones son equivalentes a las *dos* ecuaciones de Euler-Lagrange (vea el Problema 6.26):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{du}\frac{\partial f}{\partial x'} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{du}\frac{\partial f}{\partial y'}. \tag{6.34}$$

Estas dos ecuaciones determinan un camino para el cual la integral (6.30) es estacionaria, y, al contrario, si la integral es estacionaria para algún camino, ese camino debe satisfacer estas dos ecuaciones.

Ejemplo 6.3 *El camino más corto entre dos puntos otra vez*

Podemos ahora resolver completamente el problema del camino más corto entre dos puntos. (Esto es, resolverlo incluyendo *todos* los caminos posibles, como aquellos que aparecen en la Figura 6.6). De (6.29), vemos que para este problema el integrando f es

$$f(x,x',y,y',u) = \sqrt{x'^2 + y'^2}. \tag{6.35}$$

Como esto es independiente de x e y, las dos derivadas $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en los primeros miembros de (6.34) son cero. Por lo tanto, las dos ecuaciones de Euler-Lagrange implican simplemente que las dos derivadas $\partial f/\partial x'$ y $\partial f/\partial y'$ son constantes,

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = C_1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = C_2. \tag{6.36}$$

Si dividimos la segunda ecuación entre la primera y reconocemos que y'/x' es justo la derivada dy/dx, concluimos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{C_2}{C_1} = m, \tag{6.37}$$

por ejemplo. Se sigue que el camino requerido es una línea recta, $y = mx + b$. Es interesante observar que esta prueba que utiliza una ecuación paramétrica no sólo es mejor que nuestra prueba anterior, pues la nueva prueba incluye todos los posibles caminos, sino que es también ligeramente más fácil.

La generalización de la ecuación de Euler-Lagrange a un número arbitrario de variables dependientes es automática, y no necesita ser descrita en detalle. Aquí me gustaría esbozar la manera en que las ecuaciones de Euler-Lagrange aparecerán en la formulación lagrangiana de la mecánica.

La variable independiente en mecánica lagrangiana es el tiempo t. Las variables dependientes son las coordenadas que especifican la posición, o «configuración», de un sistema, y se denotan normalmente por $q_1, q_2, \cdots, q_n$. El número n de coordenadas depende de la naturaleza del sistema. Para una partícula sola que se mueve sin restricciones en tres dimensiones, n es 3, y las tres coordenadas q_1, q_2, q_3 podrían ser simplemente las tres coordenadas cartesianas x, y, z, o también podrían ser coordenadas esféricas polares r, θ, ϕ. Para N partículas que se mueven libremente en tres dimensiones, n es $3N$ y las coordenadas $q_1, \ldots, q_n$ podrían ser las $3N$ coordenadas cartesianas $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N$. Para un péndulo doble (dos péndulos simples,

con el segundo suspendido del extremo del primero, como en la Figura 6.7), habría dos coordenadas q_1, q_2, que podrían ser los dos ángulos mostrados en la Figura 6.7. Debido a que las coordenadas $q_1, \ldots, q_n$ pueden tener tantos aspectos diferentes, a menudo se denominan **coordenadas generalizadas**. Frecuentemente es útil pensar que las n coordenadas generalizadas definen un punto en un **espacio de configuración** n-dimensional, cada uno de cuyos puntos indica una posición o configuración única del sistema.

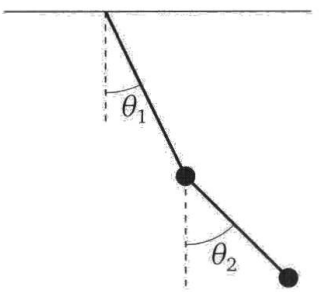


Figura 6.7. Una buena elección de coordenadas generalizadas para identificar la posición de un péndulo doble es el par de ángulos θ_1 y θ_2 entre los péndulos y la vertical.

El objetivo final de la mayoría de los problemas de mecánica lagrangiana es encontrar la forma en que las coordenadas varían con el tiempo; esto es, encontrar las n funciones $q_1(t), \ldots, q_n(t)$. Uno puede suponer que estas n funciones definen el camino en el espacio de configuración n-dimensional. Este camino por supuesto viene determinado por la segunda ley de Newton, pero encontraremos que de la misma manera se puede caracterizar como el camino para el cual una determinada integral es estacionaria. Esto significa que debe satisfacer las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes (en este contexto llamadas únicamente de Lagrange), y además resulta que estas ecuaciones de Lagrange son normalmente más fáciles de escribir y usar que la segunda ley de Newton. Más concretamente, a diferencia de la segunda ley de Newton, las ecuaciones de Lagrange toman la misma forma sencilla en todos los sistemas de coordenadas.

La integral S cuyo valor estacionario determina la evolución del sistema mecánico se denomina integral de acción. Su integrando se llama lagrangiano $\mathcal{L}$ y depende de n coordenadas $q_1, q_2, \ldots, q_n$, de sus n derivadas con respecto del tiempo $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ y del tiempo t,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1, \ldots, q_n, \dot{q}_n, t). \tag{6.38}$$

Observe que ya que la variable independiente es t, las derivadas de las coordenadas q_i son derivadas del tiempo y se definen, como es habitual, con puntos como $\dot{q}_i$. El

requisito para que la integral de acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1, \ldots, q_n, \dot{q}_n, t)\, dt \tag{6.39}$$

sea estacionaria implica n ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}, \quad \ldots, \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n}. \tag{6.40}$$

Estas n ecuaciones corresponden precisamente a las dos ecuaciones de Euler-Lagrange en (6.34) y se demuestran exactamente de la misma manera. Si estas n ecuaciones se cumplen, entonces la integral de acción (6.39) es estacionaria; y si la integral de acción es estacionaria, entonces estas n ecuaciones se cumplen. En el siguiente capítulo veremos de dónde vienen estas ecuaciones y cómo usarlas.

Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 6

La ecuación de Euler-Lagrange

Una integral de la forma

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x), x]\, dx \qquad \text{[Ec. (6.4)]}$$

tomada a lo largo de un camino $y = y(x)$ es estacionaria con respecto a las variaciones del camino si y sólo si $y(x)$ satisface la **ecuación de Euler-Lagrange**

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \qquad \text{[Ec. (6.13)]}$$

Varias variables

Si existen n variables dependientes en la integral original, aparecen entonces n ecuaciones de Euler-Lagrange. Por ejemplo, una integral de la forma

$$S = \int_{u_1}^{u_2} f[x(u), y(u), x'(u), y'(u), u]\, du,$$

con dos variables dependientes [$x(u)$ e $y(u)$], es estacionaria con respecto a las variaciones de $x(u)$ e $y(u)$ si y sólo si estas dos funciones satisfacen las dos ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{du}\frac{\partial f}{\partial x'} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{du}\frac{\partial f}{\partial y'}. \qquad \text{[Ec. (6.34)]}$$

Problemas para el Capítulo 6

Los asteriscos indican el nivel aproximado de dificultad, desde los más fáciles (⋆) hasta los más difíciles (⋆ ⋆ ⋆).

Sección 6.1 Dos ejemplos

6.1 ⋆ El camino más corto entre dos puntos sobre una *superficie curva*, como la superficie de una esfera, se denomina **geodésico**. Para encontrar un geodésico, primero hay que establecer la integral que da la longitud del camino sobre la superficie en cuestión. Ésta siempre será similar a la integral (6.2), pero puede ser más complicada (dependiendo de la naturaleza de la superficie) y puede involucrar otras coordenadas además de x e y. Para ilustrar esto, usar coordenadas esféricas polares (r, θ, ϕ) para mostrar que la longitud del camino que une dos puntos sobre una esfera de radio R es

$$L = R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \theta \, \phi'(\theta)^2} \, d\theta \tag{6.41}$$

si (θ_1, ϕ_1) y (θ_2, ϕ_2) determinan los dos puntos y suponemos que el camino viene expresado como $\phi = \phi(\theta)$. (Sobre cómo minimizar esta longitud, ver el Problema 6.16).

6.2 ⋆ Hacer lo mismo que en el Problema 6.1 pero ahora encontrar la longitud L de un camino sobre un cilindro de radio R, usando coordenadas polares cilíndricas (ρ, ϕ, z). Suponer que el camino viene determinado en la forma $\phi = \phi(z)$.

6.3 ⋆ ⋆ Consideremos un rayo de luz que viaja en el vacío desde el punto P_1 hasta P_2 pasando por el punto Q sobre un espejo plano, como en la Figura 6.8. Demostrar que el principio de Fermat implica que, sobre el camino real seguido, Q se encuentra en el mismo plano vertical que P_1 y P_2 y obedece la ley de la reflexión, esto es, que $\theta_1 = \theta_2$. [*Ayudas:* Situar el espejo en el plano xz, y P_1 en el eje y en un tiempo $(0, y_1, 0)$ y P_2 en el plano xy a $(x_2, y_2, 0)$. Finalmente, hacer que $Q = (x, 0, z)$. Calcular el tiempo que tarda la luz en cruzar el camino P_1QP_2 y demostrar que es mínimo cuando Q tiene $z = 0$ y satisface la ley de la reflexión].

6.4 ⋆ ⋆ Un rayo de luz viaja desde el punto P_1 en un medio con índice de refracción n_1 hasta P_2 en un medio con índice n_2, pasando por el punto Q situado sobre el plano que separa los dos medios, como en la Figura 6.4. Demostrar que el principio de Fermat implica que, sobre el camino real seguido, Q se encuentra en el mismo plano vertical que P_1 y P_2 y obedece la ley de Snell, en cuanto a que $n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$. [*Ayudas:* Hacer que la superficie entre los dos medios sea el plano xz , y que P_1 se encuentre sobre el eje y en un tiempo $(0, h_1, 0)$ y P_2 en el plano x, y a $(x_2, -h_2, 0)$. Finalmente hacer que $Q = (x, 0, z)$. Calcular el tiempo que tarda la luz en cruzar el camino P_1QP_2 y demostrar que es mínimo cuando Q tiene $z = 0$ y satisface la ley de Snell].

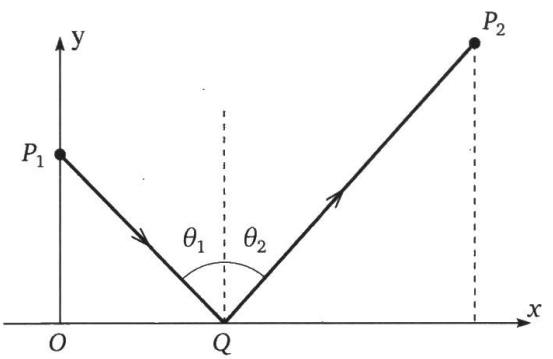


Figura 6.8. Problema 6.3.

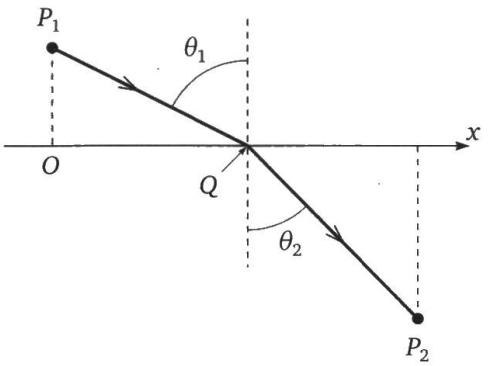


Figura 6.9. Problema 6.4.

6.5 ⋆ ⋆ El principio de Fermat normalmente se enuncia como «el tiempo que tarda un rayo de luz, que se mueve desde el punto A hasta B, es mínimo a lo largo del camino real». Estrictamente hablando, debería decir que el tiempo es *estacionario*, y no mínimo. De hecho, se pueden construir

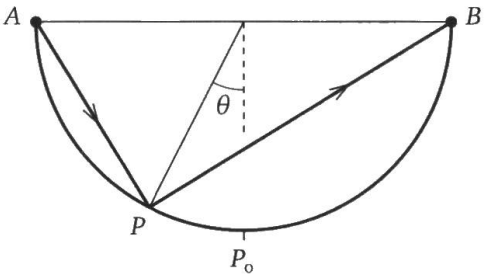


Figura 6.10. Problema 6.5.

situaciones para las cuales el tiempo es máximo a lo largo del camino real. He aquí una: consideremos el espejo cóncavo hemisférico mostrado en la Figura 6.10, con A y B en los puntos opuestos del diámetro. Consideremos un rayo de luz que viaja en el vacío desde A hasta B con una reflexión en P, en el mismo plano vertical que A y B. Según la ley de la reflexión, el camino real pasa por el punto P_0 al fondo del hemisferio ($\theta = 0$). Hallar el tiempo que viaja a lo largo del camino APB como una función de θ y demostrar que es *máximo* en $P = P_0$.

6.6 ⋆⋆ En muchos problemas de cálculo variacional, resulta necesario conocer la longitud ds de un segmento corto de una curva sobre una superficie, como en la expresión (6.1). Hacer una tabla para las expresiones apropiadas para ds en las siguientes ocho situaciones: **(a)** Una curva dada por $y = y(x)$ en un plano, **(b)** igual pero para $x = x(y)$, **(c)** igual pero para $r = r(\phi)$, **(d)** igual pero para $\phi = \phi(r)$; **(e)** una curva dada por $\phi = \phi(z)$ sobre un cilindro de radio R, **(f)** igual pero para $z = z(\phi)$; **(g)** una curva dada por $\theta = \theta(\phi)$ sobre una esfera de radio R, **(h)** igual pero para $\phi = \phi(\theta)$.

Sección 6.3 Aplicaciones de la ecuación de Euler-Lagrange

6.7 ⋆ Consideremos un cilindro recto circular de radio R centrado en el eje z. Encontrar la ecuación que da ϕ como una función de z para la geodésica (el camino más corto) sobre el cilindro entre dos puntos con coordenadas polares cilíndricas (R, ϕ_1, z_1) y (R, ϕ_2, z_2). Describir la geodésica. ¿Es única? Imaginando que la superficie del cilindro está desenrollada y extendida, explicar por qué la geodésica tiene esa forma.

6.8 ⋆ Verificar que la velocidad del móvil del Ejemplo 6.2 (página 245) es $\sqrt{2gy}$. (Suponer que las ruedas tienen una masa despreciable y despreciar el rozamiento).

6.9 ⋆ Encontrar la ecuación del camino que une el origen O con el punto $P(1,1)$ en el plano xy que hace la integral $\int_O^P (y'^2 + yy' + y^2)\,dx$ estacionaria.

6.10 ⋆ Por lo general el integrando $f(y, y', x)$ cuya integral queremos minimizar depende de y, y' y x. Hay una simplificación considerable si f resulta ser independiente de y, esto es, $f = f(y', x)$. (Esto fue lo que sucedió en los Ejemplos 6.1 y 6.2, aunque en el último los papeles de x e y se intercambiaron). Demostrar que cuando sucede esto, la ecuación de Euler-Lagrange (6.13) se reduce al enunciado

$$\partial f / \partial y' = \text{const.} \tag{6.42}$$

Como esta es una ecuación diferencial de primer orden para $y(x)$, mientras que la ecuación de Euler-Lagrange es normalmente de segundo orden, es una simplificación importante y el resultado (6.42) a menudo se denomina **integral primera** de la ecuación de Euler-Lagrange. Veremos en mecánica lagrangiana que esta simplificación surge cuando una componente del momento se conserva.

6.11 ⋆⋆ Encontrar el camino $y = y(x)$ para el cual la integral $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x}\sqrt{1 + y'^2}\,dx$ es estacionaria.

6.12 ⋆⋆ Encontrar el camino $y = y(x)$ para el cual la integral $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1 - y'^2}\,dx$ es estacionaria.

6.13 ⋆⋆ En la teoría de la relatividad, las velocidades se pueden representar por puntos en cierto «espacio de rapidez» en el cual la distancia entre dos puntos vecinos es $ds = [2/(1-r^2)]\sqrt{dr^2 + r^2\,d\phi^2}$, donde r y ϕ son coordenadas polares, y consideramos sólo un espacio de dos dimensiones. (Una expresión como esta para la distancia en un espacio no Euclídeo se llama muchas veces la *métrica* del espacio). Usar la ecuación de Euler-Lagrange para mostrar que el camino más corto desde el origen a cualquier otro punto es una línea recta.

6.14 ⋆⋆ **(a)** Probar que la curva braquistócrona (6.26) es de hecho una cicloide, esto es, la curva trazada por un punto de la circunferencia de una rueda de radio a que rueda a lo largo de la parte inferior del eje x. **(b)** Aunque la cicloide se repite a sí misma indefinidamente en una sucesión de vueltas, sólo una vuelta es relevante para el problema de la braquistócrona. Esbozar una única vuelta para tres valores diferentes de a (todos con el mismo punto de partida, el punto 1) y convencerse a uno mismo de que para cualquier punto 2 (con coordenadas positivas x_2, y_2) hay exactamente un valor de a para el que la vuelta pasa por el punto 2. **(c)** Para encontrar el valor de a para un punto dado x_2, y_2 normalmente es necesario resolver una ecuación trascendente. He aquí dos casos en los que se puede hacer de manera más sencilla: para $x_2 = \pi b, y_2 = 2b$ y de nuevo para $x_2 = 2\pi b, y_2 = 0$ hallar el valor de a para el cual la cicloide va por el punto 2 y encontrar los tiempos mínimos correspondientes.

6.15 ⋆⋆ Consideremos otra vez el problema de la braquistócrona del Ejemplo 6.2 (página 245) pero supongamos que la vagoneta parte desde el punto 1 con una velocidad fija v_0. Mostrar que el camino de tiempo mínimo hasta el punto fijo 2 es todavía una cicloide, pero con su cúspide (el punto más alto de la curva) a una altura de $v_0^2/2g$ por encima del punto 1.

6.16 ⋆⋆ Usar el resultado (6.41) del Problema 6.1 para probar que la geodésica (camino más corto) entre dos puntos dados sobre una esfera es un arco del círculo mayor. [*Ayuda:* El integrando $f(\phi, \phi', \theta)$ en (6.41) es independiente de ϕ, así que la ecuación de Euler-Lagrange se reduce a $\partial f/\partial \phi' = c$, una constante. Esto proporciona ϕ' como una función de θ. Se puede evitar hacer la integral final usando el siguiente truco: no hay pérdida de generalidad si se elige el eje z de tal manera que pase a través del punto 1. Mostrar que con esta elección la constante c es necesariamente cero, y describir las geodésicas correspondientes].

6.17 ⋆⋆ Encontrar las geodésicas sobre el cono cuya ecuación en coordenadas polares cilíndricas es $z = \lambda\rho$. [La curva requerida es de la forma $\phi = \phi(\rho)$]. Comprobar el resultado para el caso en que $\lambda \to 0$.

6.18 ⋆⋆ Mostrar que el camino más corto entre dos puntos dados en un plano es una línea recta, usando coordenadas polares planas.

6.19 ⋆⋆ Una superficie de revolución se genera como sigue: dos puntos fijos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano x, y están unidos por una curva $y = y(x)$. [Realmente será más sencillo si se comienza escribiéndola como $x = x(y)$]. La curva completa está ahora rotada alrededor del eje x para generar una superficie. Mostrar que la curva para la cual el área de la superficie es mínima tiene la forma $y = y_0 \cosh[(x - x_0)/y_0]$, donde x_0 e y_0 son constantes. (Esto se llama muchas veces el problema de la pompa de jabón, porque la superficie resultante tiene normalmente la forma de una pompa de jabón sujeta por dos anillos coaxiales de radios y_1 e y_2).

6.20 ⋆⋆ Si no se ha hecho todavía, se recomienda echar un vistazo al Problema 6.10. Aquí hay una segunda situación en la cual se puede encontrar una «integral primera» de la ecuación de Euler-Lagrange: discutir que si sucede que el integrando $f(y, y', x)$ no depende explícitamente de x, esto es, $f = f(y, y')$, entonces

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''.$$

Usar la ecuación de Euler-Lagrange para sustituir $\partial f/\partial y$ en el segundo miembro, y mostrar por tanto que

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right).$$

Esto proporciona la integral primera

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const.} \tag{6.43}$$

Esto puede simplificar varios cálculos. (Ver los Problemas 6.21 y 6.22 como ejemplos). En mecánica lagrangiana, donde la variable independiente es el tiempo t, el resultado correspondiente es que si la función lagrangiana es independiente de t, entonces la energía se conserva. (Ver la Sección 7.8).

6.21 ⋆⋆ En el Ejemplo 6.2 (página 245) encontramos la braquistócrona mediante el intercambio de las variables x e y. He aquí un método que evita ese intercambio: escribir el tiempo como en la Ecuación (6.19) pero usando x como la variable de integración. El integrando debería tener la forma $f(y, y', x) = \sqrt{(y'^2 + 1)/y}$. Como ésta es independiente de x, se puede recurrir a la «integral primera » (6.43) del Problema 6.20. Mostrar que esta ecuación diferencial conduce a la misma integral para x que en la ecuación (6.23) y por tanto a la misma curva que antes.

6.22 ⋆⋆⋆ Se nos da una cuerda de longitud l con un extremo sujeto en el origen O, y vamos a colocar la cuerda en el plano xy con su otro extremo sobre el eje x de tal manera que abarque el área máxima entre la cuerda y el eje x. Mostrar que la forma requerida es un semicírculo. El área cubierta es por supuesto $\int y\, dx$, pero mostrar que se puede reescribir de la forma $\int_0^l f\, ds$, donde s denota la distancia medida a lo largo de la cuerda desde O, y donde $f = \sqrt{y(1 - y'^2)}$, e y' denota dy/ds. Como f no incluye la variable independiente s explícitamente, se puede aprovechar la «integral primera» (6.43) del Problema 6.20.

6.23 ⋆⋆⋆ Un avión cuya velocidad en aire es v_0 tiene que volar desde el pueblo O (en el origen) al pueblo P, que está a una distancia D hacia el Este. Hay una cizalladura del viento (*wind shear*) ligera y estable, tal que $\mathbf{v}_{\text{viento}} = Vy\,\hat{\mathbf{x}}$, donde x e y están medidas hacia el Este y hacia el Norte respectivamente. Hallar el camino, $y = y(x)$, que debería seguir el aeroplano para minimizar su tiempo de vuelo, como sigue: **(a)** Hallar la velocidad en tierra del avión en términos de v_0,V, ϕ (el ángulo por el que el avión se dirige al Norte desde el Este), y la posición del avión. **(b)** Escribir el tiempo de vuelo como una integral de la forma $\int_0^D f\, dx$. Mostrar que si suponemos que y' y ϕ permanecen ambos pequeños (como es ciertamente razonable si la velocidad del viento no es demasiado grande), entonces el integrando f toma la forma aproximada $f = (1 + \frac{1}{2}y'^2)/(1 + ky)$ (multiplicado por una constante poco interesante) donde $k = V/v_0$. **(c)** Escribir la ecuación de Euler-Lagrange que determina el mejor camino. Para resolverla, hacer la inteligente hipótesis de que $y(x) = \lambda x(D - x)$, que pasa claramente por los dos pueblos. Mostrar que cumple la ecuación de Euler–Lagrange, siempre y cuando $\lambda = (\sqrt{4 + 2k^2D^2} - 2)/(kD^2)$. ¿Cuánto viaja hacia el Norte por este camino el avión, si $D = 2000$ millas, $v_0 = 500$ mph, y la cizalladura del viento es $V = 0{,}5$ mph/mi? ¿Cuánto tiempo se ahorra el avión por seguir este camino? [Probablemente sea conveniente usar un ordenador para calcular esta integral].

6.24 ⋆⋆⋆ Considerar un medio en el que el índice de refracción n es inversamente proporcional a r^2; esto es, $n = a/r^2$, donde r es la distancia desde el origen. Usar el principio de Fermat, de que la integral (6.3) es estacionaria, para encontrar el camino de un rayo de luz que viaja en un plano que contiene al origen. [*Ayuda:* Usar coordenadas polares en dos dimensiones y escribir el camino como $\phi = \phi(r)$. El principio de Fermat debería tener la forma $\int f(\phi, \phi', r)\, dr$, donde $f(\phi, \phi', r)$ es realmente independiente de ϕ. La ecuación de Euler-Lagrange por lo tanto se reduce a $\partial f/\partial \phi' =$ constante. Ésta se puede resolver para ϕ' y entonces integrar para obtener ϕ como una función de r. Reescribir esta ecuación para obtener r como una función de ϕ y mostrar que el camino resultante es un círculo a través del origen. Discutir el avance de la luz alrededor del círculo].

6.25 ⋆⋆⋆ Considerar una sola vuelta de la cicloide (6.26) con un valor fijo de a, como el mostrado en la Figura 6.11. Un móvil se deja libre desde el reposo en un punto P_0 en cualquier lugar del raíl entre O y el punto más bajo P (es decir, P_0 tiene parámetro $0 < \theta_0 < \pi$). Mostrar que el tiempo

que tarda el móvil en rodar desde P_0 a P está dado por la integral

$$\text{tiempo}(P_0 \to P) = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0 - \cos\theta}}\, d\theta$$

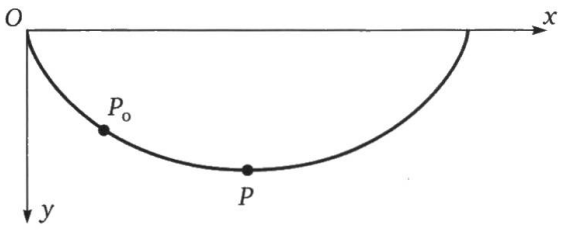


Figura 6.11. Problema 6.25.

y probar que este tiempo es igual a $\pi\sqrt{a/g}$. Como éste es *independiente de la posición de* P_0, el coche tarda el mismo tiempo en rodar desde P_0 a P, ya esté P_0 en O, o en cualquier lugar entre O y P, incluso infinitamente cerca de P. Explicar cualitativamente cómo es posible que sea cierto este sorprendente resultado. [*Ayuda:* Para hacer los cálculos hay que hacer algunos cambios astutos de variables. Una posibilidad es esta: escribir $\theta = \pi - 2\alpha$ y entonces usar las identidades trigonométricas relevantes para sustituir los cosenos de θ por senos de α. Y después sustituir $\operatorname{sen}\alpha = u$ y hacer la integral que queda].

Sección 6.4 Más de dos variables

6.26 ⋆⋆ Dar en detalle el argumento que conduce desde la propiedad estacionaria de la integral (6.30) a las dos ecuaciones de Euler-Lagrange (6.34).

6.27 ⋆⋆ Probar que el camino más corto entre dos puntos en tres dimensiones es una línea recta. Escribir el camino en la forma paramétrica

$$x = x(u), \qquad y = y(u) \qquad \text{y} \qquad z = z(u)$$

y después usar las tres ecuaciones de Euler-Lagrange que corresponden a (6.34).

CAPÍTULO 7

Ecuaciones de Lagrange

> El desarrollo teórico de las leyes del movimiento de los cuerpos es un problema de tal interés e importancia que ha atraído la atención de los más eminentes matemáticos desde la invención de la dinámica como una ciencia matemática por Galileo, y especialmente desde la maravillosa extensión que fue dada a esa ciencia por Newton. Entre los sucesores de aquellos hombres ilustres, Lagrange hizo quizá más que cualquier otro matemático para dar extensión y armonía a tales investigaciones deductivas, mostrando que las más variadas consecuencias concernientes a los movimientos de los sistemas de cuerpos se pueden obtener de una única fórmula radical; la belleza de esos métodos que arrojan tanta dignidad de sus resultados hace que su gran trabajo sea como un poema científico.
>
> —*William Rowan Hamilton, 1834*

Armados con las ideas del cálculo variacional, estamos preparados para establecer la versión de la mecánica publicada en 1788 por el astrónomo y matemático ítalo-francés Lagrange (1736-1813). La formulación lagrangiana tiene dos importantes ventajas sobre la anterior formulación newtoniana. En primer lugar, las ecuaciones de Lagrange, a diferencia de las de Newton, adoptan la misma forma para cualquier sistema de coordenadas. En segundo lugar, a la hora de tratar con sistemas forzados, como el de una cuenta de collar que se desliza por un alambre, el enfoque lagrangiano elimina las fuerzas externas (como la fuerza normal del alambre, que obliga a la cuenta a permanecer en él). Esto simplifica enormemente la mayoría de los problemas, ya que las fuerzas externas normalmente son desconocidas, y esta simplificación nos llega sin coste alguno ya que de todos modos no nos suelen interesar normalmente.

En la Sección 7.1 demuestro que las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la segunda ley de Newton para una partícula que se mueve libremente en tres dimen-

siones. La ampliación de este resultado a N partículas no ligadas es increíblemente sencilla, por lo que dejaré que cada uno proporcione los detalles (Problema 7.7). En las próximas secciones hablaré del más difícil, y también más interesante caso de los sistemas forzados. Comenzaré con algunos ejemplos sencillos y definiciones importantes (como los grados de libertad). Después, en la Sección 7.4, demostraré las ecuaciones de Lagrange para una partícula obligada a moverse sobre una superficie no necesariamente plana (dejando el caso general para el Problema 7.13). La Sección 7.5 muestra varios ejemplos, algunos de los cuales son, con diferencia, más fáciles de establecer en la formulación lagrangiana que en la newtoniana. En la Sección 7.6, introduzco la curiosa terminología de las «coordenadas ignorables». Por último, y tras algunas conclusiones en la Sección 7.7, el capítulo termina con tres secciones sobre temas, que aunque muy importantes, pueden omitirse en una primera lectura. En la Sección 7.8 hablo de cómo las fuerzas de la energía y el momento aparecen en la mecánica lagrangiana. La Sección 7.9 describe cómo pueden ampliarse las ecuaciones de Lagrange para que incluyan fuerzas magnéticas, y la Sección 7.10 es una introducción a los multiplicadores de Lagrange.

A lo largo de este capítulo, excepto en la Sección 7.9, hablo únicamente del caso en que todas las fuerzas no externas son conservativas, o al menos pueden asociarse a una función energía potencial. Esta restricción puede flexibilizarse, pero ya de por sí incluye la mayoría de las aplicaciones que pueden aparecer en la práctica.

7.1 Ecuaciones de Lagrange para el movimiento libre

Consideremos una partícula que se mueve libremente en tres dimensiones, sujeta a una fuerza neta conservativa $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Por supuesto, la energía cinética de la partícula es

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \tag{7.1}$$

y su energía potencial es

$$U = U(\mathbf{r}) = U(x, y, z). \tag{7.2}$$

La **función lagrangiana**, o simplemente **lagrangiano**, se define como

$$\mathcal{L} = T - U. \tag{7.3}$$

Fijémonos para empezar que el lagrangiano es la EC *menos* la EP. Y *no* se debe confundir con la energía total. Desde luego es lógico preguntar por qué la cantidad $T-U$ sería de algún interés. No parece haber una respuesta sencilla a esta pregunta, salvo que lo es, como veremos en seguida. Observe también que utilizo una letra $\mathcal{L}$ para

representar el lagrangiano[1] (para distinguirlo del momento angular **L** y una longitud L) y que $\mathcal{L}$ depende de la posición de la partícula (x, y, z) y de su velocidad $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$; esto es, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$.

Consideremos las dos derivadas,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x \tag{7.4}$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x. \tag{7.5}$$

Derivando la segunda ecuación respecto del tiempo y recordando la segunda ley de Newton, $F_x = \dot{p_x}$ (doy por sentado que nuestro sistema de coordenadas es inercial), vemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}. \tag{7.6}$$

De la misma manera podemos obtener las ecuaciones correspondientes para y y z. Por tanto, hemos demostrado que la segunda ley de Newton implica las tres *ecuaciones de Lagrange* (en coordenadas cartesianas hasta ahora):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}. \tag{7.7}$$

Se puede comprobar con facilidad que la anterior afirmación se cumple igualmente en sentido inverso, por lo que (al menos para una sola partícula en coordenadas cartesianas) la segunda ley de Newton es completamente equivalente a las tres ecuaciones de Lagrange (7.7). El camino recorrido por la partícula, que viene determinado por la segunda ley de Newton, es el mismo camino determinado ahora por las tres ecuaciones de Lagrange.

El siguiente paso que daremos es reconocer que las tres ecuaciones de (7.7) tienen exactamente la forma de las ecuaciones de Euler-Lagrange (6.40). Por tanto, implican que la integral $S = \int \mathcal{L}\, dt$ es estacionaria para el camino seguido por la partícula. Que esta integral, llamada acción, sea estacionaria para el camino de la partícula se llama principio de Hamilton[2] (por su inventor, el matemático irlandés, Hamilton, 1805-1865) y se puede volver a enunciar como sigue:

---

[1] Esta notación se complica en la teoría de campos donde el lagrangiano a menudo se escribe como L, y $\mathcal{L}$ se usa para la *densidad* lagrangiana, pero esto no será un problema para nosotros.

[2] Es importante no confundir con la desafortunada circunstancia de que el principio de Hamilton es un posible enunciado de la formulación lagrangiana de la mecánica clásica (en contraposición a la formulación hamiltoniana).

Principio de Hamilton

El camino real que sigue una partícula entre dos puntos 1 y 2 en un intervalo de tiempo dado, de t_1 a t_2, es tal que la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt \tag{7.8}$$

es estacionaria cuando se toma a lo largo del camino real.

Aunque hasta ahora hemos probado este principio sólo para un única partícula y en coordenadas cartesianas, vamos a ver que es válido para un enorme conjunto de sistemas mecánicos y para casi cualquier elección de coordenadas.

Hasta ahora hemos probado, para una única partícula, que los tres siguientes enunciados son exactamente equivalentes:

1. El camino de una partícula está determinado por la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.
2. El camino está determinado por las tres ecuaciones de Lagrange (7.7), al menos en coordenadas cartesianas.
3. El camino está determinado por el principio de Hamilton.

El principio de Hamilton ha encontrado generalizaciones en muchos campos fuera de la mecánica clásica (teorías de campos, por ejemplo) y ha dado unidad a varias y diversas áreas de la física. En el siglo veinte ha jugado un importante papel en la formulación de las teorías cuánticas. Sin embargo, para nuestros propósitos su mayor importancia es que nos permite probar que las ecuaciones de Lagrange se cumplen en cualquier sistema de coordenadas:

En lugar de coordenadas cartesianas $\mathbf{r} = (x, y, z)$, supongamos que queremos usar algunas otras coordenadas. Éstas podrían ser coordenadas polares esféricas (r, θ, ϕ), o polares cilíndricas (ρ, ϕ, z), o cualquier conjunto de «coordenadas generalizadas» q_1, q_2, q_3, con la propiedad de que cada posición $\mathbf{r}$ especifica un único valor de (q_1, q_2, q_3) y viceversa; esto es,

$$q_i = q_i(\mathbf{r}) \qquad \text{para } i = 1, 2 \text{ y } 3, \tag{7.9}$$

y

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3). \tag{7.10}$$

Estas dos ecuaciones garantizan que para cualquier valor de $\mathbf{r} = (x, y, z)$ existe una única terna (q_1, q_2, q_3) y viceversa. Usando (7.10) podemos reescribir (x, y, z) y

$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ en términos de (q_1, q_2, q_3) y $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$. Después, podemos reescribir el lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r})$ en términos de estas nuevas variables,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$$

y la acción como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)\, dt.$$

Ahora bien, el valor de la integral S no se ve alterado por este cambio de variables. Por lo tanto, el enunciado de que S es estacionaria para variaciones del camino alrededor del camino correcto debe ser todavía cierto en nuestro nuevo sistema de coordenadas, y, por los resultados del Capítulo 6, esto significa que el camino correcto debe satisfacer las tres ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3}, \tag{7.11}$$

con respecto a las nuevas coordenadas q_1, q_2 y q_3. Como estas nuevas coordenadas son *cualquier* conjunto de coordenadas generalizadas, la calificación «en coordenadas cartesianas» puede ser omitida del enunciado (2) de arriba. Este resultado (que las ecuaciones de Lagrange tienen la misma forma para cualquier elección de coordenadas generalizadas) es una de las dos razones principales por las que el formalismo lagrangiano es tan útil.

Hay un punto de nuestra deducción de las ecuaciones de Lagrange sobre el que merece la pena detenerse a reflexionar. Un paso crucial en nuestra prueba fue la observación de que (7.6) era equivalente a la segunda ley de Newton $F_x = \dot{p}_x$, la cual además es cierta sólo si el sistema original en el que escribimos $\mathcal{L} = T - U$ es inercial. Por consiguiente, aunque las ecuaciones de Lagrange son ciertas para cualquier elección de coordenadas generalizadas q_1, q_2, q_3 (y estas coordenadas generalizadas pueden de hecho ser las coordenadas de un sistema de referencia no inercial) debemos sin embargo prestar atención porque, cuando escribimos al principio el lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$, lo hacemos en un sistema inercial.

Las ecuaciones de Lagrange se generalizan fácilmente a sistemas de muchas partículas, pero comencemos mejor por un par de ejemplos sencillos.

Ejemplo 7.1 *Una partícula en dos dimensiones; coordenadas cartesianas*

Escribir las ecuaciones de Lagrange en coordenadas cartesianas para una partícula que se mueve en un campo de fuerzas conservativo en dos dimensiones y mostrar que implican la segunda ley de Newton. (Por supuesto, esto ya lo hemos probado, pero vale la pena verlo desarrollado explícitamente).

El lagrangiano para una única partícula en dos dimensiones es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = T - U = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y). \tag{7.12}$$

Para escribir las ecuaciones de Lagrange necesitamos las derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \tag{7.13}$$

con expresiones correspondientes para las derivadas de y. Por tanto, las dos ecuaciones de Lagrange se pueden reescribir como sigue:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &\iff F_x = m\ddot{x} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &\iff F_y = m\ddot{y} \end{aligned}\right\} \iff \mathbf{F} = m\mathbf{a}. \tag{7.14}$$

Observe que en (7.13) la derivada $\partial \mathcal{L}/\partial x$ es la componente x de la fuerza, y $\partial \mathcal{L}/\partial \dot{x}$ es la componente x del momento (y análogamente con las componentes y). Cuando usemos coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \ldots, q_n$, veremos que $\partial \mathcal{L}/\partial q_i$, aunque no necesariamente una componente de fuerza, juega un papel muy similar a una fuerza. Análogamente, $\partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}_i$, aunque no necesariamente una componente de momento, actúa de la misma manera que un momento. Por esta razón llamaremos a estas derivadas **fuerza generalizada** y **momento generalizado** respectivamente; esto es,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = (\text{componente } i\text{-ésima de la fuerza generalizada}) \tag{7.15}$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = (\text{componente } i\text{-ésima del momento generalizado}). \tag{7.16}$$

Con estas notaciones, cada una de las ecuaciones de Lagrange (7.11)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

toma la forma

$$(\text{fuerza generalizada}) = (\text{tasa de variación del momento generalizado}) \tag{7.17}$$

Ilustraré estas ideas en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.2 *Una partícula en dos dimensiones; coordenadas polares*

Encontrar las ecuaciones de Lagrange para el mismo sistema, una partícula que se mueve en dos dimensiones, usando coordenadas polares.

Como en todos los problemas en mecánica lagrangiana, nuestra primera tarea es escribir el lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$ en términos de las coordenadas elegidas. En este caso se nos dice que usemos coordenadas polares, como se esboza en la Figura 7.1. Esto significa que las componentes de la velocidad son $v_r = \dot{r}$ y $v_\phi = r\dot{\phi}$, y la energía cinética es $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$. Por lo tanto, el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = T - U = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - U(r, \phi). \tag{7.18}$$

Dado el lagrangiano, sólo tenemos ahora que escribir las dos ecuaciones de Lagrange, una en la que aparecen derivadas con respecto a r y la otra con derivadas con respecto a ϕ.

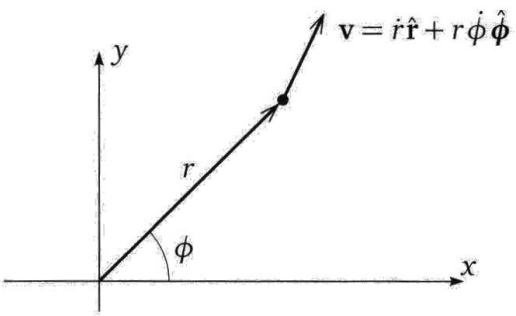


Figura 7.1. Velocidad de una partícula expresada en coordenadas polares en dos dimensiones.

La ecuación de r

La ecuación que incluye derivadas con respecto a r (la ecuación de r) es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}$$

o

$$mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r}. \tag{7.19}$$

Como $-\partial U/\partial r$ es justo F_r, la componente radial de $\mathbf{F}$, podemos reescribir la ecuación de r como

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2), \tag{7.20}$$

la cual se debería reconocer como $F_r = ma_r$, la componente r de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, deducida primero en la ecuación (1.48). (El término $-r\dot{\phi}^2$ es la famosa aceleración centrípeta). Es decir, cuando usamos coordenadas polares (r, ϕ), la ecuación de Lagrange

que corresponde a r es justo la componente radial de la segunda ley de Newton. (Advierta, sin embargo, que la derivación lagrangiana evitó el tedioso cálculo de las componentes de la aceleración). Como veremos directamente, la ecuación de ϕ funciona de forma algo diferente e ilustra un hecho reseñable del enfoque lagrangiano.

La ecuación de ϕ

La ecuación de Lagrange para la coordenada ϕ es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \tag{7.21}$$

o, sustituyendo $\mathcal{L}$ por (7.18),

$$-\frac{\partial U}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}). \tag{7.22}$$

Para interpretar esta ecuación, necesitamos relacionar el primer miembro con la componente apropiada de la fuerza $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$. Esto requiere conocer las componentes de $\boldsymbol{\nabla} U$ en coordenadas polares:

$$\boldsymbol{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{7.23}$$

(Si no recuerda esto, vea el Problema 7.5). La componente ϕ de la fuerza es justo el coeficiente de $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ en $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$, esto es,

$$F_\phi = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi}.$$

Por tanto el primer miembro de (7.22) es rF_ϕ, que es simplemente el *momento de fuerza* Γ sobre la partícula alrededor del origen. Mientras tanto, la cantidad $mr^2\dot{\phi}$ del segundo miembro se puede reconocer como el momento angular L alrededor del origen. Y entonces la ecuación ϕ (7.22) afirma que

$$\Gamma = \frac{dL}{dt}, \tag{7.24}$$

la condición familiar de mecánica elemental, que el momento de fuerza iguala a la tasa de variación del momento angular.

El resultado (7.24) ilustra un hecho maravilloso de las ecuaciones de Lagrange: cuando elegimos un sistema apropiado de coordenadas generalizadas, las correspondientes ecuaciones de Lagrange aparecen automáticamente en su forma natural

correspondiente. Cuando escogemos r y ϕ como coordenadas, la ecuación de ϕ resulta ser la ecuación para el momento angular. De hecho, la situación es todavía mejor. Recuerde que introduje la noción de fuerza generalizada y momento generalizado en (7.15) y (7.16). En el caso que nos ocupa, la componente ϕ para la fuerza generalizada es simplemente el momento de fuerza,

$$(\text{componente } \phi \text{ de la fuerza generalizada}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \Gamma \text{ (momento de fuerza)} \tag{7.25}$$

y la componente correspondiente para el momento generalizado es

$$(\text{componente } \phi \text{ del momento generalizado}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = L \text{ (momento angular)} \tag{7.26}$$

Gracias a la elección «natural» de las coordenadas (r y ϕ) las componentes ϕ para la fuerza y el momento generalizado resultan ser las cantidades correspondientes «naturales», es decir, el momento de fuerza y el momento angular.

Observe que la fuerza «generalizada» no necesariamente tiene dimensiones de fuerza, ni tampoco el momento «generalizado» de momento. En este caso, la fuerza generalizada (componente ϕ) es un momento de fuerza (esto es, fuerza × distancia) y el momento generalizado es un momento angular (momento × distancia).

Este ejemplo ilustra otra característica de las ecuaciones de Lagrange: la componente ϕ $\partial \mathcal{L}/\partial \phi$ de la fuerza generalizada resultó ser el momento de fuerza sobre la partícula. Si éste es cero, entonces el momento generalizado correspondiente $\partial \mathcal{L}/\partial \dot{\phi}$ (en este caso el momento angular) se conserva. Resulta obvio que este es un resultado general: la i-ésima componente de la fuerza generalizada es $\partial \mathcal{L}/\partial q_i$. Si esto resulta ser cero, entonces la ecuación de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

simplemente dice que la i-ésima componente $\partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}_i$ del momento generalizado es constante. Es decir, si $\mathcal{L}$ es independiente de q_i, la i-ésima componente de la fuerza generalizada es cero, y la componente correspondiente al momento generalizado se conserva. En la práctica, suele ser fácil detectar que un lagrangiano es independiente de una coordenada q_i, y si se detecta, entonces inmediatamente identificamos la ley de conservación correspondiente. Regresaremos a este punto en la Sección 7.8.

Varias partículas no ligadas

La extensión de estas ideas a un sistema de N partículas no ligadas (un gas de N moléculas, por ejemplo) es muy directa, y dejaré al lector completar los detalles (Problemas 7.6 y 7.7). Aquí simplemente esbozaré el argumento para el caso de dos

partículas, principalmente para mostrar la forma de las ecuaciones de Lagrange para $N > 1$. Para dos partículas, el lagrangiano está definido (exactamente como antes) como $\mathcal{L} = T - U$, pero esto ahora significa que

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) = \tfrac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \tag{7.27}$$

Como siempre, las fuerzas sobre las dos partículas son $\mathbf{F}_1 = -\boldsymbol{\nabla}_1 U$ y $\mathbf{F}_2 = -\boldsymbol{\nabla}_2 U$. La segunda ley de Newton se puede aplicar a cada partícula para obtener seis ecuaciones,

$$F_{1x} = \dot{p}_{1x}, \qquad F_{1y} = \dot{p}_{1y}, \qquad \ldots, \qquad F_{2z} = \dot{p}_{2z}.$$

Exactamente como en la ecuación (7.7), cada una de estas seis ecuaciones es equivalente a la ecuación de Lagrange correspondiente

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_2}. \tag{7.28}$$

Estas seis ecuaciones implican que la integral $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt$ es estacionaria. Finalmente, podemos cambiar a cualquier otro conjunto de seis coordenadas conveniente $q_1, q_2, \ldots, q_6$. La afirmación de que S es estacionaria debe ser también cierta en este nuevo sistema de coordenadas, y esto implica por tanto que las ecuaciones de Lagrange deben ser ciertas con respecto a las nuevas coordenadas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_6} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_6}. \tag{7.29}$$

Un ejemplo de un conjunto de seis de tales coordenadas generalizadas que usaremos repetidamente en el Capítulo 8 es este: en lugar de las seis coordenadas de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, podríamos usar las tres coordenadas de la posición del CM $\mathbf{R} = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2)$ y las tres coordenadas de la posición relativa $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Veremos que esta elección de coordenadas conduce a una simplificación drástica. Por ahora, el punto principal es simplemente que las ecuaciones de Lagrange son automáticamente ciertas en su forma estándar (7.29) con respecto a estas nuevas coordenadas generalizadas.

La extensión de estas ideas al caso de N partículas sin ligaduras es totalmente directa, y lo dejo como comprobación para el lector. (Vea el Problema 7.7). El resultado final es que hay $3N$ ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \qquad [i = 1, 2, \ldots, 3N],$$

válidas para cualquier elección de las $3N$ coordenadas $q_1, \ldots, q_{3N}$ necesaria para describir las N partículas.

7.2 Sistemas ligados; un ejemplo

Quizás la gran ventaja de la propuesta lagrangiana es que es capaz de manejar sistemas que están ligados de tal manera que no se pueden mover arbitrariamente en el espacio que ocupan. Un ejemplo conocido de sistema ligado es el de una cuenta de collar que está enhebrada en un alambre (la cuenta se puede mover por el alambre, pero no por ningún otro sitio). Otro ejemplo de sistemas muy ligados es un cuerpo rígido, cuyos átomos individuales se pueden mover de modo que la distancia entre dos átomos cualesquiera es fija. Antes de discutir la naturaleza de las ligaduras en general, discutiré otro ejemplo sencillo, el péndulo plano.

Consideremos el péndulo simple mostrado en la Figura 7.2. Una pesa de masa m está fija a una barra sin masa, que está anclada en O y es libre de oscilar sin rozamiento en el plano xy. La pesa se mueve en ambas direcciones, x e y, pero está obligada por la barra de modo que $\sqrt{x^2+y^2} = l$ permanece constante. En un sentido obvio, sólo una de las coordenadas es independiente (cuando x cambia, la variación de y está predeterminada por la ecuación de ligadura), y decimos que el sistema tiene un solo grado de libertad. Una manera de expresar esto sería eliminar una de las coordenadas, por ejemplo escribiendo $y = \sqrt{l^2 - x^2}$ y expresando todo en términos de una de las coordenadas, la x. Aunque esto es una manera perfectamente legítima de proceder, una manera más simple es expresar ambas x e y en términos de un único parámetro ϕ, el ángulo entre el péndulo y su posición de equilibrio, como se muestra en la Figura 7.2.

Podemos expresar todas las magnitudes de interés en términos de ϕ. La energía cinética es $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2$. La energía potencial es $U = mgh$ donde h denota la altura de la cuenta por encima de su posición de equilibrio y es (como se debería comprobar) $h = l(1-\cos\phi)$. Por tanto la energía potencial es $U = mgl(1-\cos\phi)$, y el lagrangiano es

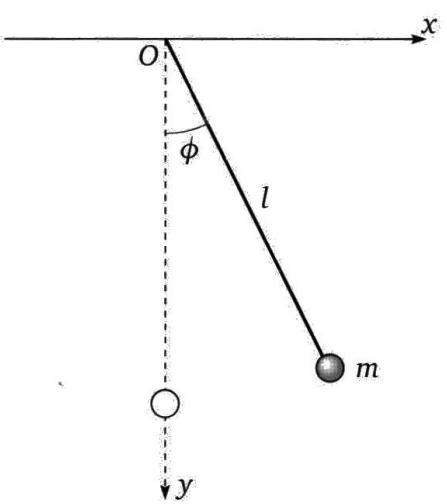


Figura 7.2. Un péndulo simple. La pesa de masa m está obligada por la barra a permanecer a una distancia l de O.

$$\mathcal{L} = T - U = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - mgl(1-\cos\phi). \tag{7.30}$$

En cualquiera de las maneras de proceder que elijamos —escribir todo en términos de x (o y) o ϕ— el lagrangiano está expresado en términos de una única coordenada generalizada q y su derivada temporal $\dot{q}$, en la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q})$. Ahora bien, es un hecho (el cual no probaré de momento) que una vez que el lagrangiano está escrito en términos de esta variable (para un sistema con un grado de libertad), la evolución del sistema otra vez cumple la ecuación de Lagrange (tal como probamos para una partícula libre en la sección anterior). Esto es,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}. \tag{7.31}$$

Si elegimos el ángulo ϕ como nuestra coordenada generalizada, entonces la ecuación de Lagrange se enuncia

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \tag{7.32}$$

El lagrangiano $\mathcal{L}$ está dado por (7.30), y las derivadas necesarias se evalúan fácilmente para dar

$$-mgl\,\mathrm{sen}\,\phi = \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\phi}) = ml^2\ddot{\phi}. \tag{7.33}$$

Observando la Figura 7.2 se puede ver que el primer miembro de esta ecuación es justo el momento de fuerza Γ ejercido por la gravedad sobre el péndulo, mientras que el término ml^2 es el momento de inercia del péndulo I. Como $\ddot{\phi}$ es la aceleración angular α, vemos que la ecuación de Lagrange para el péndulo simple reproduce sencillamente el resultado conocido $\Gamma = I\alpha$.

7.3 Sistemas ligados en general

Coordenadas generalizadas

Consideremos ahora un sistema arbitrario de N partículas, $\alpha = 1, \ldots, N$ con posiciones $\mathbf{r}_\alpha$. Decimos que los parámetros $q_1, \ldots, q_n$ son un conjunto de **coordenadas generalizadas** para el sistema si cada posición $\mathbf{r}_\alpha$ se puede expresar como una función de $q_1, \ldots, q_n$, y posiblemente del tiempo t,

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(q_1, \ldots, q_n, t) \qquad [\alpha = 1, \ldots, N], \tag{7.34}$$

y al revés, cada q_i se puede expresar en términos de las $\mathbf{r}_\alpha$ y posiblemente de t,

$$q_i = q_i(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) \qquad [i = 1, \ldots, n]. \tag{7.35}$$

Además, necesitamos que el número de coordenadas generalizadas (n) sea el más pequeño que permita parametrizar el sistema de esta manera. En nuestro mundo tridimensional, el número n de coordenadas generalizadas para N partículas es ciertamente no mayor que $3N$, y para un sistema ligado es normalmente menor (a veces de manera drástica). Por ejemplo, para un cuerpo rígido, el número de partículas N puede ser del orden de 10^{23}, mientras que el número de coordenadas generalizadas n es 6 (tres coordenadas para describir la posición del centro de masa y tres para dar la orientación del cuerpo).

Para ilustrar la relación (7.34), consideremos de nuevo el péndulo simple de la Figura 7.2. Hay una partícula (la pesa) y dos coordenadas cartesianas (porque el péndulo está restringido a dos dimensiones). Como vimos, hay sólo una coordenada generalizada, que tomamos que fuera el ángulo ϕ. El análogo de (7.34) es

$$\mathbf{r} \equiv (x, y) = (l \operatorname{sen} \phi, l \cos \phi) \tag{7.36}$$

y expresa las dos coordenadas cartesianas x e y en términos de la única coordenada generalizada ϕ.

El péndulo doble mostrado en la Figura 7.3 tiene dos pesas, ambas confinadas en un plano, así que tiene cuatro coordenadas cartesianas, todas las cuales pueden expresarse en términos de las dos coordenadas generalizadas ϕ_1 y ϕ_2. Específicamente, si colocamos el origen en el punto de suspensión del péndulo de arriba,

$$\mathbf{r}_1 = (l_1 \operatorname{sen} \phi_1, l_1 \cos \phi_1) = \mathbf{r}_1(\phi_1) \tag{7.37}$$

y

$$\mathbf{r}_2 = (l_1 \operatorname{sen} \phi_1 + l_2 \operatorname{sen} \phi_2, l_1 \cos \phi_1 + l_2 \cos \phi_2) = \mathbf{r}_2(\phi_1, \phi_2). \tag{7.38}$$

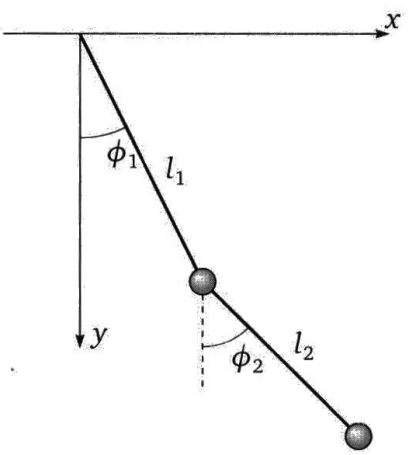


Figura 7.3. Las posiciones de ambas masas en un péndulo doble están especificadas de manera única por las dos coordenadas generalizadas ϕ_1 y ϕ_2, que pueden ellas mismas ser variadas independientemente.

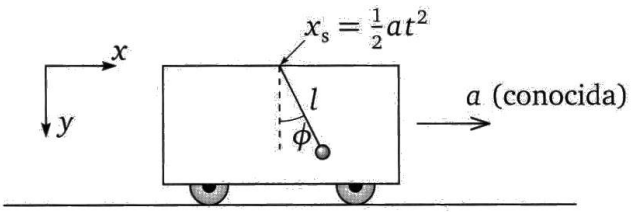


Figura 7.4. Un péndulo está suspendido del techo de un vagón de tren que está siendo forzado a acelerarse con una aceleración fija conocida a.

Advierta que las componentes de $\mathbf{r_2}$ dependen de ϕ_1 y ϕ_2.

En estos dos ejemplos, la transformación entre las coordenadas cartesianas y las generalizadas no dependía del tiempo t, pero es fácil pensar en ejemplos en los que sí lo hace. Consideremos el vagón de tren mostrado en la Figura 7.4, que tiene un péndulo suspendido de su techo y está siendo forzado[3] a acelerarse con una aceleración fija a. Es natural especificar la posición del péndulo mediante el ángulo ϕ como siempre, pero debemos reconocer que, en primera instancia, esto da la posición del péndulo relativa al sistema de referencia del vagón que se acelera, y por tanto es no inercial. Si deseamos especificar la posición de la pesa relativa a un sistema inercial, podemos elegir un sistema fijo relativo al suelo, y podemos expresar fácilmente la posición relativa a este sistema inercial en términos del ángulo ϕ. La posición del punto de suspensión relativa al suelo es (si elegimos los ejes y el origen convenientemente) justo $x_s = \frac{1}{2}at^2$, y la posición de la pesa se ve fácilmente que es

$$\mathbf{r} \equiv (x, y) = (l \operatorname{sen}\phi + \tfrac{1}{2}at^2, l\cos\phi) = \mathbf{r}(\phi, t). \tag{7.39}$$

La relación entre $\mathbf{r}$ y la coordenada generalizada ϕ depende del tiempo t, una posibilidad que había permitido cuando escribí (7.34).

A veces describiremos un conjunto de coordenadas $q_1, \ldots, q_n$ como **naturales** si la relación (7.34) entre las coordenadas cartesianas $\mathbf{r}_\alpha$ y las coordenadas generalizadas *no* incluye el tiempo t. Veremos ciertas propiedades convenientes de las coordenadas naturales que generalmente no se aplican a coordenadas para las cuales (7.34) *sí* incluye el tiempo. Afortunadamente, y como su propio nombre indica, existen muchos problemas para los que la elección más conveniente de coordenadas también *es* la natural.[4]

---

[3] La palabra «forzado» se usa muchas veces para describir un movimiento impuesto por algún agente externo y no se ve afectado por los movimientos internos del sistema. En el presente ejemplo, la aceleración «forzada» del vagón se supone que es la misma sean cuales sean las oscilaciones del péndulo.

[4] Las coordenadas naturales a veces se denominan *esclerónomas*, y las que no son naturales, *reónomas*. No utilizaré estos nombres tan fáciles de olvidar. Las coordenadas no naturales a veces también se denominan *ligadas*, porque una dependencia del tiempo en la relación (7.34)

Grados de libertad

El número de grados de libertad de un sistema es el número de coordenadas que pueden variar de manera independiente en un pequeño desplazamiento, es decir, el número de «direcciones» independientes en el que se puede mover un sistema a partir de cualquier configuración inicial. Por ejemplo, el péndulo simple en la Figura 7.2 sólo tiene un grado de libertad, mientras que el péndulo doble en la Figura 7.3 tiene dos. Cualquier partícula con libertad para moverse en las tres dimensiones tiene tres grados de libertad, mientras que un gas compuesto por N partículas tiene $3N$.

Cuando el número de grados de libertad para un sistema de N partículas en tres dimensiones es menor que $3N$, decimos que el sistema está *ligado*. (En dos dimensiones, el número correspondiente es, por supuesto, $2N$). La punta de un péndulo sencillo, con un grado de libertad, se encuentra ligada. Las dos masas de un péndulo doble, con dos grados de libertad, se encuentran ligadas. Los N átomos de un cuerpo rígido sólo tienen seis grados de libertad y también se encuentran ligados. Otros ejemplos son una cuenta obligada a deslizarse por un alambre fijo y una partícula obligada a moverse sobre una superficie fija en tres dimensiones.

En todos los ejemplos que he proporcionado hasta el momento, el número de grados de libertad equivalen al número de coordenadas generalizadas necesarias para describir la configuración del sistema. (El péndulo doble tiene dos grados de libertad y necesita dos coordenadas generalizadas, etc.). Un sistema con esta propiedad, aparentemente natural se dice que es **holónomo**.[5] Es decir, un sistema holónomo tiene n grados de libertad y puede describirse mediante n coordenadas generalizadas, $q_1, \ldots, q_n$. Los sistemas holónomos son más fáciles de tratar que los no holónomos, y en este libro me limitaré a sistemas holónomos.

Quizá se esté imaginando que todos los sistemas serían holónomos, o al menos que los no holónomos serían raros y singularmente complicados. De hecho, existen algunos ejemplos bastante sencillos de sistemas no holónomos. Consideremos, por ejemplo, una pelota de goma dura que es libre de rodar (pero no de deslizar ni girar alrededor de un eje vertical) sobre una mesa horizontal. Comenzando en cualquier posición (x, y) puede moverse en sólo dos direcciones independientes. Por lo tanto, la pelota tiene dos grados de libertad, y se puede muy bien imaginar que su configuración estaría unívocamente especificada por las dos coordenadas, x e y, de su centro. Pero observemos lo siguiente: coloquemos la pelota en el origen O y hagamos una marca en su punto más alto. Ahora, llevemos a cabo los siguientes tres movimientos. (Vea la Figura 7.5). Rodamos la pelota a lo largo del eje x una distancia igual a la circunferencia c, hasta el punto P, donde la marca estará otra vez en la

---

normalmente se asocia a un movimiento forzado, como la aceleración forzada del coche en la Figura 7.4.

[5] Se pueden encontrar muchas definiciones diferentes para «holónomo», pero no todas son exactamente equivalentes.

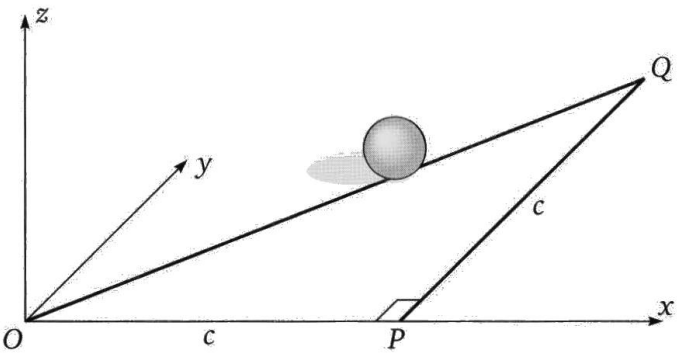


Figura 7.5. El triángulo recto OPQ está sobre el plano xy con lados OP y PQ de longitud c. Si rodamos una pelota de circunferencia c alrededor de OPQ, volverá a su punto de partida con una orientación cambiada.

parte de arriba. Ahora rodémosla la misma distancia c en la dirección y hasta Q, donde la marca está de nuevo arriba. Finalmente la rodamos directamente hacia atrás hasta el origen a lo largo de la hipotenusa del triángulo OPQ. Como este último movimiento tiene una longitud de $\sqrt{2}c$, lleva a pelota hasta su punto de partida, pero la marca ya no está en la parte de arriba. La posición (x, y) ha vuelto a su valor inicial, pero la pelota ahora tiene una orientación diferente. Evidentemente las dos coordenadas (x, y) no son suficientes para especificar una única configuración. De hecho, se necesitan tres números más para especificar la orientación de la pelota, y necesitamos cinco coordenadas en total para especificar la configuración completamente. La pelota tiene dos grados de libertad pero necesita cinco coordenadas generalizadas. Evidentemente esto es un sistema no holónomo.

Aunque los sistemas no holónomos ciertamente existen, son más complicados de analizar que los holónomos, y no discutiré nada más sobre ellos. Para cualquier sistema holónomo con coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$ y energía potencial $U(q_1, \ldots, q_n, t)$ (que puede depender del tiempo t como se describe en la Sección 4.5), la evolución en el tiempo está determinada por las n ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad [i = 1, \ldots, n], \tag{7.40}$$

donde el lagrangiano $\mathcal{L}$ está definido como siempre: $\mathcal{L} = T - U$. Demostraré este resultado en la Sección 7.4.

7.4 Prueba de las ecuaciones de Lagrange con ligaduras

Estamos ya preparados para probar las ecuaciones de Lagrange para cualquier sistema holónomo. Para mantener las cosas razonablemente sencillas, trataré explíci-

tamente el caso en el que sólo hay una partícula. (La generalización a un número arbitrario de partículas es bastante automática (vea el Problema 7.13). Para fijar ideas, supondré que la partícula está obligada a moverse sobre una superficie.[6] Esto significa que tiene dos grados de libertad y puede ser descrita mediante dos coordenadas generalizadas q_1 y q_2 que pueden variar independientemente.

Debemos reconocer que existen dos clases de fuerzas sobre la partícula (o partículas, en el caso general). Primero, hay fuerzas de ligadura: para una cuenta enhebrada en un alambre la fuerza de ligadura es la fuerza normal del alambre sobre la cuenta; para nuestra partícula, obligada a moverse sobre una superficie, es la fuerza normal a la superficie. Para los átomos de un cuerpo rígido, las fuerzas de ligadura son las fuerzas interatómicas que sujetan los átomos en su lugar dentro del cuerpo. En general, las fuerzas de ligadura no son necesariamente conservativas, pero esto no importa. Uno de los objetivos del enfoque lagrangiano es encontrar ecuaciones que no incluyan las fuerzas de ligadura, que de todos modos no nos interesan. Denotaré la fuerza de ligadura neta sobre la partícula por $\mathbf{F}_{\text{lig}}$, que en nuestro caso es exactamente la fuerza normal sobre la superficie a la que está confinada la partícula. (Observe, sin embargo, que si las fuerzas de ligadura son no conservativas, las ecuaciones de Lagrange en la forma simple no ligada de la Sección 7.1 ciertamente *no* aplican).

Segundo, están todas las otras fuerzas que no son de ligadura sobre la partícula, como la gravedad. Éstas son las fuerzas en las que normalmente estamos interesados en la práctica, y denotaré su resultante por $\mathbf{F}$. Supondré que todas las fuerzas que no son de ligadura satisfacen al menos la segunda condición para ser conservativas, con lo que se pueden obtener a partir de una energía potencial, $U(\mathbf{r}, t)$, y

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}, t). \tag{7.41}$$

(Si todas las fuerzas que no son de ligadura son realmente conservativas, entonces U es independiente de t, pero no necesitamos suponer esto). La fuerza total sobre nuestra partícula es $\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{F}_{\text{lig}} + \mathbf{F}$.

Finalmente, definiré el lagrangiano, como siempre, como

$$\mathcal{L} = T - U. \tag{7.42}$$

Como U es la energía potencial sólo para las fuerzas que no son de ligadura, esta definición de $\mathcal{L}$ excluye las fuerzas de ligadura. Esto refleja correctamente que las ecuaciones de Lagrange para un sistema ligado eliminan ingeniosamente las fuerzas de ligadura, como veremos.

---

[6] Realmente, es un poco difícil imaginar cómo confinar a una partícula en una única superficie para que no pueda saltar fuera. Si esto es algo que preocupa al lector, se puede imaginar a la partícula en medio de dos superficies paralelas con el espacio suficiente entre ellas para permitir su deslizamiento libremente.

La acción es estacionaria en el camino correcto

Consideremos dos puntos cualesquiera $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ por los cuales pasa la partícula en los instantes t_1 y t_2. Denotaré por $\mathbf{r}(t)$ el camino «correcto», el camino real que sigue nuestra partícula entre los dos puntos, y por $\mathbf{R}(t)$ cualquier camino vecino «erróneo» entre los dos mismos puntos. Es conveniente escribir

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\epsilon}(t), \tag{7.43}$$

que define $\boldsymbol{\epsilon}(t)$ como el vector infinitesimal que apunta desde $\mathbf{r}(t)$ en el camino correcto hasta el punto correspondiente $\mathbf{R}(t)$ en el camino erróneo. Como supondré que ambos puntos $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{R}(t)$ están en la superficie en la que está confinada la partícula, el vector $\boldsymbol{\epsilon}(t)$ está contenido en la misma superficie. Como ambos $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{R}(t)$ pasan a través de los mismos puntos finales, $\boldsymbol{\epsilon}(t) = 0$ en t_1 y t_2.

Llamemos S a la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, t)\, dt, \tag{7.44}$$

tomada a lo largo de cualquier camino $\mathbf{R}(t)$ que esté en la superficie de ligadura, y sea S_0 la integral correspondiente tomada a lo largo del camino correcto $\mathbf{r}(t)$. Como demostraré en seguida, la integral S es estacionaria para variaciones del camino $\mathbf{R}(t)$, cuando $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(t)$ o, de manera equivalente, cuando la diferencia $\boldsymbol{\epsilon}$ es cero. Otra manera de decir esto es que la diferencia de las integrales de acción

$$\delta S = S - S_0 \tag{7.45}$$

es cero a primer orden en la distancia $\boldsymbol{\epsilon}$ entre los caminos, y esto es lo que probaré.

La diferencia (7.45) es la integral de la diferencia entre los lagrangianos sobre los dos caminos,

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t). \tag{7.46}$$

Si sustituimos $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\epsilon}(t)$ y

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = T - U = \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}, t),$$

esto se convierte en[7]

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \tfrac{1}{2}m\left[(\dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}})^2 - \dot{\mathbf{r}}^2\right] - [U(\mathbf{r} + \boldsymbol{\epsilon}, t) - U(\mathbf{r}, t)] \\ &= m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\nabla} U + O(\epsilon^2),\end{aligned}$$

[7] Para entender el segundo término de la segunda línea, recuerde que $f(\mathbf{r}+\boldsymbol{\epsilon}) - f(\mathbf{r}) \approx \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\nabla} f$, para cualquier función escalar $f(\mathbf{r})$. Vea la Sección 4.3.

donde $O(\epsilon^2)$ denota términos que incluyen cuadrados y potencias mayores que ϵ y $\dot{\epsilon}$. Volviendo a la diferencia (7.45) en las dos integrales de acción, encontramos que, a primer orden en ϵ,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} [m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\nabla} U]\, dt. \tag{7.47}$$

El primer término en la integral final se puede integrar por partes. (Recuerde que esto sólo significa mover la derivada temporal de un factor al otro y cambiar el signo). La diferencia $\boldsymbol{\epsilon}$ es cero en los dos puntos finales, así que la contribución del punto final es cero, y obtenemos

$$\delta S = -\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot [m\ddot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\nabla} U]\, dt. \tag{7.48}$$

Ahora, el camino $\mathbf{r}(t)$ es el camino «correcto» y satisface la segunda ley de Newton. Por lo tanto el término $m\ddot{\mathbf{r}}$ es justo la fuerza total sobre la partícula, $\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{F}_{\text{lig}} + \mathbf{F}$. Mientras tanto $\boldsymbol{\nabla} U = -\mathbf{F}$. Por consiguiente, el segundo término de (7.48) se cancela con la segunda parte del primero, y nos quedamos con

$$\delta S = -\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{F}_{\text{lig}}\, dt. \tag{7.49}$$

Pero la fuerza de ligadura $\mathbf{F}_{\text{lig}}$ es normal a la superficie sobre la que se mueve la partícula, mientras que $\boldsymbol{\epsilon}$ está en la superficie. Entonces $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{F}_{\text{lig}} = 0$, y hemos probado que $\delta S = 0$. Esto es, la acción es estacionaria en el camino correcto, como se requería.[8]

La prueba final

Hemos demostrado el principio de Hamilton: que la acción es estacionaria en el camino por donde va la partícula. Sin embargo, lo hemos demostrado, *no* para variaciones arbitrarias del camino, sino para aquellas variaciones del camino que son *coherentes con las ligaduras*, esto es, caminos que están en la superficie a la cual nuestra partícula está ligada. Esto significa que no podemos demostrar las ecuaciones de

[8] La observación de que el integrando en (7.49) es cero es realmente el paso crucial en nuestra prueba. Cuando considere la generalización de la prueba a un sistema ligado arbitrario (por ejemplo si hace el Problema 7.13), verá que hay un paso correspondiente y que el término correspondiente es cero, por la misma razón: las fuerzas de ligadura no realizarían trabajo en un desplazamiento que es coherente con las ligaduras. De hecho esta es una posible definición de fuerza de ligadura.

Lagrange con respecto a las tres coordenadas cartesianas. Por otro lado, *sí* podemos probarlas con respecto a las coordenadas generalizadas apropiadas. Estamos suponiendo que nuestra partícula se encuentra limitada, mediante ligaduras holónomas, a moverse sobre una superficie, es decir, un subconjunto bidimensional del mundo tridimensional real. Esto significa que la partícula tiene dos grados de libertad y puede describirse con dos coordenadas generalizadas, q_1 y q_2, que pueden variar de manera independiente. *Cualquier* variación de q_1 y q_2 es coherente con las ligaduras.[9] En consecuencia, podemos reescribir la acción en términos de q_1 y q_2 como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t)\, dt, \tag{7.50}$$

y esta integral es estacionaria para *cualquier* variación de q_1 y q_2 sobre el camino correcto $[q_1(t), q_2(t)]$. Por lo tanto, según el argumento del Capítulo 6 el camino correcto debe satisfacer las dos ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}. \tag{7.51}$$

La prueba que he dado aquí es sólo para una única partícula en tres dimensiones, obligada a moverse por una superficie bidimensional, pero las ideas principales del caso general están presentes. La generalización, en gran parte, es bastante sencilla (vea el Problema 7.13), y mientras tanto espero haber dicho lo necesario para convencer de la verdad del resultado general: para cualquier sistema holónomo, con n grados de libertad y n coordenadas generalizadas, y las fuerzas que no son de ligadura derivables de una energía potencial $U(q_1, \ldots, q_n, t)$, el camino que sigue el sistema viene determinado por las n ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad [i = 1, \ldots, n], \tag{7.52}$$

donde $\mathcal{L}$ es el lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$ y $U = U(q_1, \ldots, q_n, t)$ es la energía potencial total correspondiente a todas las fuerzas excepto las que no son de ligadura.

Para nuestra demostración de las ecuaciones de Lagrange ha sido esencial que las fuerzas que no son de ligadura sean conservativas (o al menos que cumplan la segunda condición para serlo) a fin de que se puedan obtener a partir de una ener-

[9] Por ejemplo, si nuestra superficie fuera una esfera centrada en el origen, entonces las coordenadas generalizadas q_1, q_2 podrían ser los dos ángulos θ, ϕ de coordenadas esféricas. Cualquier variación de θ y ϕ es coherente con la ligadura que confina la partícula a la esfera.

gía potencial, $\mathbf{F} = -\nabla U$. Si esto no resulta cierto, entonces quizá las ecuaciones de Lagrange no sirvan, al menos en la forma (7.52). Un ejemplo evidente de una fuerza que no satisface esta condición es el rozamiento por deslizamiento, ya que no puede considerarse como una fuerza de ligadura (no es normal a la superficie) y no puede derivarse de una energía potencial. Por lo tanto, cuando el rozamiento por deslizamiento está presente, las ecuaciones de Lagrange en la forma (7.52) no sirven. Las ecuaciones de Lagrange pueden modificarse para incluir fuerzas como el rozamiento (vea el Problema 7.12), pero el resultado es complicado, así que me limitaré a las situaciones en que las ecuaciones (7.52) sí sirven.

7.5 Ejemplos de ecuaciones de Lagrange

En esta sección presento cinco ejemplos del uso de las ecuaciones de Lagrange. Los dos primeros son tan sencillos que pueden resolverse con facilidad usando el formalismo newtoniano. La razón principal de incluirlos ha sido la de adquirir experiencia en el uso del método lagrangiano. No obstante, incluso estos sencillos casos muestran algunas de las ventajas del formalismo lagrangiano frente al newtoniano; en especial veremos cómo el primero obvia cualquier necesidad de tener en cuenta las fuerzas de ligadura. Los últimos tres ejemplos son lo suficientemente complicados para que su resolución mediante el enfoque newtoniano requiera bastante ingenio; por el contrario, el enfoque lagrangiano nos permite escribir las ecuaciones de movimiento casi sin pensar.

Estos ejemplos ilustran un punto importante a reconocer en las ecuaciones de Lagrange: el formalismo lagrangiano proporciona siempre (o casi siempre) un medio muy simple para escribir las ecuaciones de movimiento. Por otra parte, no garantiza que las ecuaciones resultantes sean fáciles de resolver. Si tenemos mucha suerte, las ecuaciones de movimiento pueden tener una solución analítica, pero incluso cuando no la tienen, son el primer paso crucial para entender las soluciones y a menudo sugieren un punto de partida para una solución aproximada. Las ecuaciones de movimiento pueden dar respuestas sencillas a determinadas preguntas secundarias. (Por ejemplo, en cuanto tenemos las ecuaciones de movimiento, podemos encontrar con relativa sencillez las posiciones de equilibrio de un sistema). Y siempre *podremos* resolver las ecuaciones de movimiento de manera numérica, dadas las condiciones iniciales.

El método lagrangiano es tan importante que desde luego merece algo más que cinco ejemplos. Sin embargo, lo realmente importante es que *cada uno* resuelva varios ejemplos por sí mismo; por esta razón he planteado muchos problemas al final del capítulo y es muy importante intentar resolver algunos en cuanto se acabe la lectura de esta sección.

Ejemplo 7.3 *La máquina de Atwood*

Consideremos la máquina de Atwood que vimos en la Figura 4.15 y después en la Figura 7.6, en la que dos masas, m_1 y m_2, están suspendidas de un hilo inextensible (de longitud l) que a su vez pasa por una polea sin masa, con rodamientos sin rozamiento y de radio R. Escribir el lagrangiano $\mathcal{L}$, usando la distancia x como coordenada generalizada, encontrar la ecuación lagrangiana del movimiento y resolverla para la aceleración $\ddot{x}$. Comparar los resultados con la solución newtoniana.

Debido a que la cuerda tiene una longitud fija, las alturas x e y de las dos masas no pueden variar independientemente. En lugar de ello, $x + y + \pi R = l$, la longitud de la cuerda, así que y se puede expresar en términos de x como

$$y = -x + \text{const.} \tag{7.53}$$

Por lo tanto, podemos usar x como nuestra coordenada generalizada. De (7.53) vemos que $\dot{y} = -\dot{x}$, de forma que la energía cinética del sistema es

$$T = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{y}^2 = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2,$$

mientras que la energía potencial es

$$U = -m_1 g x - m_2 g y = -(m_1 - m_2)g x + \text{const.}$$

Combinándolas, encontramos el lagrangiano

$$\mathcal{L} = T - U = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)g x, \tag{7.54}$$

donde he omitido una constante sin interés.

La ecuación de movimiento de Lagrange es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$$

o, sustituyendo $\mathcal{L}$ por (7.54),

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)\ddot{x}, \tag{7.55}$$

la cual podemos resolver en seguida para obtener la ansiada aceleración

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g. \tag{7.56}$$

Al escoger m_1 y m_2 bastante cercanos el uno del otro, podemos hacer que la aceleración sea mucho menor que g, y por consiguiente mucho más fácil de medir.

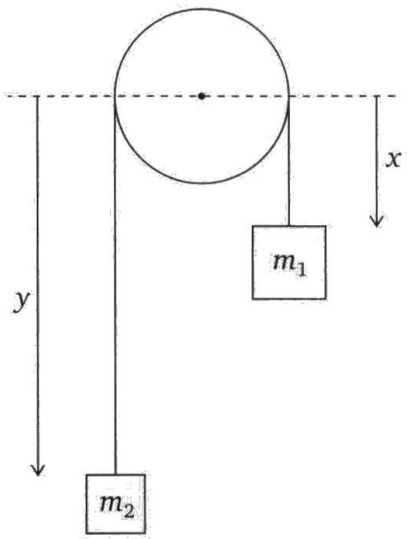


Figura 7.6. Una máquina de Atwood compuesta por dos masas, m_1 y m_2, suspendidas de un hilo inextensible y sin masa que pasa sobre la polea de radio R que tampoco tiene masa ni rozamiento. Como la longitud del hilo es fija, la posición de todo el sistema puede especificarse por una única variable, que puede ser la distancia x.

Por lo tanto, la máquina de Atwood proporcionó un primer método razonablemente preciso para medir g.

La correspondiente solución newtoniana nos obliga a escribir la segunda ley de Newton para cada una de las masas por separado. La fuerza neta sobre m_1 es $m_1 g - F_t$ donde F_t es la tensión en el hilo. (Esta es la fuerza de ligadura que no hacía falta considerar en la solución lagrangiana). Por consiguiente, la segunda ley de Newton para m_1 es

$$m_1 g - F_t = m_1 \ddot{x}.$$

De la misma manera, la segunda ley de Newton para m_2 dice

$$F_t - m_2 g = m_2 \ddot{x}.$$

(Recuerde que la aceleración hacia arriba de m_2 es la misma que la aceleración hacia *abajo* de m_1). Vemos que el método newtoniano ha producido dos ecuaciones para dos incógnitas, la aceleración requerida $\ddot{x}$ y la fuerza de ligadura F_t. Sumando estas dos ecuaciones podemos eliminar F_t y llegar precisamente a la ecuación (7.55) del método lagrangiano y por ello al mismo valor (7.56) para $\ddot{x}$.

La solución newtoniana de la máquina de Atwood es demasiado sencilla como para esperar una solución alternativa. No obstante, este sencillo ejemplo sí ilustra cómo el enfoque lagrangiano nos permite ignorar la desconocida (y generalmente poco interesante) fuerza de ligadura y eliminar al menos un paso para la solución newtoniana.

Ejemplo 7.4 *Una partícula obligada a moverse sobre un cilindro*

Consideremos una partícula de masa m obligada a moverse por un cilindro sin rozamiento, de radio R, dado por la ecuación $\rho = R$ en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z), como se muestra en Figura 7.7. Además de la fuerza de ligadura (la fuerza normal al cilindro), la única fuerza que actúa sobre la masa es una fuerza $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ dirigida hacia el origen. (Esta es la versión tridimensional de la ley de la fuerza de Hooke). Usando z y ϕ como coordenadas generalizadas, encontrar el lagrangiano $\mathcal{L}$. Escribir y resolver las ecuaciones de Lagrange y describir el movimiento.

Como la coordenada de la partícula ρ está fija en $\rho = R$, podemos especificar su posición sólo con z y ϕ, y como estas dos coordenadas pueden variar independientemente, el sistema tiene dos grados de libertad y podemos usar (z, ϕ) como coordenadas generalizadas. La velocidad tiene $v_\rho = 0$, $v_\phi = R\dot{\phi}$ y $v_z = \dot{z}$. Por tanto la energía cinética es

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2).$$

La energía potencial para la fuerza $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ es (Problema 7.25) $U = \frac{1}{2}kr^2$, donde r es la distancia desde el origen hasta la partícula, dada por $r^2 = R^2 + z^2$ (vea la Figura 7.7). Por tanto

$$U = \tfrac{1}{2}k(R^2 + z^2),$$

y el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - \tfrac{1}{2}k(R^2 + z^2). \tag{7.57}$$

Como el sistema tiene dos grados de libertad, existen dos ecuaciones de movimiento. La ecuación z es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \qquad \text{o} \qquad -kz = m\ddot{z}. \tag{7.58}$$

La ecuación ϕ es incluso más sencilla. Como $\mathcal{L}$ no depende de ϕ, entonces $\partial\mathcal{L}/\partial\phi = 0$ y la ecuación ϕ es sólo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \qquad \text{o} \qquad 0 = \frac{d}{dt}mR^2\dot{\phi}. \tag{7.59}$$

La ecuación de z (7.58) nos dice que la masa realiza un movimiento armónico simple en la dirección z, con $z = A\cos(\omega t - \delta)$. La ecuación ϕ (7.59) nos dice que la cantidad $mR^2\dot{\phi}$ es constante, esto es, que el momento angular alrededor del eje z se conserva, resultado que podíamos haber anticipado ya que en esta dirección no hay ningún momento de fuerza. Al ser ρ fijo, esto implica que $\dot{\phi}$ es constante, y la masa se mueve

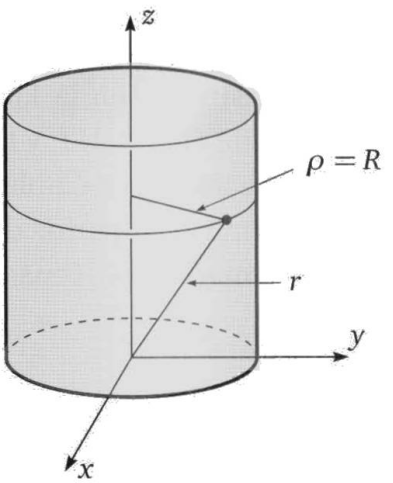


Figura 7.7. Una masa m está obligada a moverse por la superficie de un cilindro $\rho = R$ y está sometida a una fuerza $\mathbf{F} = -kr$ que obedece la ley de Hooke.

alrededor del cilindro con velocidad angular constante $\dot{\phi}$, al tiempo que se mueve arriba y abajo en la dirección z con movimiento armónico simple.

Estos dos ejemplos muestran los pasos a seguir a la hora de resolver cualquier problema mediante el método lagrangiano (siempre y cuando todas las ligaduras sean holónomas y las fuerzas sin ligaduras sean derivables de una energía potencial, como estamos suponiendo):

1. Escribir las energías potenciales y cinéticas y por consiguiente el lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$, usando un sistema inercial de referencia adecuado.
2. Escoger n coordenadas generalizadas adecuadas $q_1, \ldots, q_n$ y encontrar expresiones para las coordenadas originales del paso 1, en términos de las coordenadas generalizadas escogidas. (Los pasos 1 y 2 pueden realizarse indistintamente en cualquier orden).
3. Reescribir $\mathcal{L}$ en términos de $q_1, \ldots, q_n$ y $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$.
4. Escribir las n ecuaciones de Lagrange (7.52).

Como veremos, estos cuatro pasos proporcionan una ruta casi infalible hacia las ecuaciones de movimiento de cualquier sistema, por complicadas que sean. Que las ecuaciones resultantes puedan resolverse con facilidad es otro tema, pero incluso cuando no se pueden resolver, el hecho de tenerlas es un paso importante para entender un sistema y es esencial para encontrar soluciones aproximadas o numéricas.

Los dos ejemplos que siguen muestran cómo el método lagrangiano proporciona, casi sin esfuerzo, las ecuaciones de movimiento para problemas que requerirían tener mucho cuidado e ingenuidad usando métodos newtonianos.

Ejemplo 7.5 *Un bloque que se desliza sobre una cuña*

Consideremos el bloque y la cuña mostrados en la Figura 7.8. El bloque (masa m) puede moverse libremente sobre la cuña (masa M), y la cuña puede deslizarse sobre la mesa horizontal, ambos con rozamiento despreciable. Estando los dos inicialmente en reposo, el bloque es liberado en la parte superior de la cuña. Si la cuña tiene un ángulo α y la longitud de la cara inclinada es l, ¿cuánto tiempo tarda el bloque en llegar abajo?

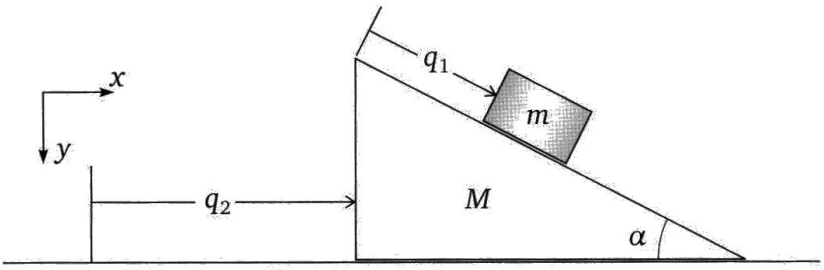


Figura 7.8. Un bloque de masa m se desliza por una cuña de masa M, la cual tiene libertad para moverse sobre una mesa horizontal.

El sistema tiene dos grados de libertad, y una buena selección de coordenadas generalizadas es, como se muestra, la distancia q_1 del bloque desde la parte superior de la cuña y la distancia q_2 de la cuña desde un punto fijo sobre la mesa. La cantidad que debemos encontrar es la aceleración $\ddot{q}_1$ del bloque relativa a la cuña, ya que con esto podemos encontrar rápidamente el tiempo requerido para deslizarse por toda la longitud de la cuña. Nuestra primera tarea será escribir el lagrangiano; y casi siempre es más seguro utilizar coordenadas cartesianas para después reescribirlo en términos de las coordenadas generalizadas escogidas.

La energía cinética de la cuña es $T_M = \frac{1}{2}M\dot{q}_2^2$ pero la del bloque es más complicada. La velocidad del bloque *relativa a la cuña* es $\dot{q}_1$ pendiente abajo, pero la propia cuña tiene una velocidad horizontal $\dot{q}_2$ relativa a la mesa. La velocidad del bloque relativa al sistema inercial de la mesa es la suma vectorial de ambas. Resolviendo en componentes rectangulares (x hacia la derecha, y hacia abajo), encontramos, para la velocidad del bloque relativa a la mesa

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (\dot{q}_1 \cos\alpha + \dot{q}_2, \dot{q}_1 \operatorname{sen}\alpha).$$

Por lo tanto la energía cinética del bloque es

$$T_m = \tfrac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \tfrac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\alpha).$$

(Utilicé la identidad $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ para simplificar esto). La energía cinética total del sistema es

$$T = T_M + T_m = \tfrac{1}{2}(M+m)\dot{q}_2^2 + \tfrac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\alpha). \tag{7.60}$$

La energía potencial de la cuña es constante, la cual podemos suponer que es cero. La del bloque es $-mgy$, donde $y = q_1 \operatorname{sen}\alpha$ es la altura del bloque medida hacia abajo desde la parte superior de la cuña. Por lo tanto

$$U = -mgq_1 \operatorname{sen}\alpha$$

y el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = T - U = \tfrac{1}{2}(M+m)\dot{q}_2^2 + \tfrac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2\dot{q}_1\cos\alpha) + mgq_1\operatorname{sen}\alpha. \tag{7.61}$$

Una vez encontrado el lagrangiano en términos de las coordenadas generalizadas q_1 y q_2, lo único que tenemos que hacer es escribir las dos ecuaciones lagrangianas, una para q_1 y otra para q_2, y después resolverlas. La ecuación q_2 (que es un poco más sencilla) es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \tag{7.62}$$

pero como $\mathcal{L}$ en (7.61) es claramente independiente de q_2, esto sólo nos dice que el momento generalizado $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_2$ es constante,

$$M\dot{q}_2 + m(\dot{q}_2 + \dot{q}_1\cos\alpha) = \text{const} \tag{7.63}$$

un resultado que se reconoce como la conservación del momento total en la dirección x (algo que puede escribirse sin ayuda de Lagrange).

La ecuación q_1

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \tag{7.64}$$

es más complicada ya que ninguna derivada es cero. Sustituyendo $\mathcal{L}$ por (7.61), podemos escribir esto como

$$\begin{aligned} mg\operatorname{sen}\alpha &= \frac{d}{dt}m(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\cos\alpha) \\ &= m(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2\cos\alpha). \end{aligned} \tag{7.65}$$

Diferenciando (7.63) vemos que

$$\ddot{q}_2 = -\frac{m}{M+m}\ddot{q}_1\cos\alpha, \tag{7.66}$$

lo que nos permite eliminar $\ddot{q}_2$ de (7.65) y resolver para $\ddot{q}_1$:

$$\ddot{q}_1 = \frac{g\operatorname{sen}\alpha}{1 - \dfrac{m\cos^2\alpha}{M+m}}. \tag{7.67}$$

Armados con este valor para $\ddot{q}_1$ podemos rápidamente contestar a la pregunta original: como la aceleración hacia abajo de la pendiente es constante, la distancia recorrida hacia abajo de la pendiente en el tiempo t es $\frac{1}{2}\ddot{q}_1 t^2$, y el tiempo necesario para recorrer la longitud l es justo $\sqrt{2l/\ddot{q}_1}$, con $\ddot{q}_1$ dado por (7.67). Más interesante que esta respuesta es comprobar que la fórmula (7.67) para $\ddot{q}_1$ está de acuerdo con el sentido común en varios casos especiales. Por ejemplo, si $\alpha = 90°$, (7.67) implica que $\ddot{q}_1 = g$, que es claramente correcta; y, si $M \to \infty$, (7.67) implica que $\ddot{q}_1 \to g \operatorname{sen}\alpha$, que es la bien conocida aceleración para un bloque sobre un plano inclinado fijo y claramente tiene sentido. Dejo como ejercicio (Problema 7.19) comprobar que en el límite cuando $M \to 0$, nuestra respuesta concuerda con lo que se podría haber predicho.

Ejemplo 7.6 *Cuenta de collar enhebrada en un aro que gira*

Una cuenta de collar de masa m está enhebrada en un aro circular de alambre sin rozamiento de radio R. El aro está en un plano vertical, que está forzado a rotar alrededor del diámetro vertical del aro con velocidad angular constante $\dot{\phi} = \omega$, como se muestra en la Figura 7.9. La posición de la cuenta en el aro está especificada por el ángulo θ medido hacia arriba desde la vertical. Escribir el lagrangiano del sistema en términos de la coordenada generalizada θ y encontrar la ecuación de movimiento para la cuenta. Hallar algunas posiciones de equilibrio en las que la cuenta puede permanecer con θ constante, y explicar sus posiciones en términos de estática y la «fuerza centrífuga» $m\omega^2\rho$ (donde ρ es la distancia de la cuenta desde el eje). Usar la ecuación de movimiento para discutir la estabilidad de las posiciones de equilibrio.

Nuestra primera tarea es escribir el lagrangiano. En relación con un sistema que no rota, la cuenta tiene una velocidad $R\dot{\theta}$ tangencial al aro y $\rho\omega = (R \operatorname{sen}\theta)\omega$ normal

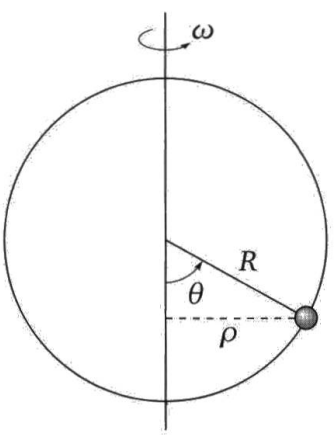


Figura 7.9. Una cuenta de collar es libre de moverse alrededor del aro de alambre sin rozamiento, que está girando a un ritmo fijo ω alrededor de su eje vertical. La posición de la cuenta está especificada por el ángulo θ; su distancia desde el eje de rotación es $\rho = R \operatorname{sen}\theta$.

al aro (la última debida al giro del aro con velocidad angular ω). Por tanto la energía cinética es $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \operatorname{sen}^2\theta)$. La energía potencial gravitatoria se ve fácilmente que es $U = mgR(1 - \cos\theta)$, medida desde la parte de abajo del aro. Por lo tanto, el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \operatorname{sen}^2\theta) - mgR(1 - \cos\theta), \tag{7.68}$$

y la ecuación de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \qquad \text{o} \qquad mR^2\omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - mgR\operatorname{sen}\theta = mR^2\ddot{\theta}.$$

Dividiendo entre mR^2, llegamos a la ecuación de movimiento deseada:

$$\ddot{\theta} = (\omega^2\cos\theta - g/R)\operatorname{sen}\theta. \tag{7.69}$$

Aunque esta ecuación no se puede resolver analíticamente en términos de funciones elementales, sí que puede, sin embargo, decirnos muchas cosas sobre el comportamiento del sistema. Para ilustrar esto, usemos (7.69) para encontrar las posiciones de equilibrio de la cuenta. Un punto de equilibrio es cualquier valor de θ (llamémosle θ_0) que cumpla la siguiente condición: si la cuenta se sitúa en reposo ($\dot{\theta} = 0$) en $\theta = \theta_0$, entonces permanecerá en reposo en θ_0. Esta condición está garantizada si $\ddot{\theta} = 0$. (Para ver esto, observe que si $\ddot{\theta} = 0$, entonces $\dot{\theta}$ no cambia y sigue siendo cero, lo que significa que θ no cambia y permanece igual a θ_0). Por consiguiente para encontrar las posiciones de equilibrio sólo tenemos que igualar el segundo miembro de (7.69) a cero:

$$(\omega^2\cos\theta - g/R)\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{7.70}$$

Esta ecuación se cumple si alguno de los dos factores es cero. El factor $\operatorname{sen}\theta$ es cero si $\theta = 0$ o π. Por consiguiente la cuenta puede permanecer en reposo en la parte de abajo o en la de arriba del aro. El primer factor en (7.70) desaparece cuando

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}.$$

Como $|\cos\theta|$ debe ser menor o igual que 1, el primer factor puede desaparecer sólo cuando $\omega^2 \geq g/R$. Cuando se cumple esta condición, hay dos posiciones de equilibrio más en

$$\theta_0 = \pm\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right). \tag{7.71}$$

Concluimos que cuando el aro está rotando lentamente ($\omega^2 < g/R$), hay solo dos posiciones de equilibrio, en la parte de abajo y en la parte de arriba del aro, pero cuando rota lo suficientemente rápido ($\omega^2 > g/R$), hay otras dos más, colocadas

simétricamente en cualquiera de los lados de la parte de abajo, como las dadas por (7.71).[10]

Quizá la manera más fácil de entender las diversas posiciones de equilibrio es en términos de la «fuerza centrífuga». En la mayoría de los cursos de introducción a la física, la fuerza centrífuga es descartada como una abominación a ser evitada por todos los físicos que se precien. Siempre que centremos nuestra atención en sistemas inerciales, este es un punto de vista correcto (y ciertamente seguro). Sin embargo, como veremos en el Capítulo 9, desde el punto de vista de un sistema no inercial que rota hay una fuerza centrífuga perfectamente real $m\omega^2\rho$ (quizá más familiar como mv^2/ρ), donde ρ es la distancia del objeto hasta el eje de rotación. Por tanto, tomando el punto de vista de una mosca posada sobre el aro que rota, podemos entender las posiciones de equilibrio como sigue: en la parte de abajo o en la de arriba del aro, la cuenta está en el eje de rotación y $\rho = 0$; por lo tanto, la fuerza centrífuga $m\omega^2\rho$ es cero. Todavía más, la fuerza de gravedad es normal al aro, así que no hay ninguna fuerza que tienda a mover la cuenta a lo largo del alambre y la cuenta permanece en reposo. Los otros dos puntos de equilibrio son un poco más sutiles: en cualquier posición fuera del eje (como la mostrada en la Figura 7.9) la fuerza centrífuga es distinta de cero y tiene una componente que empuja a la cuenta *hacia fuera* a lo largo del alambre; mientras tanto la fuerza de gravedad tiene una componente que tira de la cuenta *hacia dentro* a lo largo del alambre (siempre que la cuenta esté debajo de las marcas de mitad de camino, $\theta = \pm\pi/2$). En cualquiera de los puntos dados por (7.71), estas dos componentes están equilibradas (compruébelo usted mismo haciendo el Problema 7.28) y la cuenta puede permanecer en reposo.

Un punto de equilibrio θ_0 no es especialmente interesante a no ser que sea *estable* (esto es, si se empuja suavemente la cuenta para apartarla ligeramente de θ_0, se mueve otra vez hacia θ_0. Usando nuestra ecuación de movimiento (7.69), podemos comprobar fácilmente este punto, y comenzaré con el equilibrio en la parte de abajo, $\theta = 0$. Siempre que θ se mantenga cercano a 0, podemos fijar $\cos\theta \approx 1$ y aproximar la ecuación por

$$\ddot{\theta} = (\omega^2 - g/R)\operatorname{sen}\theta \qquad [\theta \text{ cerca de } 0]. \tag{7.72}$$

Si el aro está rotando lentamente ($\omega^2 < g/R$), tiene la forma

$$\ddot{\theta} = (\text{número negativo})\theta.$$

Si empujamos suavemente la cuenta hacia la derecha ($\theta > 0$), entonces como θ es positivo, $\ddot{\theta}$ es negativo, y la cuenta se acelera hacia la izquierda, esto es, vuelve hacia la parte de abajo. Si la empujamos suavemente hacia la izquierda, ($\theta < 0$), entonces

[10] Advierta que cuando $\omega^2 = g/R$ las dos posiciones extra dadas por (7.71) justo acaban de aparecer y coinciden con el primer punto en la parte de abajo con $\theta = \pm 0$.

$\ddot{\theta}$ se hace positivo, y la cuenta se acelera hacia la derecha, esto es, vuelve otra vez hacia la parte de abajo. De cualquiera de las dos maneras, la cuenta vuelve hacia el equilibrio, que es, por lo tanto, *estable*.

Si aceleramos la rotación del aro, de modo que $\omega^2 > g/R$, entonces la ecuación aproximada de movimiento (7.72) toma la forma

$$\ddot{\theta} = (\text{número positivo})\theta.$$

Ahora un pequeño desplazamiento hacia la derecha hace a $\ddot{\theta}$ positivo, y la cuenta se acelera alejándose de la parte de abajo. Análogamente, el desplazamiento hacia la izquierda hace a $\ddot{\theta}$ negativo, y otra vez la cuenta se acelera alejándose de la parte de abajo. Por consiguiente, cuando aumentamos ω más allá del valor crítico en que $\omega^2 = g/R$, el equilibrio en la parte de abajo cambia de estable a inestable.

El equilibrio en la parte de arriba ($\theta = \pi$) es siempre inestable (vea el Problema 7.28). Esto es fácil de entender de nuestra discusión de la fuerza centrífuga. Cerca de la parte de arriba del aro, ambas fuerzas, la centrífuga y la gravitatoria tienden a empujar la cuenta lejos de la parte de arriba, así que no hay oportunidad para una fuerza restauradora que la devuelva a la posición de equilibrio.

Las otras dos posiciones de equilibrio sólo existen cuando $\omega^2 > g/R$, y se ve fácilmente que son estables: la ecuación de movimiento (7.69) es

$$\ddot{\theta} = (\omega^2 \cos\theta - g/R)\operatorname{sen}\theta. \tag{7.73}$$

Para acabar, consideremos el equilibrio de la derecha con $0 < \theta < \pi/2$. En el punto de equilibrio, el término entre paréntesis del segundo miembro de (7.73) es cero, mientras que $\operatorname{sen}\theta$ es positivo. Si aumentamos θ ligeramente (la cuenta se mueve hacia arriba y a la derecha), $\operatorname{sen}\theta$ sigue siendo positivo, pero el término entre paréntesis pasa a ser negativo. (Recuerde que $\cos\theta$ es una función decreciente en este cuadrante). Por lo tanto $\ddot{\theta}$ se convierte en negativo, y la cuenta se acelera de vuelta hacia su punto de equilibrio. Si disminuimos θ un poco desde el equilibrio, entonces $\ddot{\theta}$ se hace positivo, y de nuevo la cuenta se acelera de vuelta hacia el equilibrio. Por lo tanto el equilibrio de la derecha es estable. Como sería de esperar, un análisis similar nos demuestra que lo mismo vale para el equilibrio de la izquierda.

Así llegamos al siguiente punto interesante: cuando el aro rota lentamente ($\omega^2 < g/R$), sólo hay un equilibrio estable en $\theta = 0$. Si aceleramos la rotación, mientras ω pasa el valor crítico de $\omega^2 = g/R$, el equilibrio original se hace inestable pero aparecen dos nuevos puntos de equilibrio estable, que salen de $\theta = 0$ y que se mueven hacia la izquierda y la derecha a medida que aumentamos ω cada vez más. Este fenómeno, la desaparición de un equilibrio estable y la aparición simultánea de otros dos que divergen del mismo punto, se llama *bifurcación* y será uno de los temas principales en el Capítulo 12 sobre la teoría del caos.

Es interesante apuntar que el dispositivo de este ejemplo fue usado por James Watt (1736-1829) como regulador en sus locomotoras de vapor. El dispositivo rotaba

con el motor y, a medida que el motor aumentaba de velocidad, la cuenta se elevaba en el aro. Cuando la velocidad angular ω alcanzaba un valor máximo permitido predeterminado, la cuenta, al llegar a la altura correspondiente provocaba que se interrumpiera el suministro de vapor.

Este ejemplo ilustra otro punto fuerte del método lagrangiano, ya mencionado en la Sección 7.1: las coordenadas generalizadas pueden incluso ser relativas a un sistema de referencia no inercial, siempre y cuando el sistema en el que el lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$ estuviera escrito originalmente fuera inercial. En este ejemplo, el ángulo θ era el ángulo polar de la cuenta, medido en el sistema rotatorio no inercial del aro, pero el lagrangiano (7.68) se definía como $\mathcal{L} = T - U$ con T y U evaluadas en el sistema inercial relativo hacia el que rota el aro.[11]

En el siguiente y último ejemplo de esta sección seguimos con el ejemplo anterior de la cuenta en el aro rotatorio, y obtenemos soluciones aproximadas de la ecuación de movimiento en la proximidad de los puntos de equilibrio estable.

Ejemplo 7.7 *Oscilaciones de la cuenta cerca del equilibrio*

Consideremos de nuevo la cuenta del ejemplo anterior y utilicemos la ecuación de movimiento para encontrar el comportamiento aproximado de la cuenta en la proximidad de las posiciones de equilibrio estable.

Cuando $\omega^2 < g/R$, el único equilibrio estable se encuentra en la parte inferior del aro con $\theta = 0$. Siempre y cuando θ se mantenga pequeño, podemos aproximar la ecuación de movimiento (7.73) estableciendo $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ y $\cos\theta \approx 1$ para obtener

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -(g/R - \omega^2)\theta \qquad [\theta \text{ cerca de } 0] \\ &= -\Omega^2\theta \end{aligned} \tag{7.74}$$

donde la segunda línea introduce la frecuencia

$$\Omega = \sqrt{g/R - \omega^2}.$$

Siempre que $\omega^2 < g/R$, esto define Ω como un número real positivo y podemos reconocer (7.74) como la ecuación para el movimiento armónico simple con frecuencia Ω. Podemos concluir que la cuenta se desplaza ligeramente del equilibrio estable en $\theta = 0$, ejecuta un movimiento armónico de frecuencia Ω,

$$\theta(t) = A\cos(\Omega t - \delta). \tag{7.75}$$

[11] El Ejemplo 7.5 era otro ejemplo: la coordenada q_1 daba la posición del bloque relativa al sistema de aceleración de la cuña, pero la energía cinética T se evaluaba en el sistema inercial de la mesa. Para otro ejemplo, vea el Problema 7.30.

Si aceleramos el ritmo de rotación del aro hasta $\omega^2 > g/R$, entonces Ω se hace imaginario puro, y como $\cos i\alpha = \cosh\alpha$, nuestra solución (7.75) se convierte en un coseno hiperbólico, que crece con el tiempo y refleja correctamente que el equilibrio en $\theta = 0$ se ha hecho inestable.

Una vez que $\omega^2 > g/R$, obtenemos dos posiciones de equilibrio estable dadas por (7.71) y localizadas simétricamente a la derecha y a la izquierda en la base del aro. Como cabría esperar, éstas se comportan de la misma manera, y para concretar, me centraré en la de la derecha. Fijemos su posición mediante $\theta = \theta_0$, donde de acuerdo con (7.70), θ_0 satisface

$$\omega^2 \cos\theta_0 - g/R = 0. \tag{7.76}$$

Imaginemos ahora la cuenta situada cerca de θ_0 en

$$\theta = \theta_0 + \epsilon$$

e investiguemos la dependencia del tiempo del parámetro pequeño ϵ. De nuevo podemos aproximar la ecuación de movimiento (7.73), aunque esto requiere más cuidado. Si aproximamos los factores de $\cos(\theta_0 + \epsilon)$ y $\operatorname{sen}(\theta_0 + \epsilon)$ mediante los dos primeros términos de sus series de Taylor,

$$\cos(\theta_0 + \epsilon) \approx \cos\theta_0 - \epsilon \operatorname{sen}\theta_0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\theta_0 + \epsilon) \approx \operatorname{sen}\theta_0 + \epsilon\cos\theta_0 \tag{7.77}$$

entonces la ecuación de movimiento (7.73) se convierte en

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= [\omega^2 \cos(\theta_0 + \epsilon) - g/R] \operatorname{sen}(\theta_0 + \epsilon) \quad [\theta \text{ cerca de } \theta_0] \\ &= [\omega^2 \cos\theta_0 - \epsilon\,\omega^2 \operatorname{sen}\theta_0 - g/R]\,[\operatorname{sen}\theta_0 + \epsilon\cos\theta_0]. \end{aligned} \tag{7.78}$$

Por (7.76), los términos primero y tercero en el primer corchete se cancelan, dejando sólo el término central $-\epsilon\,\omega^2 \operatorname{sen}\theta_0$. Al orden más bajo en ϵ podemos dejar el segundo término del segundo corchete y como $\ddot{\theta}$ es igual que $\ddot{\epsilon}$, nos queda

$$\ddot{\epsilon} = -\epsilon\,\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta_0 = -\Omega'^2\epsilon \tag{7.79}$$

Aquí la segunda igualdad define la frecuencia $\Omega' = \omega \operatorname{sen}\theta_0$, o, usando (7.76),

$$\Omega' = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{g}{\omega R}\right)^2} \tag{7.80}$$

(vea el Problema 7.26). La ecuación (7.79) es la ecuación para el movimiento armónico simple. Por lo tanto, el parámetro ϵ oscila alrededor de cero, y la propia cuenta oscila alrededor de la posición de equilibrio θ_0 con frecuencia Ω'.

7.6 Momentos generalizados y coordenadas ignorables

Como ya he mencionado, para cualquier sistema con n coordenadas generalizadas q_i $(i = 1,\ldots,n)$, nos referimos a las n cantidades $\partial\mathcal{L}/\partial q_i = F_i$ como *fuerzas generalizadas* y a $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i = p_i$ como *momentos generalizados*. Con esta terminología, la ecuación de Lagrange,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}, \tag{7.81}$$

puede escribirse como

$$F_i = \frac{d}{dt}p_i. \tag{7.82}$$

Esto es, «fuerza generalizada = tasa de variación del momento generalizado». En particular, si el lagrangiano es independiente de una coordenada en particular q_i, entonces $F_i = \partial\mathcal{L}/\partial q_i = 0$ y el momento generalizado correspondiente p_i es constante.

Consideremos por ejemplo, un proyectil sujeto únicamente a la fuerza de la gravedad. La energía potencial es $U = mgz$ (si usamos coordenadas cartesianas con z medida verticalmente hacia arriba), y el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - mgz. \tag{7.83}$$

Con respecto a las coordenadas cartesianas, la fuerza generalizada es simplemente la habitual fuerza normal ($\partial\mathcal{L}/\partial x = -\partial U/\partial x = F_x$, etc.) y el momento generalizado es el momento habitual ($\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x} = m\dot{x} = p_x$, etc.) Como $\mathcal{L}$ es independiente de x e y, inmediatamente se sigue que las componentes p_x y p_y son constantes, como ya sabíamos.

En general, las fuerzas y los momentos generalizados no son los mismos que las fuerzas y los momentos habituales. Por ejemplo, vimos en las ecuaciones (7.25) y (7.26) que en coordenadas polares bidimensionales la componente ϕ de la fuerza generalizada es el momento de fuerza, y la de los momentos generalizados es de hecho el momento angular. En cualquier caso, cuando el lagrangiano es independiente de una coordenada q_i, el momento generalizado correspondiente se conserva. Por lo tanto, si el lagrangiano de una partícula bidimensional es independiente de ϕ, entonces el momento angular de la partícula se conserva, de nuevo un resultado importante (y también evidente desde la perspectiva newtoniana). Cuando el lagrangiano es independiente de una coordenada q_i, a veces se dice que esa coordenada es **ignorable** o **cíclica**. Obviamente es una buena idea, siempre que sea posible, escoger las coordenadas de manera que sean ignorables tantas como sea posible y sus momentos correspondientes sean constantes. De hecho, este es quizá el principal criterio a la hora de escoger coordenadas generalizadas para cualquier problema dado: intentar encontrar tantas coordenadas ignorables como sea posible.

Podemos reescribir el resultado de los últimos tres párrafos afirmando que «$\mathcal{L}$ es independiente de una coordenada q_i» es equivalente a decir que «$\mathcal{L}$ no cambia, o es *invariante*, cuando q_i varía (con todos los demás q_j fijos)». Por lo tanto podemos decir que si $\mathcal{L}$ es invariante bajo variaciones de una coordenada q_i, entonces el momento generalizado correspondiente p_i se conserva. Esta conexión entre la invariabilidad de $\mathcal{L}$ y ciertas leyes de conservación es el primero de varios resultados similares que relacionan la invariabilidad bajo transformaciones (traslaciones, rotaciones, etc.) con las leyes de conservación. Estos resultados se conocen de manera colectiva como **teorema de Noether**, por la matemática alemana Emmy Noether (1882-1935). Volveré a este importante teorema en la Sección 7.8.

7.7 Conclusión

La versión lagrangiana de la mecánica clásica tiene las dos grandes ventajas de que, a diferencia de la versión newtoniana, funciona igual de bien en todos los sistemas de coordenadas y puede tratar los sistemas ligados con facilidad, evitando cualquier discusión acerca de las fuerzas de ligadura. Si el sistema está ligado, debemos escoger un conjunto adecuado de coordenadas generalizadas independientes. Haya o no haya ligaduras, la siguiente tarea es escribir el lagrangiano $\mathcal{L}$ en términos de las coordenadas seleccionadas. Entonces las ecuaciones de movimiento salen automáticamente en la forma estándar

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad [i = 1, \ldots, n].$$

Por supuesto, no existe garantía de que las ecuaciones resultantes sean fáciles de resolver, y en la mayoría de los problemas reales no lo son, ya que requieren una solución numérica o al menos una aproximación antes de poder resolverse analíticamente.

Incluso en problemas que son sólo ligeramente complicados, como los ejemplos de la Sección 7.5, encontrar las ecuaciones de movimiento mediante el método de Lagrange es bastante más fácil que usando la segunda ley de Newton. Desde luego, algunos puristas objetan que el enfoque lagrangiano hace la vida *demasiado* sencilla, ya que desaparece la necesidad de pensar en la física.

El formalismo lagrangiano puede ampliarse para incluir sistemas más generales que los considerados hasta ahora. Un caso importante es el de las fuerzas magnéticas, del que hablo en la Sección 7.9. Las fuerzas disipativas, como el rozamiento o la resistencia del aire pueden a veces incluirse, pero debe admitirse que el formalismo lagrangiano es adecuado principalmente para problemas en los que las fuerzas disipativas están ausentes o son, al menos, despreciables.

Las últimas tres secciones de este capítulo hablan sobre tres temas avanzados, todos ellos de vital importancia en la mecánica de Lagrange, pero que al mismo tiempo podrían omitirse en una primera lectura. En la Sección 7.8 doy dos ejemplos más de la increíble conexión entre la invariabilidad bajo ciertas transformaciones y las leyes de conservación. Esta conexión, conocida como teorema de Noether, es importante en toda la física moderna, pero especialmente en física cuántica. La Sección 7.9 habla sobre cómo incluir las fuerzas magnéticas en la mecánica lagrangiana, otro tema de importancia en la teoría cuántica. Finalmente, en la Sección 7.10 se introduce el método de los multiplicadores de Lagrange. Esta técnica aparece de muchas maneras en muchas áreas de la física, pero me limitaré a algunos ejemplos sencillos de la mecánica lagrangiana. Estas últimas tres secciones están organizadas de manera que sean independientes y autosuficientes. Pueden estudiarse todas, ninguna o cualquiera de ellas.

7.8 Más sobre las leyes de conservación*

* *El material que compone esta sección es más avanzado que el de las anteriores, por lo que puede omitirse en una primera lectura. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el material discutido se necesita para leer la Sección 11.5 y el Capítulo 13.*

En esta sección discutiré cómo encajan las leyes de conservación del momento y la energía en la formulación lagrangiana de la mecánica. Como hemos deducido la formulación lagrangiana de la newtoniana, cualquier cosa que ya sabíamos sobre las leyes de conservación, basada en la mecánica newtoniana, será naturalmente también cierta en mecánica lagrangiana. Sin embargo, podemos obtener otros puntos de vista examinando las leyes de conservación desde una perspectiva lagrangiana. Incluso más, buena parte del trabajo moderno toma la formulación lagrangiana (basada en el principio de Hamilton, por ejemplo) como su punto de partida. En este contexto, es importante saber lo que se puede decir sobre las leyes de conservación estrictamente en el marco de trabajo lagrangiano.

Conservación del momento total

Ya sabemos de la mecánica newtoniana que el momento total de un sistema aislado de N partículas se conserva, pero examinemos esta importante propiedad desde el punto de vista lagrangiano. Una de las características más importantes de un sistema aislado es que es *invariante traslacional;* esto es, si transportamos todas las N partículas de un lado a otro aplicándoles el mismo desplazamiento $\boldsymbol{\epsilon}$, nada físicamente significativo del sistema debería cambiar. Esto está ilustrado en la Figura 7.10, donde vemos que el efecto de mover el sistema completo mediante un desplazamiento fijo $\boldsymbol{\epsilon}$ es sustituir cada posición $\mathbf{r}_\alpha$ por $\mathbf{r}_\alpha + \boldsymbol{\epsilon}$,

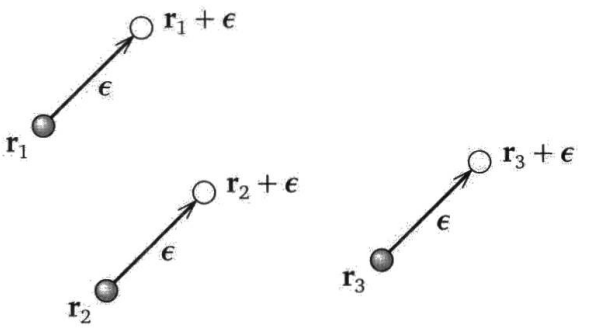


Figura 7.10. Un sistema aislado de N partículas es invariante traslacional, lo que significa que cuando cada partícula es transportada un mismo desplazamiento ϵ, nada físicamente significativo cambia.

$$\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 + \epsilon, \qquad \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 + \epsilon, \qquad \ldots, \qquad \mathbf{r}_N \to \mathbf{r}_N + \epsilon. \tag{7.84}$$

En particular, la energía potencial debe permanecer inalterada por este desplazamiento, así que

$$U(\mathbf{r}_1 + \epsilon, \ldots, \mathbf{r}_N + \epsilon, t) = U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) \tag{7.85}$$

o, más brevemente,

$$\delta U = 0$$

donde δU denota la variación en U bajo la traslación (7.84). Claramente las velocidades no cambian por la traslación (7.84). (Sumando una constante ϵ a todas las $\mathbf{r}_\alpha$ no cambia $\dot{\mathbf{r}}_\alpha$). Por lo tanto $\delta T = 0$, y entonces

$$\delta \mathcal{L} = 0 \tag{7.86}$$

bajo la traslación (7.84). Este resultado es cierto para cualquier desplazamiento ϵ. Si elegimos ϵ que sea un desplazamiento infinitesimal en la dirección x, entonces todas las coordenadas $x, x_1, \ldots, x_N$ aumentan en ϵ, mientras que las coordenadas y y z permanecen invariables. Para esta traslación, la variación en $\mathcal{L}$ es

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} + \cdots + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_N} = 0.$$

Esto implica que

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{7.87}$$

Ahora usando las ecuaciones de Lagrange podemos reescribir cada derivada como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{d}{dt} p_{\alpha x}$$

donde $p_{\alpha x}$ es la componente x del momento de la partícula α. Por consiguiente (7.87) se convierte en

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{d}{dt} p_{\alpha x} = \frac{d}{dt} P_x = 0$$

donde P_x es la componente x del momento total $\mathbf{P} = \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha$. Escogiendo un pequeño desplazamiento ϵ sucesivamente en las direcciones y y z, podemos probar el mismo resultado para las componentes y y z, y llegamos a la conclusión de que, siempre que el lagrangiano no cambie por la traslación (7.84), el momento total del sistema de N partículas se conserva. Esta conexión entre la invariancia traslacional de $\mathcal{L}$ y la conservación del momento total es otro ejemplo del teorema de Noether.

Conservación de la energía

Finalmente, me gustaría discutir la conservación de la energía desde el punto de vista lagrangiano. El análisis es algo complicado, pero introduce un número de ideas que son importantes en trabajos más avanzados, particularmente en la formulación hamiltoniana de la mecánica (Capítulo 13).

A medida que el tiempo avanza la función $\mathcal{L}(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$ cambia, y lo hace por dos motivos, porque t está cambiando, y porque las q y las $\dot{q}$ cambian con la evolución del sistema. Por consiguiente, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \tag{7.88}$$

Ahora bien, por la ecuación de Lagrange, puedo sustituir la derivada en la primera suma del segundo miembro por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i .$$

Mientras tanto, la derivada en la segunda suma de la derecha de (7.88) es justo el momento generalizado p_i. Por tanto, puedo reescribir (7.88) como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L} &= \sum_i \left(\dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt}\sum_i \left(p_i \dot{q}_i\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{7.89}$$

Ahora bien, para muchos sistemas interesantes, el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo; esto es, $\partial \mathcal{L}/\partial t = 0$. Cuando este es el caso, el segundo término de la derecha de (7.89) desaparece. Si pasamos el primer miembro de (7.89) al

segundo, vemos que la derivada temporal de la cantidad $\sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$ es cero. Esta cantidad es tan importante que tiene su propio símbolo,

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}, \tag{7.90}$$

y se denomina **hamiltoniano** (o función hamiltoniana) del sistema. Con esta terminología, podemos enunciar la siguiente importante conclusión:

> Si el lagrangiano $\mathcal{L}$ no depende explícitamente del tiempo (es decir, $\partial \mathcal{L}/\partial t = 0$), entonces el hamiltoniano $\mathcal{H}$ se conserva.

El descubrimiento de cualquier ley de conservación es un hecho de capital importancia y es suficiente para justificar el decir que el hamiltoniano es una cantidad importante. De hecho, va mucho más allá que esto. Como veremos en el Capítulo 13, el hamiltoniano $\mathcal{H}$ es la base de la formulación hamiltoniana de la mecánica, justamente de la misma manera que $\mathcal{L}$ es la base de la mecánica lagrangiana.

Por el momento, la mayor importancia de nuestro recién descubierto hamiltoniano es que en muchas situaciones es de hecho justo la energía total del sistema. Específicamente, probaremos que, *siempre que la relación entre las coordenadas generalizadas y las cartesianas sea independiente del tiempo*,

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(q_1, \ldots, q_n), \tag{7.91}$$

el hamiltoniano $\mathcal{H}$ es justo la energía total,

$$\mathcal{H} = T + U. \tag{7.92}$$

Quizá recuerde que en la Sección 7.3 acordamos describir las coordenadas generalizadas que cumplan (7.91) como *naturales*; por consiguiente, podemos parafrasear el resultado (7.92) para decir que, siempre que las coordenadas generalizadas sean naturales, $\mathcal{H}$ es justo la energía total $T + U$. Para probarlo, vamos a expresar la energía cinética total $T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2$ en términos de las coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$. Primero, diferenciando (7.91) con respecto a t y usando la regla de la cadena, encontramos que[12]

$$\dot{\mathbf{r}}_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i \,. \tag{7.93}$$

[12] Si la relación (7.91) fuera explícitamente dependiente del tiempo habría un término extra en esta expresión para $\dot{\mathbf{r}}_\alpha$, a saber, $\partial \mathbf{r}_\alpha/\partial t$. Este término extra invalidaría la conclusión (7.98) anterior de que $\mathcal{H} = T + U$.

Si formamos ahora un producto escalar de esta ecuación consigo misma, encontramos

$$\dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 = \sum_j \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \cdot \sum_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)$$

donde he renombrado los índices de suma como j y k para evitar futuras confusiones. La energía cinética está dada ahora como una suma triple, que se puede reorganizar y escribir como[13]

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 = \tfrac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \tag{7.94}$$

donde A_{jk} es un atajo para la suma

$$A_{jk} = A_{jk}(q_1, \ldots, q_n) = \sum_\alpha m_\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \right). \tag{7.95}$$

Podemos ahora evaluar el momento generalizado p_i mediante la diferenciación de (7.94) con respecto a $\dot{q}_i$ (Problema 7.45),

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j A_{ij} \dot{q}_j \,. \tag{7.96}$$

Volviendo a la ecuación (7.90) para el hamiltoniano, podemos reescribir la suma de la derecha como

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \left(\sum_j A_{ij} \dot{q}_j \right) \dot{q}_i = \sum_{i,j} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T \tag{7.97}$$

donde el último paso se sigue de (7.94). Por lo tanto

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = 2T - (T - U) = T + U. \tag{7.98}$$

Es decir, siempre que la transformación entre las coordenadas cartesianas y las generalizadas sea *independiente del tiempo*, como en (7.91), el hamiltoniano $\mathcal{H}$ es justo la energía total del sistema.

Ya he demostrado que, siempre que el lagrangiano sea independiente del tiempo, el hamiltoniano se conserva. Por lo tanto, ahora vemos que la independencia del

---

[13] Podemos volver a enunciar el resultado (7.94) para decir que, siempre que las coordenadas generalizadas son naturales, la energía cinética T es una función cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas $\dot{q}_i$. Este resultado juega un importante papel en varios desarrollos posteriores. Vea, por ejemplo, la Sección 11.5.

tiempo del lagrangiano [junto con la condición (7.91)] implica la conservación de la energía. Podemos reformular la independencia del tiempo de $\mathcal{L}$ diciendo que $\mathcal{L}$ no cambia por las traslaciones del tiempo, $t \to t + \epsilon$. Por lo que el resultado que acabamos de demostrar es que la invariabilidad de $\mathcal{L}$ bajo traslaciones temporales está relacionada con la conservación de la energía, casi de la misma manera que la invariabilidad de $\mathcal{L}$ bajo traslaciones espaciales ($\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \boldsymbol{\epsilon}$) se relaciona con la conservación del momento. Ambos resultados son manifestaciones del famoso teorema de Noether.

7.9 Ecuaciones de Lagrange para fuerzas magnéticas*

* *Esta sección requiere un conocimiento de los potenciales escalar y vectorial del electromagnetismo. Aunque las ideas aquí descritas juegan un importante papel en el tratamiento mecánico-cuántico de los campos magnéticos, no se volverán a usar en este libro.*

Aunque hasta ahora he definido el lagrangiano de una manera coherente como $\mathcal{L} = T - U$, hay sistemas, como una partícula cargada en un campo magnético, que pueden tratarse con el método lagrangiano, pero para el cual $\mathcal{L}$ *no* es sólo $T - U$. Entonces, la pregunta que hay que hacerse es: ¿cuál es la definición del lagrangiano para tales sistemas? Esta es la primera pregunta que respondo.

Definición y no unicidad del lagrangiano

Probablemente la definición general más satisfactoria de un lagrangiano para un sistema mecánico sea esta:

Definición general de un lagrangiano

Para un sistema mecánico dado con coordenadas generalizadas $q = (q_1, \ldots, q_n)$, un **lagrangiano** $\mathcal{L}$ es una función $\mathcal{L}(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$ de las coordenadas y velocidades, de tal manera que las ecuaciones correctas de movimiento para el sistema son las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad [i = 1, \ldots, n].$$

En otras palabras, un lagrangiano es cualquier función $\mathcal{L}$ en la que se cumplen las ecuaciones de Lagrange para el sistema que se esté considerando.

Obviamente, para los sistemas de los que hemos hablado hasta ahora, la vieja definición $\mathcal{L} = T - U$ encaja con esta nueva definición. Pero la nueva es mucho más general. En concreto, es fácil ver que nuestra nueva definición no define una función

lagrangiana única. Por ejemplo, consideremos una sola partícula en una dimensión y supongamos que hemos encontrado un lagrangiano $\mathcal{L}$ para esta partícula. Esto es, la ecuación de movimiento de la partícula es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}. \tag{7.99}$$

Ahora dejamos que $f(x, \dot{x})$ sea cualquier función para la cual

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}. \tag{7.100}$$

(Es fácil imaginar una función así, por ejemplo, $f = x\dot{x}$). Si reemplazamos $\mathcal{L}$ en (7.99) por

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + f$$

entonces, en virtud de (7.100), el lagrangiano $\mathcal{L}'$ nos da exactamente la misma ecuación de movimiento que $\mathcal{L}$.

La falta de unicidad del lagrangiano es similar a, aunque más radical que, la familiar falta de unicidad en la energía potencial (a la que se le puede añadir cualquier constante sin cambiar cualquiera de las predicciones físicas). El punto crucial es que *cualquier* función $\mathcal{L}$ que dé la ecuación de movimiento correcta tiene todas las características que buscamos en un lagrangiano (por ejemplo, que la integral $\int \mathcal{L}\, dt$ sea estacionaria en el camino correcto) y por lo tanto es igual de aceptable que cualquier otra función $\mathcal{L}$. Si para un sistema dado podemos encontrar una función $\mathcal{L}$ que nos lleve a una ecuación de movimiento correcta, entonces no necesitamos debatir si es el lagrangiano «correcto»; si nos da la ecuación correcta entonces es tan válido como cualquier otro lagrangiano imaginable.

Lagrangiano para una carga en un campo magnético

Consideremos ahora una partícula (de masa m y carga q) que se mueve en campos eléctricos y magnéticos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. La fuerza sobre la partícula es la bien conocida fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, de manera que la segunda ley de Newton puede leerse

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}). \tag{7.101}$$

Para reformular (7.101) en la forma lagrangiana, sólo tenemos que encontrar una función $\mathcal{L}$ para la que las tres ecuaciones de Lagrange sean iguales a (7.101). Esto puede hacerse utilizando los potenciales escalares y vectoriales, $V(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$, en cuyos términos pueden escribirse los dos campos[14]

[14] Vea, por ejemplo, David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, (Prentice-Hall,1999), p. 416-417.

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{7.102}$$

Ahora afirmo que la función lagrangiana[15]

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \tfrac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 - q(V - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \tag{7.103}$$

$$= \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - q(V - \dot{x}A_x - \dot{y}A_y - \dot{z}A_z) \tag{7.104}$$

tiene la propiedad que buscamos, esto es, reproduce la segunda ley de Newton (7.101). Para comprobarlo, examinemos primero la primera de las tres ecuaciones de Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}. \tag{7.105}$$

Para ver lo que esto implica, tenemos que evaluar las dos derivadas del lagrangiano propuesto (7.104):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -q\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} - \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} - \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \tag{7.106}$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x\,.$$

Cuando diferenciamos esto con respecto a t, debemos recordar que $A_x = A_x(x, y, z, t)$. A medida que t varía, x, y, z se mueven con la partícula y, mediante la regla de la cadena, vemos que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + q\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right). \tag{7.107}$$

Sustituyendo (7.106) y (7.107) en (7.105), cancelando los dos términos de $\dot{x}$, y reorganizándolos, encontramos que la ecuación de Lagrange (la componente x, con el lagrangiano propuesto) es igual a

$$m\ddot{x} = -q\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + q\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - q\dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \tag{7.108}$$

o, según (7.102),

---

[15] Observe que esto se puede escribir, si lo desea, como $\mathcal{L} = T - U$, pero U desde luego no es la EP habitual, ya que depende de la velocidad $\dot{\mathbf{r}}$; U a veces se denomina «EP dependiente de la velocidad», pero hay que destacar que no es cierto que la fuerza sobre la carga sea $-\nabla U$.

$$m\ddot{x} = q\left(E_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y\right) \tag{7.109}$$

que se reconoce fácilmente como la componente x de la segunda ley de Newton (7.101). Como las componentes y y z funcionan de la misma manera, podemos concluir que las ecuaciones de Lagrange, con el lagrangiano propuesto (7.104), son exactamente equivalentes a la segunda ley de Newton para una partícula cargada. Esto es, hemos reescrito con éxito la segunda ley de Newton para una partícula cargada en una forma lagrangiana con el lagrangiano (7.104).

Usando el lagrangiano (7.104) se pueden resolver varios problemas que implican partículas cargadas en campos eléctricos y magnéticos. (Vea el Problema 7.49 por ejemplo). Teóricamente, la conclusión más importante de este análisis surge cuando evaluamos el momento generalizado. Por ejemplo,

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x\,.$$

Ya que las componentes y y z funcionan de la misma manera, podemos concluir que

$$(\text{momento generalizado, } \mathbf{p}) = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}. \tag{7.110}$$

Esto es, el momento generalizado es el momento mecánico $m\mathbf{v}$ *más* un término magnético $q\mathbf{A}$. Este resultado está en el corazón de la teoría cuántica de la partícula cargada en un campo magnético, donde resulta que el momento generalizado corresponde al operador diferencial $-i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ (donde $\hbar$ es la constante de Planck sobre 2π), de manera que el análogo cuántico del momento mecánico $m\mathbf{v}$ es el operador $-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}$.

7.10 Multiplicadores de Lagrange y fuerzas de ligadura*

* *El método de los multiplicadores de Lagrange se usa en muchas áreas de la física. No obstante, no volveremos a usarlo en este libro, e incluso se puede omitir esta sección sin pérdida de continuidad.*

En esta sección hablamos sobre el método de los multiplicadores de Lagrange. Este poderoso método encuentra aplicación en diversas áreas de la física y adopta apariencias muy distintas en diferentes contextos. Aquí sólo hablaré sobre su aplicación en la mecánica lagrangiana,[16] y para que el análisis sea sencillo, me limitaré a los sistemas bidimensionales con un solo grado de libertad.

[16] Para aplicaciones en otros problemas, consulte por ejemplo, *Mathematical Methods in the Physical Sciences* por Mary Boas (Wiley, 1983), Cap. 4, Sección 9 y Cap. 9, Sección 6.

Hemos visto que uno de los logros de la mecánica Lagrangiana es que puede dejar a un lado todas las fuerzas de ligadura. Sin embargo, existen situaciones en las que uno realmente necesita conocer estas fuerzas. Por ejemplo, el diseñador de una montaña rusa necesita conocer la fuerza normal de la vía sobre el coche para saber cómo construir la vía. En este caso, podemos todavía usar una forma modificada de las ecuaciones de Lagrange, pero el procedimiento es algo diferente: no elegimos coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$ todas las cuales pueden ser variadas independientemente. (Recuerde que fue la independencia de las $q_1, \ldots, q_n$ lo que nos permitió usar las ecuaciones de Lagrange estándar sin preocuparnos de las ligaduras). En lugar de ello usamos un número mayor de coordenadas y los multiplicadores de Lagrange para manejar las ligaduras.

Para ilustrar este procedimiento, consideraremos un sistema con sólo dos coordenadas rectangulares x e y, las cuales están restringidas por una **ecuación de ligadura** de la forma[17]

$$f(x, y) = \text{const.} \tag{7.111}$$

Por ejemplo, podríamos considerar un péndulo simple con un solo grado de libertad (como en la Figura 7.2). En su tratamiento mediante el método estándar de Lagrange uno usaría la coordenada generalizada ϕ, el ángulo entre el péndulo y la vertical, y evitaría cualquier discusión sobre las ligaduras. Si, en lugar de ello, elegimos usar las coordenadas rectangulares originales x e y, entonces debemos reconocer que estas coordenadas no son independientes; cumplen la ecuación de ligadura

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = l$$

donde l es la longitud del péndulo. Descubriremos que el método de los multiplicadores de Lagrange nos permite acomodar esta ligadura, determinar la dependencia temporal de x e y, y *además* encontrar la tensión en la barra. Como un segundo ejemplo, consideremos la máquina de Atwood de la Figura 7.6. En nuestro tratamiento previo usamos la coordenada generalizada x (la posición de la masa m_1), pero podríamos en lugar de ello usar ambas coordenadas x e y (la posición de ambas masas), siempre que recordemos que la constancia de la longitud de la cuerda impone la ligadura siguiente

$$f(x, y) = x + y = \text{cte.}$$

[17] Veremos directamente mediante un ejemplo que algunas ligaduras típicas se pueden poner en esta forma. De hecho, es bastante fácil demostrar que se puede hacer con cualquier ligadura holónoma.

Aquí también, los multiplicadores de Lagrange nos permitirán acomodar esta ligadura, resolver para la dependencia temporal de x e y, y encontrar la fuerza de ligadura, que aquí es la tensión de la cuerda.

Para preparar nuestro nuevo método comenzamos desde el principio de Hamilton. Nuestro lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y})$. (Podríamos permitirle tener una dependencia explícita en t también, pero para simplificar la notación supondré que no la tiene). La prueba del principio de Hamilton dada en la Sección 7.4 se aplica incluso cuando las coordenadas están ligadas. (De hecho, fue diseñada para permitir las ligaduras). Por consiguiente podemos concluir como antes que la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y})\, dt \tag{7.112}$$

es estacionaria cuando se toma a lo largo del camino real seguido. Si denotamos este camino «correcto» por $x(t), y(t)$ e imaginamos un pequeño desplazamiento a un camino vecino «incorrecto»,

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & \rightarrow & x(t) + \delta x(t) \\ y(t) & \rightarrow & y(t) + \delta y(t) \end{array}\right\} \tag{7.113}$$

entonces, siempre que el desplazamiento sea coherente con la ecuación de ligadura, la acción (7.112) permanece inalterada, $\delta S = 0$. Para sacar provecho de ello, debemos escribir δS en términos de pequeños desplazamientos δx y δy:

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \right) dt. \tag{7.114}$$

Los términos segundo y cuarto se pueden integrar por partes, y concluimos que

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \delta x\, dt + \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) \delta y\, dt = 0 \tag{7.115}$$

para cualesquiera desplazamientos δx y δy coherentes con las ligaduras.

Si (7.115) fuera cierta para *cualesquiera* desplazamientos, podríamos probar inmediatamente dos ecuaciones de Lagrange separadas, una para x y otra para y. (Eligiendo $\delta y = 0$, nos podríamos quedar solamente con la primera integral; como ésta tiene que desaparecer para cualquier elección de δx, el factor entre paréntesis tiene que ser cero, lo que implica la ecuación usual de Lagrange con respecto a x. Y análogamente para y). Esto es exactamente la conclusión correcta para el caso en que no haya ligaduras.

Sin embargo, sí *hay* ligaduras, y (7.115) es sólo cierta para desplazamientos δx y δy coherentes con las ligaduras. Por lo tanto, procedemos como sigue: como todos los puntos que nos interesan cumplen $f(x, y) =$ constante, el desplazamiento

(7.113) deja a $f(x,y)$ inalterada, así que

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y = 0 \tag{7.116}$$

para cualquier desplazamiento coherente con las ligaduras. Como éste es cero, podemos multiplicarlo por una función arbitraria $\lambda(t)$ (este es el **multiplicador de Lagrange**) y sumarlo al integrando de (7.115), sin cambiar el valor de la integral (que es cero). Por lo tanto

$$\begin{aligned}\delta S = &\int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\, dt \\ &+ \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right)\delta y\, dt = 0\end{aligned} \tag{7.117}$$

para cualquier desplazamiento coherente con las ligaduras. Ahora viene un toque de astucia: hasta ahora $\lambda(t)$ es una función arbitraria de t, pero podemos elegirla de tal manera que el coeficiente de δx en la primera integral sea cero. Esto es, mediante la elección del multiplicador $\lambda(t)$, podemos hacer que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \tag{7.118}$$

a lo largo del camino real del sistema. Esta es la primera de dos ecuaciones de Lagrange modificadas y difiere de la ecuación normal sólo en el término extra que incluye a λ a la izquierda. Con el multiplicador elegido de esta manera, la primera integral completa en (7.117) es cero. Por lo tanto la segunda integral es también cero (porque su suma lo es), y esto es cierto para *cualquier* elección de δy. (La ligadura no pone restricción alguna en δx o δy separadamente (sólo fija δx una vez que δy se ha elegido, o viceversa). Por tanto el coeficiente de δy en esta segunda integral debe ser también cero y tenemos una segunda ecuación de Lagrange modificada,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}. \tag{7.119}$$

Tenemos ahora dos ecuaciones de Lagrange modificadas para las dos funciones desconocidas $x(t)$ e $y(t)$. Este elegante resultado se ha obtenido al precio de introducir una tercera función desconocida, el multiplicador de Lagrange $\lambda(t)$. Para hallar tres funciones desconocidas necesitamos tres ecuaciones, pero afortunadamente tenemos una tercera ecuación ya dispuesta, la ecuación de ligadura

$$f(x, y) = \text{cte.} \tag{7.120}$$

Las tres ecuaciones (7.118), (7.119), y (7.120) son suficientes, en principio al menos, para determinar las coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ y el multiplicador $\lambda(t)$. Antes de ilustrar esto con un ejemplo, queda un poco más de teoría por desarrollar.

Realmente el multiplicador de Lagrange $\lambda(t)$ es sólo un artificio matemático, introducido para ayudarnos a resolver nuestro problema. Sin embargo, resulta que está estrechamente relacionado con las fuerzas de ligadura. Para verlo, sólo tenemos que observar más de cerca las ecuaciones modificadas de Lagrange (7.118) y (7.119). El lagrangiano de nuestra presente discusión tiene la forma

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{y}^2 - U(x, y).$$

(En un problema como el del péndulo simple, x e y son las dos coordenadas de una masa única y $m_1 = m_2$. En un problema como el de la máquina de Atwood, hay dos masas separadas y m_1 y m_2 no son necesariamente iguales). Insertando este lagrangiano en (7.118), encontramos que

$$-\frac{\partial U}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = m_1\ddot{x}. \tag{7.121}$$

Ahora, en el primer miembro $-\partial U/\partial x$ es la componente x de la fuerza que no es de ligadura. (Recuerde que U estaba definida como la energía potencial de las fuerzas que no son de ligadura). A la derecha, $m_1\ddot{x}$ es la componente x de la fuerza total, igual a la suma de todas las fuerzas, las de ligadura y las que no los son. Por consiguiente $m_1\ddot{x} = -\partial U/\partial x + F_x^{\text{lig}}$. Cancelando el término $-\partial U/\partial x$ en ambos miembros de (7.121), llegamos a la importante conclusión de que

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x} = F_x^{\text{lig}} \tag{7.122}$$

con el resultado correspondiente para las componentes y. Así, la importancia del multiplicador de Lagrange es la siguiente: multiplicado por las derivadas parciales apropiadas de la función de ligadura $f(x, y)$, el multiplicador de Lagrange $\lambda(t)$ proporciona las componentes correspondientes de la fuerza de ligadura.

Veamos ahora cómo funcionan estas ideas en la práctica usando el formalismo para analizar el ejemplo de la máquina de Atwood.

Ejemplo 7.8 *Máquina de Atwood usando un multiplicador de Lagrange*

Analizar la máquina de Atwood de la Figura 7.6 (mostrado otra vez aquí como en la Figura 7.11) por el método de los multiplicadores de Lagrange y usando las coordenadas x e y de las dos masas.

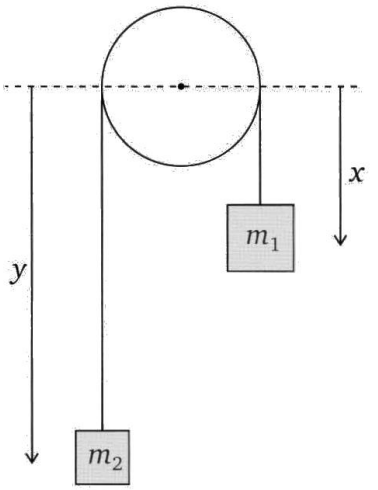


Figura 7.11. La máquina de Atwood otra vez.

En términos de las coordenadas dadas, el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = T - U = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{y}^2 + m_1gx + m_2gy \tag{7.123}$$

y la ecuación de ligadura es

$$f(x, y) = x + y = \text{const.} \tag{7.124}$$

La ecuación de Lagrange modificada (7.118) para x se lee

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \qquad \text{o} \qquad m_1g + \lambda = m_1\ddot{x} \tag{7.125}$$

y la de y es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \qquad \text{o} \qquad m_2g + \lambda = m_2\ddot{y}. \tag{7.126}$$

Estas dos ecuaciones, junto con la ecuación de ligadura (7.124), se resuelven fácilmente para las incógnitas $x(t)$, $y(t)$ y $\lambda(t)$. De (7.124) vemos que $\ddot{y} = -\ddot{x}$, y entonces restando (7.126) de (7.125) podemos eliminar λ y llegar al mismo resultado que antes,

$$\ddot{x} = (m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2).$$

Para entender mejor las dos ecuaciones de Lagrange modificadas (7.125) y (7.126), es de mucha ayuda compararlas con las dos ecuaciones de la solución newtoniana. La segunda ley de Newton para m_1 es

$$m_1g - F_t = m_1\ddot{x}$$

donde F_t es la tensión de la cuerda, y para m_2 es

$$m_2 g - F_t = m_2 \ddot{y}.$$

Estas son precisamente las dos ecuaciones de Lagrange (7.125) y (7.126), con el multiplicador de Lagrange identificado como la fuerza de ligadura

$$\lambda = -F_t.$$

[Dos comentarios breves: el signo menos se debe a que ambas coordenadas x e y fueron medidas hacia abajo, mientras que las dos fuerzas de la tensión son hacia arriba. En general, de acuerdo con (7.122) la fuerza de ligadura es $\lambda \partial f / \partial x$, pero en este caso sencillo, $\partial f / \partial x = 1$].

Se pueden encontrar algunos ejemplos más del uso de los multiplicadores de Lagrange en los Problemas 7.50 a 7.52.

Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 7

El lagrangiano

El **lagrangiano** $\mathcal{L}$ de un sistema conservativo se define como

$$\mathcal{L} = T - U, \qquad \text{[Ec. (7.3)]}$$

donde T y U son respectivamente las energías cinética y potencial.

Coordenadas generalizadas

Los n parámetros $q_1, \ldots, q_n$ son **coordenadas generalizadas** para un sistema de N partículas si la posición de cada partícula $\mathbf{r}_\alpha$ se puede expresar como una función de $q_1, \ldots, q_n$ (y posiblemente del tiempo t) y al revés, y si n es el número más pequeño que permite que el sistema sea descrito de esta manera. [Ecs. (7.34) y (7.35)]

Si $n < 3N$ (en tres dimensiones) se dice que el sistema está **ligado**. Las coordenadas $q_1, \ldots, q_n$ se dice que son las **naturales** si las relaciones funcionales de las $\mathbf{r}_\alpha$ con las $q_1, \ldots, q_n$ son independientes del tiempo. El número de **grados de libertad** de un sistema es el número de coordenadas que pueden ser variadas independientemente. Si el número de grados de libertad es igual el número de coordenadas generalizadas (en algún sentido el estado «normal» de casos), se dice que el sistema es **holónomo**. [Sección (7.3)]

Ecuación de Lagrange

Para cualquier sistema holónomo, la segunda ley de Newton es equivalente a las n **ecuaciones de Lagrange**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad [i = 1, \ldots, n] \qquad \text{[Secciones (7.3) y (7.4)]}$$

y las ecuaciones de Lagrange resultan ser equivalentes al principio de Hamilton (un hecho que usamos sólo para probar las ecuaciones de Lagrange). [Ec. (7.8)]

Momentos generalizados y coordenadas ignorables

El i-ésimo **momento generalizado** p_i se define como la derivada

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Si $\partial \mathcal{L}/\partial q_i = 0$, entonces decimos que la coordenada q_i es **ignorable** y el momento generalizado correspondiente es constante. [Sección (7.6)]

El hamiltoniano

El **hamiltoniano** se define como

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}. \qquad \text{[Ec. (7.90)]}$$

Si $\partial \mathcal{L}/\partial t = 0$, entonces $\mathcal{H}$ se conserva; si las coordenadas $q_1, \cdots, q_n$ son naturales, $\mathcal{H}$ es justo la energía del sistema.

Lagrangiano para una carga en un campo electromagnético

El lagrangiano para una carga q en un campo electromagnético es

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \tfrac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - q(V - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}).] \qquad \text{[Ec. (7.103)}$$

Problemas para el Capítulo 7

Los asteriscos indican el nivel aproximado de dificultad, desde los más fáciles (⋆) hasta los más difíciles (⋆ ⋆ ⋆).

Sección 7.1 Ecuaciones de Lagrange para el movimiento libre

7.1 ⋆ Escribir el lagrangiano para un proyectil (sometido a resistencia del aire nula) en términos de sus coordenadas cartesianas (x, y, z), con z medida verticalmente hacia arriba. Encontrar las tres ecuaciones de Lagrange y mostrar que son exactamente lo que se esperaría para las ecuaciones de movimiento.

7.2 ⋆ Escribir el lagrangiano para una partícula unidimensional que se mueve por el eje x y está sometida a una fuerza $F = -kx$ (con k positivo). Encontrar la ecuación de Lagrange del movimiento y resolverla.

7.3 ⋆ Considerar una masa m que se mueve en dos dimensiones con energía potencial $U(x, y) = \frac{1}{2} k r^2$, donde $r^2 = x^2 + y^2$. Escribir el lagrangiano, usando las coordenadas x e y, y encontrar las dos ecuaciones de Lagrange del movimiento. Describir sus soluciones. [Esta es la energía potencial de un ión en una «trampa», que puede usarse para estudiar las propiedades de los iones atómicos individuales].

7.4 ⋆ Considerar una masa m que se mueve en un plano sin rozamiento que está inclinado a un ángulo α con la horizontal. Escribir el lagrangiano en términos de las coordenadas x, medidas

horizontalmente cruzando la pendiente, e y, medida hacia abajo de la pendiente. (Tratar el sistema como bidimensional, pero incluir la energía potencial gravitatoria). Encontrar las dos ecuaciones de Lagrange y mostrar que son lo que se habría esperado.

7.5 ⋆ Hallar las componentes de $\nabla f(r,\phi)$ en coordenadas polares en dos dimensiones. [*Ayuda:* Recordar que la variación en el escalar f como resultado de un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}$ es $df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$].

7.6 ⋆ Considerar dos partículas que se mueven sin ligaduras en tres dimensiones, con energía potencial $U(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$. **(a)** Escribir las seis ecuaciones de movimiento obtenidas al aplicar la segunda ley de Newton a cada partícula. **(b)** Escribir el lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\dot{\mathbf{r}}_1,\dot{\mathbf{r}}_2) = T - U$ y mostrar que las seis ecuaciones de Lagrange son las mismas que las seis ecuaciones newtonianas de la parte (a). Esto establece la validez de las ecuaciones de Lagrange en coordenadas rectangulares, lo que por otro lado establece el principio de Hamilton. Como el último es independiente de las coordenadas, esto prueba las ecuaciones de Lagrange en cualquier sistema de coordenadas.

7.7 ⋆ Hacer el Problema 7.6, pero para N partículas que se mueven sin ligaduras en tres dimensiones (en cuyo caso hay $3N$ ecuaciones de movimiento).

7.8 ⋆⋆ **(a)** Escribir el lagrangiano $\mathcal{L}(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)$ para dos partículas de masas iguales, $m_1 = m_2 = m$, confinadas en el eje x y conectadas por un muelle con energía potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$. [Aquí x es la extensión del muelle, $x = (x_1 - x_2 - l)$, donde l es la longitud del muelle sin estirar, y se supone que la masa 1 permanece a la derecha de la masa 2 en todo momento]. **(b)** Reescribir $\mathcal{L}$ en término de las nuevas variables $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ (la posición del CM) y x (la extensión), y escribir las dos ecuaciones de Lagrange para X y x. **(c)** Resolverlo para $X(t)$ y $x(t)$ y describir el movimiento.

Sección 7.3 Sistemas ligados en general

7.9 ⋆ Considerar una cuenta de collar que está enhebrada en un aro circular de radio R que descansa sobre el plano xy con su centro en O, y usar el ángulo ϕ de las coordenadas polares bidimensionales como la coordenada generalizada para describir la posición de la cuenta. Escribir las ecuaciones que dan las coordenadas cartesianas (x,y) en términos de ϕ y la ecuación que da la coordenada generalizada ϕ en términos de (x,y).

7.10 ⋆ Una partícula está obligada a moverse sobre la superficie de un cono circular con su eje en el eje z, su vértice en el origen (apuntando hacia abajo), y ángulo mitad α. La posición de la partícula se puede especificar con las dos coordenadas generalizadas, que se pueden elegir que sean las coordenadas (ρ,ϕ) de las coordenadas polares cilíndricas. Escribir las ecuaciones que dan las tres coordenadas cartesianas de la partícula en términos de las coordenadas generalizadas (ρ,ϕ) y viceversa.

7.11 ⋆ Considerar el péndulo de la Figura 7.4, suspendido dentro de un vagón de tren, pero suponiendo que el vagón está oscilando hacia atrás y hacia delante, de tal manera que el punto de suspensión está en la posición $x_s = A\cos\omega t$, $y_s = 0$. Usar el ángulo ϕ como la coordenada generalizada y escribir las ecuaciones que dan las coordenadas cartesianas del balanceo en términos de ϕ y viceversa.

Sección 7.4 Prueba de las ecuaciones de Lagrange con ligaduras

7.12 ⋆ Las ecuaciones de Lagrange en la forma discutida en este capítulo se cumplen sólo si las fuerzas (al menos las fuerzas que no son de ligadura) se pueden obtener a partir de una energía potencial. Para tener una idea de cómo pueden ser modificadas para incluir fuerzas como el rozamiento, considerar lo siguiente: una única partícula en una dimensión está sometida a varias fuerzas conservativas (fuerza neta conservativa $= F = -\partial U/\partial x$) y una fuerza no conservativa (llamémosla F_{fric}). Definir el lagrangiano como $\mathcal{L} = T - U$ y mostrar que la modificación apropiada es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + F_{\text{fric}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}.$$

7.13 ⋆⋆ En la Sección 7.4 [Ecuaciones (7.41) hasta (7.51)], demostré las ecuaciones de Lagrange para una única partícula obligada a moverse en una superficie bidimensional. Seguir los mismos pasos para probar las ecuaciones de Lagrange para un sistema consistente en dos partículas sometidas a varias ligaduras sin especificar. [*Ayuda*: La fuerza neta sobre la partícula 1 es la suma de la fuerza de ligadura $\mathbf{F}_1^{\text{lig}}$ y la fuerza que no es de ligadura $\mathbf{F}_1$, y lo mismo para la partícula 2. Las fuerzas de ligadura aparecen de muchas maneras posibles (la fuerza normal de una superficie, la tensión de una cuerda atada entre las partículas, etc.), pero es siempre cierto que el trabajo neto realizado por todas las fuerzas de ligadura en cualquier desplazamiento coherente con las ligaduras es cero (esto es la propiedad que define las fuerzas de ligadura). Mientras tanto, damos por supuesto que las fuerzas de no ligadura son derivables de una energía potencial $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$; esto es, $\mathbf{F}_1 = -\boldsymbol{\nabla}_1 U$ y lo mismo para la partícula 2. Escribir la diferencia δS entre la acción para el camino correcto dada por $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ y cualquier camino cercano incorrecto dado por $\mathbf{r}_1(t) + \boldsymbol{\epsilon}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t) + \boldsymbol{\epsilon}_2(t)$. Siguiendo los pasos de la Sección 7.4, se puede demostrar que δS está dado por una integral análoga a (7.49), y ésta es cero por la propiedad que define las fuerzas de ligadura].

Sección 7.5 Ejemplos de ecuaciones de Lagrange

7.14 ⋆ La Figura 7.12 muestra un modelo burdo de un yoyó. Una cuerda sin masa está suspendida verticalmente desde un punto fijo y el otro extremo está enrollado varias veces a un cilindro uniforme de masa m y radio R. Cuando el cilindro se deja libre se mueve verticalmente hacia abajo, rotando cuando la cuerda se desenrolla. Escribir el lagrangiano, usando la distancia x como coordenada generalizada. Encontrar la ecuación de Lagrange del movimiento y mostrar que el cilindro se acelera hacia abajo con $\ddot{x} = 2g/3$. [*Ayudas*: Es necesario recordar de los cursos de introducción a la física que la energía cinética total de un cuerpo como un yoyó es $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, donde v es la velocidad del centro de masa, I es el momento de inercia (para un cilindro uniforme, $I = \frac{1}{2}mR^2$) y ω es la velocidad angular alrededor del CM. Se puede expresar ω en términos de $\dot{x}$].

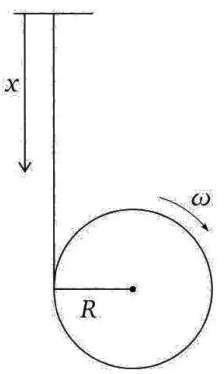


Figura 7.12. Problema 7.14

7.15 ⋆ Una masa m_1 está situada sobre una mesa horizontal sin rozamiento y está enganchada a una cuerda sin masa. La cuerda recorre horizontalmente la mesa hasta el borde, donde pasa por una polea sin masa y sin rozamiento, y después cuelga verticalmente hacia abajo. Se engancha ahora una segunda masa m_2 al final del extremo de la cuerda. Escribir el lagrangiano del sistema. Encontrar la ecuación de Lagrange del movimiento, y resolverla para la aceleración de los bloques. Para la coordenada generalizada, usar la distancia x desde la segunda masa a la parte de arriba de la mesa.

7.16 ⋆ Escribir el lagrangiano para un cilindro (masa m, radio R, y el momento de inercia I) que rueda sin deslizar directo hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Usar como coordenada generalizada la distancia del cilindro x medida hacia abajo del

plano desde su punto de partida. Escribir la ecuación de Lagrange y resolverla para la aceleración del cilindro $\ddot{x}$. Recordar que $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, donde v es la velocidad del centro de masa y ω es la velocidad angular.

7.17 ⋆ Usar el método lagrangiano para encontrar la aceleración de la máquina de Atwood del Ejemplo 7.3 (página 282) incluyendo el efecto de que la polea tenga momento de inercia I. (La energía cinética de la polea es $\frac{1}{2}I\omega^2$, donde ω es su velocidad angular).

7.18 ⋆ Una masa m está suspendida por una cuerda sin masa, el otro extremo de la cual está enrollado varias veces alrededor de un cilindro horizontal, que tiene un momento de inercia I y está libre para rotar alrededor de un eje fijo horizontal. Usando alguna coordenada conveniente, establecer el lagrangiano y la ecuación de Lagrange del movimiento, y hallar la aceleración de la masa m. [La energía cinética del cilindro que rota es $\frac{1}{2}I\omega^2$].

7.19 ⋆ En el Ejemplo 7.5 (página 286) las dos aceleraciones están dadas por las Ecuaciones (7.66) y (7.67). Comprobar que la aceleración del bloque está dada correctamente en el límite $M \to 0$. [Es necesario encontrar las componentes de esta aceleración *relativas a la mesa*].

7.20 ⋆ Un alambre liso está deformado haciendo la forma de una hélice, con coordenadas polares cilíndricas $\rho = R$ y $z = \lambda\phi$, donde R y λ son constantes y el eje z está en posición vertical hacia arriba (y la gravedad verticalmente hacia abajo). Usando z como coordenada generalizada, escribir el lagrangiano para una cuenta de collar de masa m enhebrada en el alambre. Encontrar la ecuación de Lagrange y con ella la aceleración vertical de la cuenta $\ddot{z}$. En el límite en que $R \to 0$, ¿qué es $\ddot{z}$? ¿Tiene sentido?

7.21 ⋆ El centro de una varilla larga sin rozamiento está anclado en el origen, y la varilla está forzada a rotar en un plano horizontal con velocidad angular constante ω. Escribir el lagrangiano para una cuenta de collar enhebrada en la barra, usando r como coordenada generalizada, donde r, ϕ son las coordenadas polares de la cuenta. (Advertir que ϕ no es una variable independiente porque está fijada por la rotación de la barra para que sea $\phi = \omega t$). Resolver la ecuación de Lagrange para $r(t)$. ¿Qué pasa si la cuenta está inicialmente en reposo en el origen? Si se libera desde cualquier punto $r_0 > 0$, mostrar que $r(t)$ finalmente crece exponencialmente. Explicar los resultados en términos de la fuerza centrífuga $m\omega^2 r$.

7.22 ⋆ Usando el ángulo usual ϕ como coordenada generalizada, escribir el lagrangiano para un péndulo simple de longitud l suspendido de un techo de un ascensor que se acelera hacia arriba con aceleración constante a. (Tener cuidado cuando se escriba T; es probablemente más seguro escribir la velocidad de la pesa en forma de componentes). Encontrar la ecuación de Lagrange del movimiento y mostrar que es la misma que para un péndulo normal sin aceleración, excepto que g ha sido reemplazada por $g + a$. En particular, la frecuencia angular de pequeñas oscilaciones es $\sqrt{(g+a)/l}$.

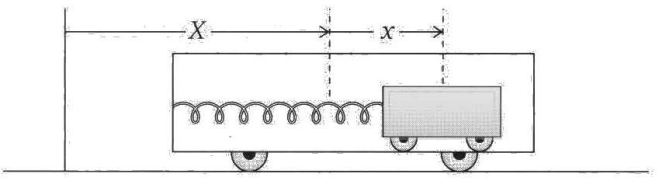


Figura 7.13. Problema 7.23.

7.23 ⋆ Un coche pequeño (masa m) está montado sobre unos raíles dentro de un coche grande. Los dos están enganchados por un muelle (constante de fuerza k) de tal manera que el coche pequeño está en equilibrio en el punto medio del grande. La distancia del coche pequeño a su posición de equilibrio se denota por x y la del grande a un punto fijo en el suelo es X, como se muestra en la Figura 7.13. El coche grande es forzado ahora a oscilar de tal manera que $X = A\cos\omega t$, con ambos A y ω fijos. Establecer el lagrangiano para el movimiento del coche pequeño y mostrar que la ecuación de Lagrange tiene la forma

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = B\cos\omega t$$

donde ω_0 es la frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ y B es una constante. Esta es la forma supuesta en la Sección 5.5, la ecuación (5.57), para oscilaciones forzadas (excepto que estamos ignorando el amortiguamiento). Por consiguiente el sistema descrito aquí sería una manera de comprender el movimiento discutido allí. (Podríamos llenar el coche grande con melaza para proporcionar algo de amortiguamiento).

7.24 ⋆ Vimos en el Ejemplo 7.3 (página 282) que la aceleración de la máquina de Atwood es $\ddot{x} = (m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2)$. A veces se argumenta que este resultado es «obvio« porque, dicen, la fuerza efectiva sobre el sistema es $(m_1 - m_2)g$ y la masa efectiva es $(m_1 + m_2)$. Esto no es, quizá, tan obvio, pero se manifiesta de manera muy natural en el enfoque lagrangiano. Recordar que la ecuación de Lagrange puede pensarse como la [ecuación (7.17)]

$$\text{(fuerza generalizada)} = \text{(tasa de variación del momento generalizado)}.$$

Mostrar que para la máquina de Atwood la fuerza generalizada es $(m_1 - m_2)g$ y el momento generalizado $(m_1 + m_2)\dot{x}$. Comentar.

7.25 ⋆ Probar que la energía potencial de una fuerza central $\mathbf{F} = -kr^n\hat{\mathbf{r}}$ (con $n \neq -1$) es $U = kr^{n+1}/(n+1)$. Concretamente, si $n = 1$, entonces $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ y $U = \frac{1}{2}kr^2$.

7.26 ⋆ En el Ejemplo 7.7 (página 292) vimos que la cuenta en un aro que gira puede realizar pequeñas oscilaciones alrededor de cualquiera de sus puntos de equilibrio estable. Verificar que la frecuencia de oscilación Ω' definida en (7.79) es igual a $\sqrt{\omega^2 - (g/\omega R)^2}$ como se enuncia en (7.80).

7.27 ⋆⋆ Consideremos una máquina doble de Atwood construida como sigue: una masa $4m$ está suspendida de una cuerda que pasa por una polea sin masa con rodamientos sin rozamiento. El otro extremo de esta cuerda soporta una segunda polea, por la cual pasa una segunda cuerda de la que cuelgan una masa $3m$ en un extremo y otra masa m en el otro. Usando dos coordenadas generalizadas convenientes, establecer el lagrangiano y usar las ecuaciones de Lagrange para encontrar la aceleración de la masa $4m$ cuando el sistema se deja libre. Explicar por qué la polea de arriba rota incluso aunque transporte pesos iguales en cada lado.

7.28 ⋆⋆ Un par de puntos necesitan comprobación del Ejemplo 7.6 (página 288). **(a)** Desde el punto de vista de un sistema no inercial que rota con el aro, la cuenta está sometida a la fuerza de la gravedad y a una fuerza centrífuga $m\omega^2\rho$ (además de la fuerza de ligadura, la cual es la fuerza normal del alambre). Verificar que en los puntos de equilibrio dados por (7.71), las componentes tangenciales de estas dos fuerzas equilibran una a la otra. (Un diagrama de cuerpos libres ayudará a verlo). **(b)** Verificar que el punto de equilibrio en la parte de arriba ($\theta = \pi$) es inestable. **(c)** Verificar que el equilibrio en el segundo punto dado por (7.71) (el de la izquierda, con θ negativo) es estable.

7.29 ⋆⋆ La Figura 7.14 muestra un péndulo simple (masa m, longitud l) cuyo punto de apoyo P está enganchado al borde de una rueda (centro O, radio R) que está forzada a rotar a una velocidad angular fija ω. En $t = 0$, el punto P está nivelado con O a la derecha. Escribir el lagrangiano y encontrar la ecuación de movimiento para el ángulo ϕ. [*Ayuda:* Tener cuidado al escribir la energía cinética T. Una manera segura de obtener la velocidad correcta es escribir la posición de la pesa en el instante t, y después diferenciar]. Comprobar que la respuesta tiene sentido en el caso especial en que $\omega = 0$.

7.30 ⋆⋆ Considerar el péndulo de la Figura 7.4, suspendido en el interior de un vagón de tren que está siendo forzado a acelerarse con aceleración constante a. **(a)** Escribir el lagrangiano para el sistema y la ecuación de movimiento para el ángulo ϕ. Usar un truco similar al utilizado en la ecuación (5.11) para escribir la combinación de $\operatorname{sen}\phi$ y $\cos\phi$ como un múltiplo de $\operatorname{sen}(\phi + \beta)$. **(b)** Encontrar el ángulo de equilibrio ϕ al cual el péndulo puede permanecer fijo (relativo al vagón) a medida que el vagón se acelera. Usar la ecuación de movimiento para mostrar que este

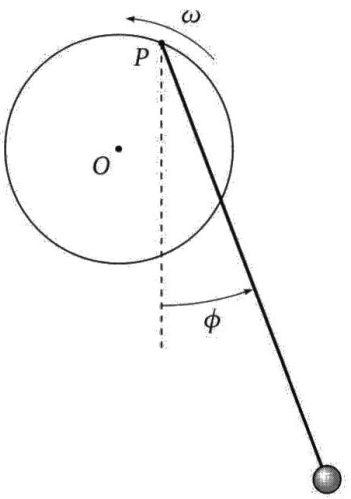


Figura 7.14. Problema 7.29.

equilibrio es estable. ¿Cuál es la frecuencia de las pequeñas oscilaciones en torno a su posición de equilibrio? (Veremos una manera mucho más ingeniosa de resolver este problema en el Capítulo 9, pero el método lagrangiano sí proporciona una ruta directa a la respuesta).

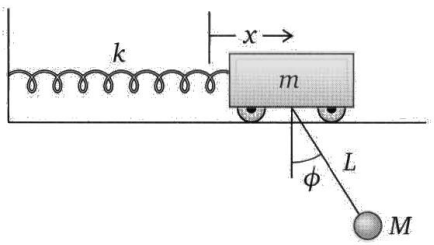


Figura 7.15. Problema 7.31.

7.31 ⋆⋆ Un péndulo simple (masa M y longitud L) está suspendido de una vagoneta (de masa m) que puede oscilar al final de un muelle de constante de fuerza k, como se muestra en la Figura 7.15. **(a)** Escribir el lagrangiano en términos de las dos coordenadas generalizadas x y ϕ, donde x es la extensión del muelle desde su longitud de equilibrio. (Leer la ayuda del Problema 7.29). Encontrar las dos ecuaciones de Lagrange. (Advertencia: ¡Tienen muy mala pinta!). **(b)** Simplificar las ecuaciones al caso en que ambos x y ϕ son pequeños. (Siguen siendo bastante feas y observar, en particular, que todavía están *acopladas*; esto es, cada ecuación incluye a ambas variables. No obstante, veremos cómo resolver estas ecuaciones en el Capítulo 11 (ver concretamente el Problema 11.19).

7.32 ⋆⋆ Considerar el cubo balanceado sobre un cilindro como se describe en el Ejemplo 4.7 (página 144). Suponiendo que $b < r$, usar el método lagrangiano para encontrar la frecuencia angular de pequeñas oscilaciones en torno a la parte de arriba. El procedimiento más simple es hacer las aproximaciones de ángulo pequeño a $\mathcal{L}$ antes de diferenciar para obtener la ecuación de Lagrange. Como siempre, tener cuidado al escribir la energía cinética; es decir, $\frac{1}{2}(mv^2 + I\dot{\theta}^2)$, donde v es la velocidad del CM e I es el momento de inercia alrededor del CM ($2mb^2/3$). La manera segura de hallar v es escribir las coordenadas del CM y entonces diferenciar.

7.33 ⋆⋆ Una pastilla de jabón (masa m) está en reposo sobre una plancha rectangular sin rozamiento que descansa sobre una mesa horizontal. En el instante $t = 0$, comienzo levantando un borde de la plancha de tal manera que pivote en torno al borde opuesto con velocidad angular constante ω, y el jabón empieza a deslizar hacia el borde de abajo. Mostrar que la ecuación de

movimiento para el jabón tiene la forma $\ddot{x} - \omega^2 x = -g \operatorname{sen} \omega t$, donde x es la distancia del jabón desde el borde de abajo. Resolver para $x(t)$, dado que $x(0) = x_0$. [Se necesitará usar el método utilizado para resolver la ecuación (5.48). Se puede resolver fácilmente la ecuación homogénea; como solución particular probar $x = A \operatorname{sen} \omega t$ y resolver para A].

7.34 ⋆⋆ Considerar el conocido problema de una vagoneta de masa m que se mueve a lo largo del eje x enganchado a un muelle (constante de fuerza k), cuyo otro extremo está sujeto fijo (Figura 5.2). Si ignoramos la masa del muelle (como casi siempre hacemos) entonces sabemos que la vagoneta ejecuta un movimiento armónico simple con frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$. Usando el enfoque lagrangiano, se puede describir el efecto de la masa del muelle M de la siguiente manera: **(a)** Suponiendo que el muelle es uniforme y se estira uniformemente, mostrar que su energía cinética es $\frac{1}{6} M \dot{x}^2$. (Como siempre x es la extensión del muelle desde su longitud de equilibrio). Escribir el lagrangiano del sistema formado por la vagoneta más el muelle. (*Nota:* la energía potencial sigue siendo $\frac{1}{2} k x^2$). **(b)** Escribir la ecuación de Lagrange y mostrar que la vagoneta todavía realiza un MAS pero con frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/(m + M/3)}$; esto es, el efecto de la masa del muelle M es sólo añadir $M/3$ a la masa de la vagoneta.

7.35 ⋆⋆ La Figura 7.16 es una vista de pájaro de un aro liso horizontal de alambre que está forzado a rotar a una velocidad angular fija ω en torno a un eje vertical que pasa por el punto A. Una cuenta de masa m está enhebrada en el aro y es libre de moverse por él, con su posición especificada por el ángulo ϕ que forma en el centro con el diámetro AB. Encontrar el lagrangiano del sistema usando ϕ como coordenada generalizada. (Leer la ayuda del Problema 7.29). Usar la ecuación de Lagrange del movimiento para mostrar que la cuenta oscila alrededor del punto B exactamente como un péndulo simple. ¿Cuál es la frecuencia de estas oscilaciones si su amplitud es pequeña?

7.36 ⋆⋆⋆ Un péndulo está hecho a partir de un muelle sin masa (constante de fuerza k y longitud sin estirar l_0) que está suspendido por un extremo de pivote fijo O y tiene una masa m enganchada en su otro extremo. El muelle se puede estirar y comprimir pero no se puede doblar, y el sistema entero está confinado en un único plano vertical. **(a)** Escribir el lagrangiano para el péndulo, usando como coordenadas generalizadas el ángulo usual ϕ y la longitud r del muelle. **(b)** Encontrar las dos ecuaciones de Lagrange del sistema e interpretarlas en términos de la segunda ley de Newton, como se da en la ecuación (1.48). **(c)** Las ecuaciones de la parte (b) no se pueden resolver analíticamente en general. Sin embargo, *pueden* ser resueltas para pequeñas oscilaciones. Hacerlo y describir el movimiento. [*Ayuda:* Llamar l a la longitud de equilibrio del muelle con la masa colgando de él y escribir $r = l + \epsilon$. Las «pequeñas oscilaciones» involucran sólo pequeños valores de ϵ y ϕ, así que se pueden usar las aproximaciones de ángulos pequeños y prescindir en las ecuaciones de todos los términos que tengan potencias de ϵ o ϕ (o sus derivadas) mayores que la primera (también productos de ϵ y ϕ o sus derivadas). Esto simplifica todo drásticamente y desacopla las ecuaciones].

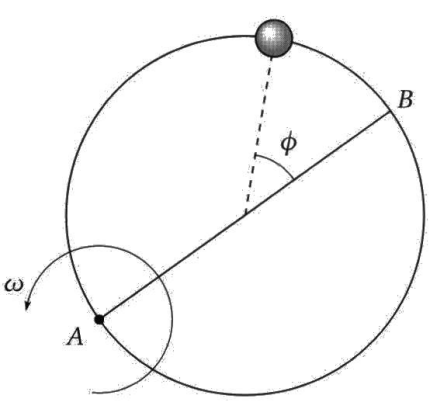


Figura 7.16. Problema 7.35.

7.37 ⋆⋆⋆ Dos masas iguales, $m_1 = m_2 = m$, están unidas por una cuerda sin masa de longitud l que pasa a través de un hueco en una mesa horizontal sin rozamiento. La primera masa se desliza sobre la mesa mientras que la segunda cuelga debajo de la mesa y se mueve arriba y abajo en una línea vertical. **(a)** Suponiendo que la cuerda permanece tensa, escribir el lagrangiano del sistema en términos de las coordenadas polares (r, ϕ) de la masa que está sobre la mesa. **(b)** Encontrar las dos ecuaciones de Lagrange e interpretar la ecuación de ϕ en términos del momento angular ℓ de la primera masa. **(c)** Expresar $\dot{\phi}$ en términos de ℓ y eliminar $\dot{\phi}$ de la ecuación de r. Después usar la ecuación r para hallar el valor $r = r_0$ al cual la primera masa se puede mover en una trayectoria circular. Interpretar la respuesta en términos newtonianos. **(d)** Suponer que la primera masa se está moviendo en esta trayectoria circular y se le da un suave empujón en la dirección radial. Escribir $r(t) = r_0 + \epsilon(t)$ y reescribir la ecuación de r en términos de $\epsilon(t)$ prescindiendo de todas las potencias de $\epsilon(t)$ más altas que la primera. Mostrar que la trayectoria circular es estable y que $r(t)$ oscila sinusoidalmente en torno a r_0. ¿Cuál es la frecuencia de sus oscilaciones?

7.38 ⋆⋆⋆ Una partícula está obligada a moverse sobre la superficie de un cono circular con su eje sobre el eje z vertical, el vértice en el origen (apuntando hacia abajo), y ángulo mitad α. **(a)** Escribir el lagrangiano $\mathcal{L}$ en términos de las coordenadas polares esféricas r y ϕ. **(b)** Encontrar las dos ecuaciones de movimiento. Interpretar la ecuación de ϕ en términos del momento angular ℓ_z, y usarla para eliminar $\dot{\phi}$ de la ecuación de r a favor de la constante ℓ_z. ¿Tiene sentido la ecuación de r en el caso en que $\ell_z = 0$? Hallar el valor r_0 de r al cual la partícula puede permanecer en un camino horizontal circular. **(c)** Suponer que se le da a la partícula un pequeño empujón en dirección radial, de tal manera que $r(t) = r_0 + \epsilon(t)$, donde $\epsilon(t)$ es pequeño. Usar la ecuación de r para decidir si el camino circular es estable. Si lo es, ¿con qué frecuencia oscila r alrededor de r_0?

7.39 ⋆⋆⋆ **(a)** Escribir el lagrangiano para una partícula que se mueve en tres dimensiones bajo la influencia de una fuerza central conservativa con energía potencial $U(r)$, usando coordenadas polares esféricas (r, θ, ϕ). **(b)** Escribir las tres ecuaciones de Lagrange y explicar su significado en términos de la aceleración radial, el momento angular, etc. (La ecuación de θ tiene truco, porque se verá que implica que la componente ϕ de $\boldsymbol{\ell}$ varía con el tiempo, lo que parece contradecir la conservación del momento angular. Recordar sin embargo, que ℓ_ϕ es la componente de $\boldsymbol{\ell}$ en una dirección *variable*). **(c)** Suponer que inicialmente el movimiento está en el plano ecuatorial (esto es, $\theta_0 = \pi/2$ y $\dot{\theta}_0 = 0$). Describir el movimiento subsiguiente. **(d)** Suponer en lugar de ello, que el movimiento inicial es a lo largo de una línea de longitud (esto es, $\dot{\phi}_0 = 0$). Describir el movimiento subsiguiente.

7.40 ⋆⋆⋆ El «péndulo esférico» es sólo un péndulo simple que puede moverse libremente hacia los lados en cualquier dirección. (En contraste un «péndulo simple» (sin calificar) está restringido a un único plano vertical). La pesa de un péndulo esférico se mueve en una esfera, centrada en el punto de apoyo con radio $r = R$, la longitud del péndulo. Una elección conveniente de coordenadas es polares esféricas, r, θ, ϕ, con el origen en el punto de apoyo y el eje polar apuntando directamente hacia abajo. Las dos variables θ y ϕ resultan ser una buena elección de coordenadas generalizadas. **(a)** Encontrar el lagrangiano y las dos ecuaciones de Lagrange. **(b)** Explicar qué nos dice la ecuación de ϕ sobre la componente z del momento angular ℓ_z. **(c)** Para el caso especial en que $\phi =$ constante, describir lo que significa la ecuación de θ. **(d)** Usar la ecuación de ϕ para sustituir $\dot{\phi}$ por ℓ_z en la ecuación de θ y después hallar el valor de θ_0 en el que θ puede permanecer constante. ¿Por qué se denomina a este movimiento péndulo cónico? **(e)** Mostrar que si $\theta = \theta_0 + \epsilon$, con ϵ pequeño, entonces θ oscila en torno a θ_0 en movimiento armónico. Describir el movimiento de la pesa del péndulo.

7.41 ⋆⋆⋆ Considerar una cuenta de collar de masa m que se desliza sin rozamiento por un alambre que está doblado en la forma de una parábola y está girando con velocidad angular constante ω alrededor de su eje vertical, como se muestra en la Figura 7.17. Usar coordenadas polares cilíndricas y tomar esta ecuación para la parábola $z = k\rho^2$. Escribir el lagrangiano en términos de ρ como la coordenada generalizada. Encontrar la ecuación de movimiento de la cuenta y

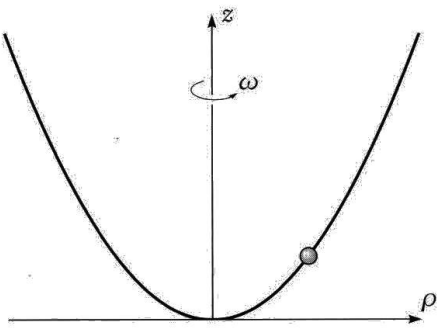


Figura 7.17. Problema 7.41.

determinar si existen posiciones de equilibrio, es decir, valores de ρ para los cuales la cuenta puede permanecer fija, sin deslizar arriba o abajo del alambre que gira. Discutir la estabilidad de cualesquiera posiciones de equilibrio que se encuentren.

7.42 ⋆⋆⋆ [Ordenador] En el Ejemplo 7.7 (página 292) vimos que la cuenta en un aro que gira puede realizar pequeñas oscilaciones en torno a sus puntos de equilibrio estable distintos de cero que son aproximadamente sinusoidales, con frecuencia $\Omega' = \sqrt{\omega^2 - (g/\omega R)^2}$ como en (7.80). Investigar cómo de buena es esta aproximación resolviendo la ecuación de movimiento (7.73) numéricamente y después representando gráficamente la solución numérica y la solución aproximada $\theta(t) = \theta_0 + A\cos(\Omega' t - \delta)$ en la misma gráfica. Tomar los números siguientes: $g = R = 1$ y $\omega^2 = 2$, y las condiciones iniciales $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\theta(0) = \theta_0 + \epsilon_0$, donde $\epsilon_0 = 1$. Repetir con $\epsilon_0 = 10$. Comentar los resultados.

7.43 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Considerar una rueda sin masa, de radio R colocada sobre un eje horizontal sin rozamiento. Una masa puntual M se encuentra pegada al borde y un cordel sin masa está enrollado varias veces alrededor del perímetro, colgando verticalmente hacia abajo con una masa m suspendida de su extremo inferior. (Ver la Figura 4.28). Inicialmente estoy sujetando la rueda con M verticalmente debajo del eje. En $t = 0$, suelto la rueda y m comienza a caer verticalmente hacia abajo. **(a)** Escribir el lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$ como una función del ángulo ϕ a través del cual ha girado la rueda. Encontrar la ecuación de movimiento y demostrar que, siempre que $m < M$, existe una posición de equilibrio estable. **(b)** Suponiendo que $m < M$, esbozar la energía potencial $U(\phi)$ para $-\pi \le \phi \le 4\pi$ y usar la gráfica para explicar la posición de equilibrio hallada. **(c)** Como la ecuación de movimiento no puede resolverse en términos de funciones elementales, vamos a resolverla numéricamente. Esto requiere elegir valores numéricos para los diferentes parámetros. Tomar $M = g = R = 1$ (esto asciende a una cantidad conveniente de unidades) y $m = 0{,}7$. Antes de resolver la ecuación hacer un plano detallado de $U(\phi)$ frente a ϕ y predecir el tipo de movimiento esperado cuando M es liberado del reposo en $\phi = 0$. Después resolver la ecuación de movimiento para $0 \le t \le 20$ y verificar la predicción. **(d)** Repetir el apartado (c), pero con $m = 0{,}8$.

7.44 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Si aún no se ha hecho, resolver el Problema 7.29. Se podría esperar que la rotación de la rueda tenga poco efecto sobre el péndulo, siempre y cuando la rueda sea pequeña y rote lentamente. **(a)** Verificar esta suposición resolviendo la ecuación de movimiento numéricamente, con los siguientes números: tomar g y l para que sean 1. (Esto supone que la frecuencia natural $\sqrt{g/l}$ del péndulo también es 1). Tomar $\omega = 0{,}1$, de manera que la frecuencia rotacional de la rueda sea pequeña en comparación con la frecuencia natural del péndulo; y tomar el radio $R = 0{,}2$, que es significativamente menor que la longitud del péndulo. Como condiciones iniciales tomar $\phi = 0{,}2$ y $\dot{\phi} = 0$ en $t = 0$, y hacer una gráfica de la solución $\phi(t)$ para $0 < t < 20$. La gráfica debería parecerse mucho a las oscilaciones sinusoidales de un péndulo simple ordinario. ¿Parece correcto el período? **(b)** Ahora representar $\phi(t)$ para $0 < t < 100$ y advertir que el apoyo que rota sí que supone una diferencia pequeña, causando que la amplitud de las oscilaciones crezca y disminuya periódicamente. Hacer algún comentario sobre el período de estas pequeñas fluctuaciones.

Sección 7.8 Más sobre las leyes de conservación*

7.45 ⋆⋆ **(a)** Verificar que los coeficientes A_{ij} en la importante expresión (7.94) para la energía cinética de cualquier sistema «natural» son simétricos; esto es, $A_{ij} = A_{ji}$. **(b)** Probar que para cualesquiera n variables $v_1, \ldots, v_n$

$$\frac{d}{dv_i}\sum_{j,k} A_{jk} v_j v_k = 2\sum_j A_{ij} v_j \,.$$

[*Ayuda:* Comenzar con el caso en que $n = 2$, para el que se pueden escribir las sumas completas. Observar que se necesita el resultado de la parte (a)]. Esta identidad es útil en muchas áreas de la física; ya la utilizamos para probar la expresión (7.96) para el momento generalizado p_i.

7.46 ⋆⋆ El teorema de Noether afirma que existe una conexión entre los principios de invariancia y las leyes de conservación. En la Sección 7.8 vimos que una invariancia traslacional del lagrangiano implica la conservación del momento lineal total. Aquí se probará que la invariancia rotacional de $\mathcal{L}$ implica la conservación del momento angular total. Supongamos que el lagrangiano de un sistema de N partículas permanece invariable bajo rotaciones en torno a cierto eje de simetría. **(a)** Sin pérdida de generalidad, tomar este eje que sea el eje z, y mostrar que el lagrangiano no cambia cuando todas las partículas se mueven simultáneamente desde $(r_\alpha, \theta_\alpha, \phi_\alpha)$ hasta $(r_\alpha, \theta_\alpha, \phi_\alpha + \epsilon)$ (mismo ϵ para todas las partículas). Y entonces mostrar que

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} = 0.$$

(b) Usar las ecuaciones de Lagrange para mostrar que esto implica que el momento angular total L_z alrededor del eje de simetría es constante. En particular, si el lagrangiano es invariante bajo rotaciones alrededor de todos los ejes, entonces todas las componentes de **L** se conservan.

7.47 ⋆⋆⋆ En el Capítulo 4 (al final de la Sección 4.7) afirmé que, para un sistema con un grado de libertad, las posiciones de equilibrio estable «normalmente» corresponden a mínimos de la energía potencial $U(q)$. Usando la mecánica lagrangiana, se puede probar ahora esta afirmación. **(a)** Considerar un sistema de un grado de libertad de N partículas con posiciones $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(q)$, donde q es la coordenada generalizada y la transformación entre $\mathbf{r}$ y q no depende del tiempo; esto es, q es lo que hemos acordado llamar ahora «natural». (Esto es el significado de la calificación «normalmente» en el establecimiento de la afirmación: si la transformación depende del tiempo, entonces la afirmación no es necesariamente cierta). Demostrar que la EC tiene la forma $T = \frac{1}{2}A\dot{q}^2$, donde $A = A(q) > 0$ puede depender de q pero no de $\dot{q}$. [Esto corresponde exactamente al resultado (7.94) para n grados de libertad. Si hubiera algún problema con la demostración aquí, revisar la demostración allí]. Demostrar que la ecuación de Lagrange tiene la forma

$$A(q)\ddot{q} = -\frac{dU}{dq} - \frac{1}{2}\frac{dA}{dq}\dot{q}^2.$$

(b) Un punto q_0 es un punto de equilibrio si, cuando el sistema se coloca en q_0 con $\dot{q} = 0$, permanece allí. Demostrar que q_0 es un punto de equilibrio si y sólo si $dU/dq = 0$. **(c)** Demostrar que el equilibrio es estable si y sólo si U es mínimo en q_0. **(d)** Si se hizo el Problema 7.30, demostrar que el péndulo de ese problema no cumple las condiciones de este problema, y que el resultado aquí demostrado es falso para ese sistema.

Sección 7.9 Ecuaciones de Lagrange para fuerzas magnéticas*

7.48 ⋆⋆ Sea $F = F(q_1, \ldots, q_n)$ cualquier función de las coordenadas generalizadas $(q_1, \ldots, q_n)$ de una sistema con lagrangiano $\mathcal{L}(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$. Probar que los dos lagrangianos $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + dF/dt$ producen exactamente las mismas ecuaciones de movimiento.

7.49 ⋆⋆ Considerar una partícula de masa m y carga q que se mueve en el seno de un campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B}$ en la dirección z. **(a)** Probar que $\mathbf{B}$ se puede escribir como $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$ con $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$. Probar análogamente que en coordenadas polares cilíndricas, $\mathbf{A} = \frac{1}{2}B\rho\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$. **(b)** Escribir el lagrangiano (7.103) en coordenadas polares cilíndricas y encontrar las tres ecuaciones de Lagrange correspondientes. **(c)** Describir en detalle aquellas soluciones de las ecuaciones de Lagrange en las que ρ es una constante.

Sección 7.10 Multiplicadores de Lagrange y fuerzas de ligadura*

7.50 ⋆ Una masa m_1 está situada sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Enganchada a ella hay una cuerda que corre horizontalmente hasta el borde de la mesa, donde pasa por una polea pequeña sin rozamiento. Al final de la cuerda cuelga una masa m_2. Usar como coordenadas x e y las distancias de m_1 y m_2 desde la polea. Estas cumplen la ecuación de ligadura $f(x, y) = x + y =$ constante. Escribir las dos ecuaciones de Lagrange modificadas y resolverlas (junto con la ecuación de ligadura) para $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, y el multiplicador de Lagrange λ. Usar (7.122) (y la ecuación en y correspondiente) para encontrar las tensiones sobre las dos masas. Verificar la respuesta resolviendo el problema mediante de la aproximación newtoniana elemental.

7.51 ⋆ Escribir el lagrangiano para el péndulo simple de la Figura 7.2 en términos de las coordenadas rectangulares x e y. Estas coordenadas están ligadas para cumplir la ecuación de ligadura $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = l$. **(a)** Escribir las dos ecuaciones de Lagrange modificadas (7.118) y (7.119). Comparando éstas con las dos componentes de la segunda ley de Newton, mostrar que el multiplicador de Lagrange es (menos) la tensión en la barra. Verificar la ecuación (7.122) y la ecuación correspondiente en y. **(b)** La ecuación de ligadura se puede escribir de muchas maneras diferentes. Por ejemplo podríamos haber escrito $f'(x, y) = x^2 + y^2 = l^2$. Comprobar que usando esta función se habrían obtenido los mismos resultados físicos.

7.52 ⋆ El método de los multiplicadores de Lagrange funciona perfectamente bien con coordenadas no cartesianas. Considerar una masa m que cuelga de una cuerda, el otro extremo de la cual está enrollado varias veces alrededor de una rueda (radio R, momento de inercia I) colocada sobre un eje horizontal sin rozamiento. Usar como coordenadas para la masa y la rueda x, la distancia que cae la masa, y ϕ, el ángulo que ha girado la rueda (ambas medidas desde alguna posición de referencia conveniente. Escribir las ecuaciones modificadas de Lagrange para estas dos variables y resolverlas (junto con la ecuación de ligadura) para $\ddot{x}$ y $\ddot{\phi}$ y el multiplicador de Lagrange. Escribir la segunda ley de Newton para la masa y la rueda, y usarlas para comprobar las respuestas para $\ddot{x}$ y $\ddot{\phi}$. Mostrar que $\lambda \partial f / \partial x$ es realmente la fuerza de la tensión sobre la masa. Hacer algún comentario sobre la cantidad $\lambda \partial f / \partial \phi$.

CAPÍTULO 8

Problemas de fuerzas centrales para dos cuerpos

En este capítulo hablaré sobre el movimiento de dos cuerpos, cada uno de los cuales ejerce una fuerza central conservativa sobre el otro y supuesto que no están sujetos a ninguna otra fuerza «externa». Existen muchos ejemplos de este problema: las dos estrellas de un sistema estelar binario, un planeta que orbita alrededor del Sol, la Luna que orbita alrededor de la Tierra, el electrón y el protón de un átomo de hidrógeno, los dos átomos de una molécula diatómica. En la mayoría de los casos la verdadera situación es más complicada. Por ejemplo, aunque sólo nos interese un planeta que orbita alrededor del Sol, no podemos obviar por completo los efectos de los demás planetas; de la misma manera, el sistema Luna-Tierra está sujeto a la fuerza externa del Sol. No obstante, en todos los casos, tratar los dos cuerpos en cuestión como si estuvieran aislados de toda influencia externa, es un excelente punto de partida.

También se podría objetar que los ejemplos del átomo de hidrógeno y la molécula diatómica no pertenecen a la mecánica clásica, ya que todos los sistemas de escala molecular en realidad pertenecen a la mecánica cuántica. Sin embargo, muchas de las ideas que desarrollo en este capítulo (por ejemplo, el concepto de masa reducida) juegan un papel muy importante en el problema mecánico cuántico de los dos cuerpos, y es apropiado decir que el temario aquí expuesto es un prerrequisito esencial para el temario cuántico correspondiente.

8.1 El problema

Consideremos dos objetos con masas m_1 y m_2. Para los fines de este capítulo, supondré que los objetos son lo suficientemente pequeños para ser considerados partículas

puntuales, cuyas posiciones (relativas al origen O de algunos sistemas de referencia inerciales) escribiré como $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$. Las únicas fuerzas son las fuerzas $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{21}$ de su interacción mutua, que supondré que es conservativa y central. Por lo tanto, las fuerzas se pueden obtener a partir de la energía potencial $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. En el caso de dos cuerpos astronómicos (la Tierra y el Sol), la fuerza es la gravitatoria $Gm_1m_2/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2$, con un potencial correspondiente (como vimos en el Capítulo 4)

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \tag{8.1}$$

Para el electrón y el protón de un átomo de hidrógeno, el potencial es la función EP de Coulomb de las dos cargas (e para el protón y $-e$ para el electrón),

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{ke^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \tag{8.2}$$

donde k denota la constante de la fuerza de Coulomb, $k = 1/4\pi\epsilon_0$.

En ambos ejemplos U depende únicamente de la diferencia $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, no de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ de manera separada. Como vimos en la Sección 4.9, esto no es casualidad: cualquier sistema aislado es traslacionalmente invariante, y si $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ es traslacionalmente invariante sólo puede depender de $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. En el caso que nos ocupa existe otra simplificación: como vimos en la Sección 4.8, si una fuerza conservativa es central, entonces U es independiente de la dirección de $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Esto es, sólo depende de la *magnitud* $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, y podemos escribir

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \tag{8.3}$$

como es el caso de los ejemplos (8.1) y (8.2).

Para aprovechar la propiedad (8.3), resulta conveniente introducir una nueva variable

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \tag{8.4}$$

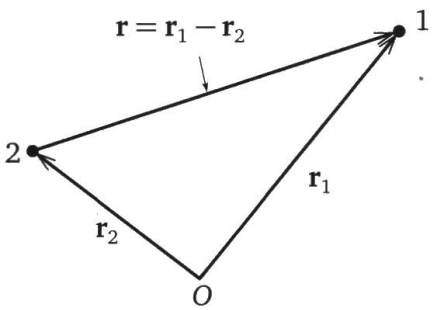


Figura 8.1. La posición relativa $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ es la posición del cuerpo 1 relativa al cuerpo 2.

Como se muestra en la Figura 8.1, esto es exactamente la posición del cuerpo 1 relativa al cuerpo 2, y me referiré a $\mathbf{r}$ como la **posición relativa**. El resultado del párrafo anterior se puede parafrasear diciendo que el potencial U depende sólo de la magnitud r de la posición relativa $\mathbf{r}$,

$$U = U(r). \tag{8.5}$$

Podemos ahora enunciar el problema matemático que tenemos que resolver: queremos encontrar los posibles movimientos de dos cuerpos (la Luna y la Tierra, o un electrón y un protón), cuyo lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(r). \tag{8.6}$$

Por supuesto, podría también haber enunciado el problema en términos newtonianos, y me sentiré de hecho libre para cambiar entre el formalismo lagrangiano y el newtoniano según cuál parezca más conveniente. Por el momento, el formalismo lagrangiano es el más claro.

8.2 Centro de masa y coordenadas relativas; masa reducida

Nuestra primera tarea es decidir qué coordenadas generalizadas usar para resolver nuestro problema. Hay ya un fuerte indicio de que deberíamos usar la posición relativa $\mathbf{r}$ como una de ellas (o como tres de ellas, dependiendo de cómo se cuenten las coordenadas), porque el potencial $U(r)$ toma una forma muy simple en términos de $\mathbf{r}$. La cuestión es entonces, ¿cuál escogemos como la otra variable (vectorial)? La mejor elección resulta ser la familiar posición del *centro de masa* (o CM), $\mathbf{R}$, de los dos cuerpos, que definido como en el Capítulo 3 es

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M}, \tag{8.7}$$

donde como antes M denota la masa total de los dos cuerpos:

$$M = m_1 + m_2.$$

Como vimos en el Capítulo 3, el CM de dos partículas se encuentra sobre la línea que los une, como se muestra en la Figura 8.2. Las distancias al centro de masa desde las dos masas m_2 y m_1 están en la proporción m_1/m_2. En particular, si m_2 es mucho mayor que m_1, entonces el CM está muy cerca del cuerpo 2. (En la Figura 8.2, el cociente m_1/m_2 está en torno a $1/3$, así que el CM está un cuarto del camino desde m_2 hasta m_1).

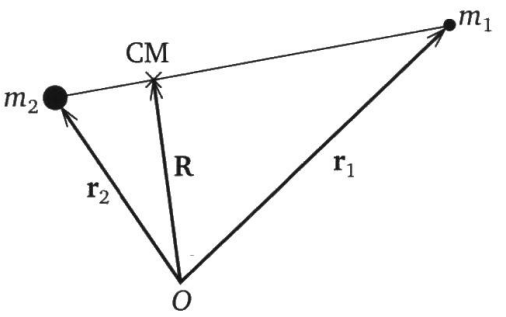


Figura 8.2. El centro de masa de los dos cuerpos se encuentra en la posición $\mathbf{R} = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/M$ sobre la línea que une ambos cuerpos.

Vimos en la Sección 3.3 que el momento total de los dos cuerpos es el mismo que si toda la masa $M = m_1 + m_2$ estuviera concentrada en el CM y fuera siguiendo al CM según se mueve:

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}} \tag{8.8}$$

Este resultado tiene consecuencias simplificadoras importantes: sabemos, por supuesto, que el momento total es constante. Por tanto, de acuerdo con (8.8), $\dot{\mathbf{R}}$ es constante; y esto significa que podemos elegir un sistema de referencia inercial en el cual el CM esté en reposo. Este **sistema de referencia CM** es un sistema especialmente conveniente para analizar el movimiento, como veremos.

Voy a usar la posición $\mathbf{R}$ del CM y la posición relativa $\mathbf{r}$ como coordenadas generalizadas para nuestra discusión del movimiento de los dos cuerpos. En términos de estas coordenadas, ya sabemos que la energía potencial adopta la forma sencilla $U = U(r)$. Para expresar la energía cinética en estos términos, necesitamos escribir las antiguas variables $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ en términos de las nuevas $\mathbf{R}$ y $\mathbf{r}$. Es un ejercicio directo mostrar que (vea la Figura 8.2)

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}. \tag{8.9}$$

Por consiguiente la energía cinética es

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\left(m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2\right) = \tfrac{1}{2}\left(m_1\left[\dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\right]^2 + m_2\left[\dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\right]^2\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}^2\right). \end{aligned} \tag{8.10}$$

El resultado (8.10) se simplifica más todavía si introducimos el parámetro

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad \text{[masa reducida]} \tag{8.11}$$

que tiene dimensiones de masa y se denomina **masa reducida**. Se puede comprobar fácilmente que μ es siempre menor que m_1 y que m_2 (de ahí su nombre). Si $m_1 \ll m_2$, entonces μ está muy cerca de m_1. Por tanto la masa reducida para el sistema Tierra-Sol es casi exactamente la masa de la Tierra; la masa reducida del electrón y el protón en hidrógeno es casi exactamente la masa del electrón. Por otro lado, si $m_1 = m_2$, entonces obviamente $\mu = \frac{1}{2}m_1$.

Volviendo a (8.10), podemos reescribir la energía cinética en términos de μ como

$$T = \tfrac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2. \tag{8.12}$$

Este importante resultado muestra que la energía cinética es la misma que la de dos partículas «ficticias», una de masa M que se mueve con la velocidad del CM, y la otra de masa μ (la masa reducida) que se mueve con la velocidad de la posición relativa $\mathbf{r}$. Incluso más significativo es el resultado correspondiente para el lagrangiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T - U &= \tfrac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \left(\tfrac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)\right) \\ &= \mathcal{L}_{\text{cm}} + \mathcal{L}_{\text{rel}}. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Vemos que usando el CM y posiciones relativas como coordenadas generalizadas, hemos partido el lagrangiano en dos partes separadas, una de las cuales incluye sólo a la coordenada $\mathbf{R}$ del CM y la otra sólo a la coordenada relativa $\mathbf{r}$. Esto significa que para los movimientos de $\mathbf{R}$ y $\mathbf{r}$ podemos resolver dos problemas separados, lo cual simplifica mucho las cosas.

8.3 Ecuaciones del movimiento

Con el lagrangiano (8.13) podemos escribir las ecuaciones de movimiento para nuestro sistema de dos cuerpos. Como $\mathcal{L}$ es independiente de $\mathbf{R}$, la ecuación $\mathbf{R}$ (tres ecuaciones en realidad, una para cada X,Y y Z) es muy sencilla,

$$M\ddot{\mathbf{R}} = 0 \qquad \text{o} \qquad \dot{\mathbf{R}} = \text{const.} \tag{8.14}$$

Este resultado se puede explicar de varias maneras: primero (como ya sabíamos), es una consecuencia directa de la conservación del momento total. De manera alternativa, podemos verlo como que $\mathcal{L}$ es independiente de $\mathbf{R}$, o, como en la terminología introducida en la Sección 7.6, la coordenada $\mathbf{R}$ del CM es «ignorable». Más concretamente, $\mathcal{L}_{\text{cm}} = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2$ (que es la única parte de $\mathcal{L}$ en la que aparece $\mathbf{R}$) tiene la forma del lagrangiano de una partícula *libre* de masa M y posición $\mathbf{R}$. Así que naturalmente (primera ley de Newton), $\mathbf{R}$ se mueve con velocidad constante.

La ecuación de Lagrange para la coordenada relativa $\mathbf{r}$ no es tan sencilla, pero es igual de bonita: $\mathcal{L}_{\text{rel}}$, la única parte de $\mathcal{L}$ en la que aparece $\mathbf{r}$, es matemáticamente indistinguible del lagrangiano para una única partícula de masa μ y posición $\mathbf{r}$, con energía potencial $U(r)$. Por lo tanto la ecuación de Lagrange correspondiente a $\mathbf{r}$ es simplemente (¡compruébelo!)

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\nabla}U(\mathbf{r}). \tag{8.15}$$

Para resolver el movimiento relativo, sólo tenemos que resolver la segunda ley de Newton para una única partícula de masa igual a la masa reducida μ y posición $\mathbf{r}$, con energía potencial $U(r)$.

Sistema de referencia CM

Nuestro problema se simplifica aún más si hacemos una elección inteligente del sistema de referencia. Concretamente, como $\dot{\mathbf{R}} = \text{const.}$, podemos escoger un sistema de referencia inercial, el denominado **sistema CM**, en el que el CM está en reposo y el momento total es cero. En este sistema, $\dot{\mathbf{R}} = 0$ y la parte del CM en el lagrangiano es cero ($\mathcal{L}_{\text{cm}} = 0$). Por lo tanto en el sistema CM

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{rel}} = \tfrac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r) \tag{8.16}$$

y el problema se reduce a un problema de un solo cuerpo. Esta drástica simplificación ilustra la curiosa terminología de la «coordenada ignorable». Recordemos que se dice que una coordenada q_i es ignorable si $\partial\mathcal{L}/\partial q_i = 0$. Vemos que, al menos en el presente caso, el movimiento asociado a la coordenada ignorable $\mathbf{R}$ realmente es algo que podemos ignorar.

Merece la pena detenerse un momento a considerar qué aspecto tiene el movimiento en el sistema CM, como se muestra en la Figura 8.3. El CM es estacionario y por lo tanto, lo tomamos como el origen. Ambas partículas se mueven, pero con momentos iguales y opuestos. Si m_2 es mucho mayor que m_1 (como suele ser el caso), el CM se encuentra cerca de m_2 y la partícula 2 tiene poca velocidad. (En la figura, $m_2 = 3m_1$ y por lo tanto $v_2 = \frac{1}{3}v_1$). Es importante fijarse en que la posición relativa $\mathbf{r}$

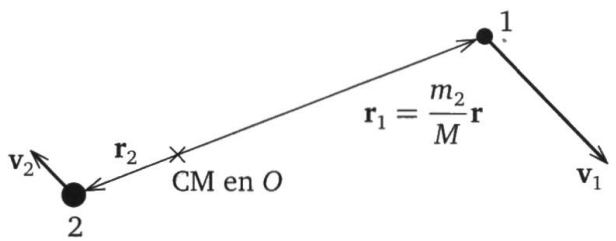


Figura 8.3. En el sistema CM el centro de masa permanece estacionario en el origen. La posición relativa $\mathbf{r}$ es la posición de la partícula 1 relativa a la partícula 2; por lo tanto, la posición de la partícula 1 relativa al origen es $\mathbf{r}_1 = (m_2/M)\mathbf{r}$.

es la posición de la partícula 1 relativa a la partícula 2, y no la posición real de ninguna de las partículas. Como se muestra en el dibujo, la posición de la partícula 1 es en realidad $\mathbf{r}_1 = (m_2/M)\mathbf{r}$. Sin embargo, si $m_2 \gg m_1$, entonces el CM está muy cerca de la partícula 2, que es casi estacionaria, y $\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{r}$; esto es, $\mathbf{r}$ es casi lo mismo que $\mathbf{r}_1$.

La ecuación de movimiento en el sistema CM se obtiene del lagrangiano $\mathcal{L}_{\text{rel}}$ de (8.16) y es justo la ecuación(8.15). Esto es exactamente igual que la ecuación para un única partícula de masa igual a la masa reducida μ, en el campo de fuerza central fijo de potencial $U(r)$. En las ecuaciones de este capítulo, la aparición repetida de la masa μ servirá para recordarle a uno que las ecuaciones se aplican al movimiento relativo de los dos cuerpos. Sin embargo, resultará más fácil *visualizar* un único cuerpo (de masa μ) orbitando alrededor de un centro de fuerza fijo. En particular, si $m_2 \gg m_1$, estos dos problemas son a efectos prácticos exactamente el mismo. Más aún, si lo que nos interesa en realidad es un único cuerpo, digamos de masa m, orbitando alrededor de un centro de fuerza fijo, entonces podemos usar todas las ecuaciones iguales simplemente sustituyendo μ por m. Sea como sea, cualquier solución para la coordenada relativa $\mathbf{r}(t)$ siempre nos da el movimiento de la partícula 1 relativa a la partícula 2. De manera equivalente, usando las relaciones de la Figura 8.3, el conocimiento de $\mathbf{r}(t)$ nos da el movimiento de la partícula 1 (o la partícula 2) relativo al CM.

Conservación del momento angular

Ya sabemos que el momento angular total de las dos partículas se conserva. Como tantas otras cosas, esta condición adopta una forma especialmente sencilla en el sistema CM. En cualquier sistema, el momento angular total es

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 \\ &= m_1\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2. \end{aligned} \tag{8.17}$$

En el sistema CM, vemos por (8.9) (con $\mathbf{R} = 0$) que

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{M}\mathbf{r} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{M}\mathbf{r}. \tag{8.18}$$

Sustituyendo por (8.17), vemos que el momento angular en el sistema CM es

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \frac{m_1 m_2}{M^2}(m_2\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} + m_1\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \\ &= \mathbf{r} \times \mu\dot{\mathbf{r}} \end{aligned} \tag{8.19}$$

donde he cambiado m_1m_2/M por la masa reducida μ.

Lo más asombroso de este resultado es que el momento angular total en el sistema CM es exactamente igual que el momento angular de una única partícula de

masa μ y posición $\mathbf{r}$. Para nuestros propósitos actuales lo importante es que, debido a que el momento angular se conserva, vemos que el vector $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ es constante. En particular, la *dirección* de $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ es constante, lo que implica que los dos vectores $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$ permanecen en un plano fijo. Es decir, en el sistema CM todo el movimiento permanece en un plano fijo, que podemos tomar como el plano xy. En otras palabras, en el sistema CM, el problema de los dos cuerpos con fuerzas conservativas centrales se reduce a un problema bidimensional.

Las dos ecuaciones del movimiento

Para establecer las ecuaciones de movimiento para este problema bidimensional, tenemos que escoger coordenadas del plano del movimiento. La elección obvia es usar las coordenadas polares r y ϕ, en términos de las cuales el lagrangiano (8.16) es

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r). \tag{8.20}$$

Como el lagrangiano es independiente de ϕ, la coordenada ϕ es ignorable, y la ecuación de Lagrange correspondiente a ϕ es simplemente

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \dot{\phi} = \text{const.} = \ell \qquad [\phi \text{ ecuación}]. \tag{8.21}$$

Como $\mu r^2 \dot{\phi}$ es el momento angular ℓ (estrictamente ℓ_z, la componente z), la ecuación ϕ es simplemente la afirmación de la conservación del momento angular.

La ecuación de Lagrange correspondiente a r (a menudo llamada la **ecuación radial**) es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}},$$

o

$$\mu r \dot{\phi}^2 - \frac{dU}{dr} = \mu \ddot{r} \qquad [\text{ecuación } r]. \tag{8.22}$$

Como ya vimos en el Ejemplo 7.2 [Ecuaciones (7.19) y (7.20)], si pasamos el término centrípeto $\mu r \dot{\phi}^2$ al segundo miembro, esto es simplemente la componente radial de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (o más bien, $\mathbf{F} = \mu\mathbf{a}$, ya que μ ha sustituido a m).

8.4 El problema unidimensional equivalente

Las dos ecuaciones de movimiento que debemos resolver son la ecuación ϕ (8.21) y la ecuación radial (8.22). La constante ℓ (el momento angular) en la ecuación de

ϕ viene determinada por las condiciones iniciales, y nuestro principal interés en la ecuación de ϕ es resolverla para $\dot{\phi}$,

$$\dot{\phi} = \frac{\ell}{\mu r^2}, \tag{8.23}$$

lo que nos permitirá eliminar $\dot{\phi}$ de la ecuación radial a favor de la constante ℓ. La ecuación radial puede reescribirse como

$$\mu\ddot{r} = -\frac{dU}{dr} + \mu r\dot{\phi}^2 = -\frac{dU}{dr} + F_{\text{cf}} \tag{8.24}$$

lo que tiene la forma de la segunda ley de Newton para una partícula en *una* dimensión de masa μ y posición r, sujeta a la fuerza real $-dU/dr$ y a una fuerza externa centrífuga «ficticia»[1]

$$F_{\text{cf}} = \mu r\dot{\phi}^2. \tag{8.25}$$

En otras palabras, el movimiento radial de la partícula es exactamente igual que si la partícula se estuviera moviendo en una dimensión, sujeta a la fuerza real $-dU/dr$ *además de* la fuerza centrífuga F_{cf}.

Hemos reducido ahora el problema del movimiento relativo de dos cuerpos a un único problema unidimensional, como se expresa en (8.24). Antes de discutir sobre el aspecto que van a tener las soluciones, es de gran ayuda escribir la fuerza centrífuga, usando la ecuación de ϕ (8.23) para eliminar $\dot{\phi}$ en favor de la constante ℓ,

$$F_{\text{cf}} = \frac{\ell^2}{\mu r^3}. \tag{8.26}$$

Mejor aún, ahora podemos expresar la fuerza centrífuga en términos del potencial centrífugo,

$$F_{\text{cf}} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right) = -\frac{dU_{\text{cf}}}{dr}, \tag{8.27}$$

donde la energía potencial centrífuga U_{cf} se define como

$$U_{\text{cf}}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2}. \tag{8.28}$$

Volviendo a (8.24), ahora podemos reescribir la ecuación radial en términos de U_{cf} como

---

[1] Esta fuerza centrífuga puede resultar más familiar si la escribo en términos de la velocidad acimutal $v_\phi = r\dot{\phi}$ ya que $F_{\text{cf}} = \mu v_\phi{}^2/r$.

$$\mu\ddot{r} = -\frac{d}{dr}[U(r) + U_{cf}(r)] = -\frac{d}{dr}U_{ef}(r), \tag{8.29}$$

donde el **potencial efectivo** $U_{ef}(r)$ es la suma del potencial real $U(r)$ y el centrífugo $U_{cf}(r)$:

$$U_{ef}(r) = U(r) + U_{cf}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}. \tag{8.30}$$

De acuerdo con (8.29), el movimiento radial de la partícula es exactamente el mismo que si la partícula se estuviera moviendo en una dimensión con una energía potencial efectiva $U_{ef} = U + U_{cf}$.

Ejemplo 8.1 *Potencial efectivo para un cometa*

Escribir las energías reales y efectivas para un cometa (o planeta) que se mueve en el campo gravitatorio del Sol. Esbozar las tres energías potenciales implicadas y usar la gráfica de $U_{ef}(r)$ para describir el movimiento de r. Debido a que el movimiento planetario fue descrito matemáticamente por primera vez por el astrónomo alemán Johannes Kepler, 1571–1630, el problema del movimiento de un cometa o un planeta alrededor del Sol (o dos cuerpos cualesquiera que interaccionan mediante una fuerza de inverso del cuadrado) a menudo se denomina *Problema de Kepler*.

El verdadero potencial gravitatorio del cometa viene dado por la conocida fórmula

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \tag{8.31}$$

donde G es la constante de gravitación universal, y m_1 y m_2 son las masas del cometa y el Sol. El potencial centrífugo viene dada por (8.28), de manera que la energía potencial efectiva es

$$U_{ef}(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}. \tag{8.32}$$

El comportamiento general de esta energía potencial efectiva se ve fácilmente en la (Figura 8.4). Cuando r es grande, el término centrífugo $\ell^2/2\mu r^2$ es insignificante en comparación con el término gravitatorio $-Gm_1m_2/r$, y la EP efectiva, $U_{ef}(r)$, es negativa y se inclina hacia arriba a medida que r aumenta. De acuerdo con (8.29), la aceleración de r es hacia abajo con esta inclinación. [El coche de la montaña rusa se acelera hacia abajo por la pista definida por $U_{ef}(r)$]. Por lo que cuando un cometa se encuentra lejos del Sol, $\ddot{r}$ es siempre interior.

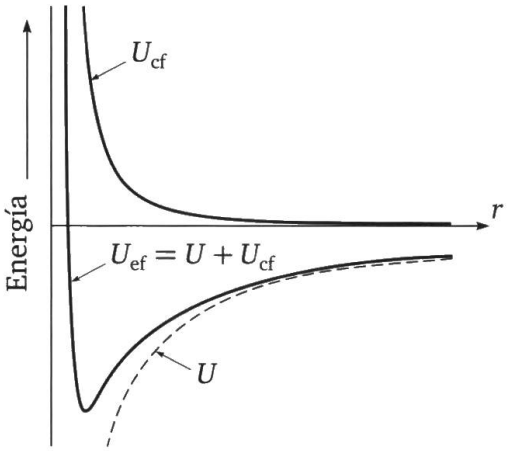


Figura 8.4. La energía potencial efectiva $U_{ef}(r)$ que gobierna el movimiento radial de un cometa es la suma de la energía gravitatoria real $U(r) = -Gm_1m_2/r$ y el término centrífugo $U_{cf} = \ell^2/2\mu r^2$. Para r grande, el efecto dominante es la fuerza gravitatoria atractiva; para r pequeña, el fuerza centrífuga repulsiva.

Cuando r es pequeña, el término centrífugo $\ell^2/2\mu r^2$ domina sobre el término gravitatorio $-Gm_1m_2/r$ (a no ser que $\ell = 0$), y cerca de $r = 0$, $U_{ef}(r)$ es positiva y se inclina hacia abajo. Por lo tanto, a medida que un cometa se acerca al Sol, $\ddot{r}$ finalmente se convierte en externa y el cometa comienza lentamente a alejarse de nuevo del Sol. La única excepción en esta afirmación es que cuando el momento angular es exactamente cero, $\ell = 0$, en cuyo caso (8.23) implica que $\dot{\phi} = 0$; esto es, el cometa se mueve exactamente de manera radial, a lo largo de una línea de ϕ constante, y debe, en algún momento, chocar contra el Sol.

Conservación de la energía

Para encontrar la información sobre la órbita debemos estudiar la ecuación radial detenidamente (8.29). Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por $\dot{r}$, encontramos que

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt}U_{ef}(r). \tag{8.33}$$

En otras palabras,

$$\tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{ef}(r) = \text{const.} \tag{8.34}$$

De hecho, este resultado es simplemente la conservación de la energía: si escribimos U_{ef} como $U + \ell^2/2\mu r^2$ y reemplazamos ℓ por $\mu r^2\dot{\phi}$, vemos que

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{ef}(r) &= \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}\mu r^2\dot{\phi}^2 + U(r)\\ &= E.\end{aligned} \tag{8.35}$$

Esto completa el replanteamiento del problema de dos dimensiones del movimiento relativo como un problema unidimensional equivalente que implica sólo el movimiento radial. Vemos que la energía total (que siempre hemos sabido que es constante) puede verse como la energía cinética unidimensional del movimiento radial sumado a la energía potencial efectiva unidimensional U_{ef}, ya que la última incluye la energía potencial real U y *también* la energía cinética $\frac{1}{2}\mu r^2\dot{\phi}^2$ del movimiento angular. Esto significa que toda nuestra experiencia con los problemas unidimensionales, tanto en términos de fuerzas como en términos de energía, puede trasladarse inmediatamente al problema de la fuerza central de dos cuerpos.

Ejemplo 8.2 *Consideraciones energéticas para un cometa o planeta*

Examinemos de nuevo el cometa (o planeta) del Ejemplo 8.1 y, considerando su energía total E, encontremos la ecuación que determina las distancias máximas y mínimas entre el cometa y el Sol, si $E > 0$ y, de nuevo, si $E < 0$.

En la ecuación de la energía (8.35) el término $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$ de la izquierda siempre es mayor o igual que cero. Por lo tanto, el movimiento del cometa está confinado a aquellas regiones donde $E \geq U_{ef}$. Para ver lo que esto implica, en la Figura 8.5 he vuelto a dibujar la gráfica de U_{ef} de la Figura 8.4. Consideremos primero el caso en que la energía del cometa es mayor que cero. En la figura he dibujado una línea horizontal discontinua a una altura E, denominada $E > 0$. Un cometa con esta energía puede moverse por cualquier parte de la línea que esté por encima de la curva $U_{ef}(r)$, pero por ninguna parte de la línea que se encuentre por debajo de la curva. Esto significa, sencillamente, que el cometa no puede moverse por ningún punto menor que el punto de retorno denominado $r_{mín}$, determinado por la condición

$$U_{ef}(r_{mín}) = E. \tag{8.36}$$

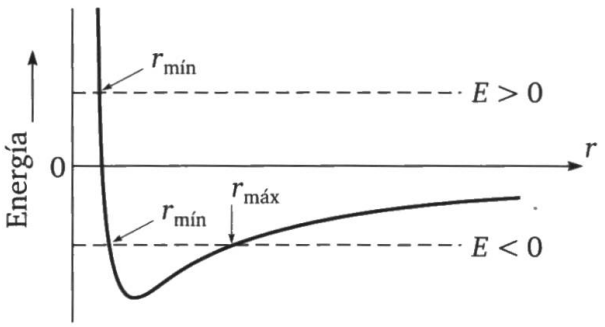


Figura 8.5. Plano de la energía potencial efectiva $U_{ef}(r)$ frente a r para un cometa. Para una energía dada E, el cometa sólo puede ir donde $E \geq U_{ef}(r)$. En caso de que $E > 0$ esto significa que no puede ir a ningún punto menor que el punto de retorno en $r_{mín}$ donde $U_{ef} = E$. Y para $E < 0$ está confinado entre los dos puntos de retorno denominados $r_{mín}$ y $r_{máx}$.

Si el cometa inicialmente se mueve hacia el interior, hacia el Sol, continuará haciéndolo hasta que alcance $r_{\text{mín}}$, donde $\dot{r} = 0$ de manera instantánea. Entonces se mueve hacia el exterior, y como no existen otros puntos en los que $\dot{r}$ pueda desaparecer, finalmente se mueve hacia el infinito y la órbita es **no acotada**.

Si por el contrario $E < 0$, entonces la línea dibujada a una altura E (denominada $E < 0$) se cruza con la curva de $U_{\text{ef}}(r)$ en los dos puntos de retorno denominados $r_{\text{mín}}$ y $r_{\text{máx}}$, y un cometa con $E < 0$ se encuentra atrapado entre estos dos valores de r. Si se aleja del Sol ($\dot{r} > 0$) continuará haciéndolo hasta que alcance $r_{\text{máx}}$, donde $\dot{r}$ desaparece e invierte el signo. Entonces el cometa se mueve hacia el interior hasta que alcanza $r_{\text{mín}}$, donde $\dot{r}$ se invierte de nuevo. Por tanto, el cometa oscila hacia dentro y hacia fuera entre $r_{\text{mín}}$ y $r_{\text{máx}}$. Por razones obvias, este tipo de órbita se denomina **órbita acotada**.[2]

Finalmente, si E es igual al valor mínimo de $U_{\text{ef}}(r)$ (para un valor dado del momento angular ℓ), los dos puntos de retorno $r_{\text{mín}}$ y $r_{\text{máx}}$ se fusionan y el cometa queda atrapado en un radio fijo y se mueve en una órbita circular.

En este ejemplo sólo he considerado el caso de una fuerza de inverso del cuadrado de la distancia al origen, pero muchos problemas de dos cuerpos tienen las mismas características cualitativas. Por ejemplo, el movimiento de dos átomos en una molécula diatómica está gobernado por el potencial efectivo esbozado en la Figura 4.12 y se parece mucho a la curva *gravitatoria* de la Figura 8.5. Por lo tanto, todas nuestras conclusiones cualitativas se pueden aplicar tanto a la molécula diatómica como a muchos otros problemas de dos cuerpos.

Al pensar en el movimiento radial del problema de dos cuerpos, no hay que olvidar el movimiento angular. De acuerdo con (8.23), $\dot{\phi} = \ell/\mu r^2$, y ϕ está siempre cambiando, siempre con el mismo signo (aumentando o disminuyendo continuamente). Por ejemplo, a medida que un cometa con energía positiva se aproxima al Sol, el ángulo ϕ cambia, a una tasa que aumenta a medida que r se hace más pequeña; a medida que el cometa se aleja, ϕ continúa cambiando en la misma dirección, pero a una tasa que disminuye a medida que r aumenta. Por lo tanto la órbita real de un cometa de energía positiva tiene el aspecto de la Figura 8.6. Para el caso de una fuerza del inverso del cuadrado (como la gravedad), la órbita de la Figura 8.6 es en realidad una hipérbola, como demostraremos en breve, pero las órbitas no acotadas (esto es, órbitas de $E > 0$) son cualitativamente similares para muchas leyes de fuerzas diferentes.

[2] Si consideramos un solo cometa en órbita alrededor del Sol, entonces la conservación de la energía implica que una órbita acotada ($E < 0$) nunca puede convertirse en una órbita no acotada ($E > 0$), ni viceversa. En realidad un cometa puede ocasionalmente acercarse lo suficiente a otro cometa o planeta para cambiar E, y entonces la órbita puede cambiar de ser acotada a no acotada, o al revés.

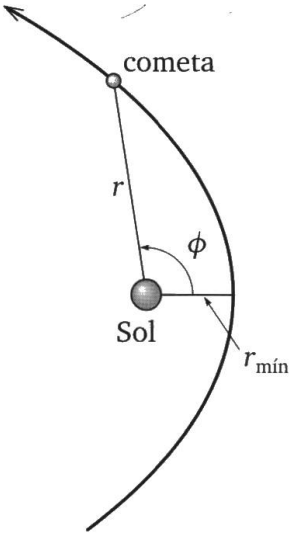


Figura 8.6. Órbita típica no acotada de un cometa con energía positiva. Inicialmente r disminuye desde el infinito hasta $r_{mín}$ y después vuelve hacia el infinito. Mientras tanto, el ángulo ϕ aumenta de manera continua.

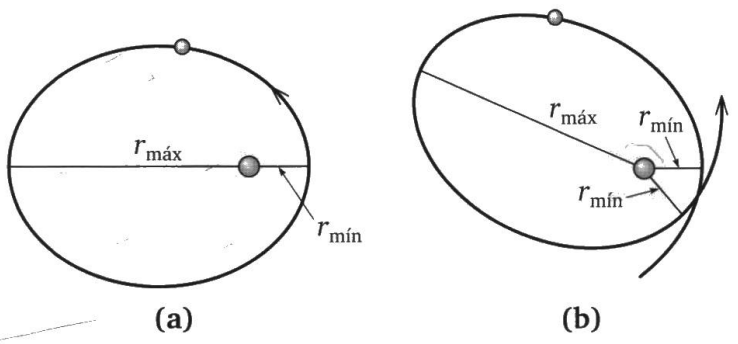


Figura 8.7. **(a)** Las órbitas acotadas para cualquier fuerza del inverso del cuadrado presentan la curiosa propiedad de que r va desde $r_{mín}$ hasta $r_{máx}$ y de nuevo vuelve a $r_{mín}$ en exactamente el mismo tiempo que ϕ va desde 0 hasta 360°. Por lo tanto la órbita se repite cada revolución. **(b)** Para la mayoría de las demás leyes de fuerzas, el período de oscilación de r es diferente del tiempo en que ϕ avanza 360°, y la órbita no se cierra sobre sí misma después de una revolución. En este ejemplo, r completa un ciclo de $r_{mín}$ a $r_{máx}$ y vuelve otra vez a $r_{mín}$ mientras que ϕ avanza unos 330°.

En las órbitas acotadas ($E < 0$), hemos visto que r oscila entre los dos valores extremos $r_{mín}$ y $r_{máx}$, mientras ϕ aumenta continuamente (o disminuye, pero vamos a suponer que el cometa orbita en sentido contrario a las agujas del reloj, de manera que ϕ aumenta). En el caso de una fuerza del inverso del cuadrado, veremos que el período de las oscilaciones radiales se obtiene al igualar el tiempo de manera que ϕ haga exactamente una revolución completa. Por lo tanto, el movimiento se repite exactamente una vez por revolución, como se muestra en la Figura 8.7(a). (También veremos que para cualquier fuerza del inverso del cuadrado, las órbitas acotadas son

en realidad elipses). Para la mayoría de las demás leyes de fuerzas, el período del movimiento radial es diferente del tiempo que tardan en hacer una revolución, y en la mayoría de los casos la órbita ni siquiera está cerrada (nunca vuelve a sus condiciones iniciales).[3] La Figura 8.7(b) muestra una órbita en la que r va desde $r_{\text{mín}}$ hasta $r_{\text{máx}}$ y de nuevo vuelve a $r_{\text{mín}}$ en un tiempo tal que el ángulo ϕ avanza alrededor de 330°, y la órbita no se cierra sobre sí misma después de una revolución.

8.5 La ecuación de la órbita

La ecuación radial (8.29) determina r como una función de t, pero para muchos propósitos nos gustaría conocer r como una función de ϕ. Por ejemplo, la función $r = r(\phi)$ nos dirá la forma de la órbita de una manera más directa. Por lo tanto nos gustaría reescribir la ecuación radial como una ecuación diferencial para r en términos de ϕ. Existen dos trucos para hacer esto, pero primero vamos a escribir la ecuación radial en términos de las fuerzas:

$$\mu\ddot{r} = F(r) + \frac{\ell^2}{\mu r^3} \tag{8.37}$$

donde $F(r)$ es la fuerza central real, $F = -dU/dr$, y el segundo término es la fuerza centrífuga.

El primer truco para reescribir esta ecuación en términos de ϕ es hacer la sustitución

$$u = \frac{1}{r} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{1}{u} \tag{8.38}$$

y el segundo es reescribir el operador diferencial d/dt en términos de $d/d\phi$ usando la regla de cadena:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\frac{d}{d\phi} = \dot{\phi}\frac{d}{d\phi} = \frac{\ell}{\mu r^2}\frac{d}{d\phi} = \frac{\ell u^2}{\mu}\frac{d}{d\phi}. \tag{8.39}$$

(La tercera igualdad aparece porque $\ell = \mu r^2\dot{\phi}$, y la última resulta del cambio de variables $u = 1/r$).

Usando la identidad (8.39) podemos reescribir $\ddot{r}$ a la izquierda de la ecuación radial. Primero

[3] A parte de la fuerza del inverso del cuadrado, la única excepción importante es el oscilador armónico isótropo, para el que las órbitas también son elipses, como ya vimos en la Sección 5.3.

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}(r) = \frac{\ell u^2}{\mu}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\ell}{\mu}\frac{du}{d\phi}$$

y entonces

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{\ell u^2}{\mu}\frac{d}{d\phi}\left(-\frac{\ell}{\mu}\frac{du}{d\phi}\right) = -\frac{\ell^2 u^2}{\mu^2}\frac{d^2u}{d\phi^2}. \tag{8.40}$$

Cambiando de nuevo a la ecuación radial (8.37) encontramos

$$-\frac{\ell^2 u^2}{\mu}\frac{d^2u}{d\phi^2} = F + \frac{\ell^2 u^3}{\mu}$$

o

$$u''(\phi) = -u(\phi) - \frac{\mu}{\ell^2 u(\phi)^2}F. \tag{8.41}$$

Para cualquier fuerza central F, esta ecuación radial transformada es una ecuación diferencial para la nueva variable $u(\phi)$. Si podemos resolverla, entonces podemos escribir r como $r = 1/u$. En la siguiente sección la resolveremos para el caso de una fuerza del inverso del cuadrado y demostraremos que las órbitas resultantes son cónicas, esto es, elipses, parábolas o hipérbolas. Para empezar, veremos a continuación un ejemplo más sencillo.

Ejemplo 8.3 *La ecuación radial para una partícula libre*

Resolver la ecuación radial transformada (8.41) para una partícula *libre* (es decir, una partícula que no está sujeta a ninguna fuerza) y confirmar que la órbita resultante es la línea recta esperada.

Este ejemplo es probablemente una de las maneras más difíciles de demostrar que una partícula libre se mueve a lo largo de una línea recta. No obstante, es recomendable comprobar que la ecuación radial transformada tiene sentido. En ausencia de fuerzas, (8.41) es simplemente

$$u''(\phi) = -u(\phi)$$

cuya solución general sabemos que es

$$u(\phi) = A\cos(\phi - \delta), \tag{8.42}$$

donde A y δ son constantes arbitrarias. Por lo tanto (renombrando la constante $A = 1/r_o$),

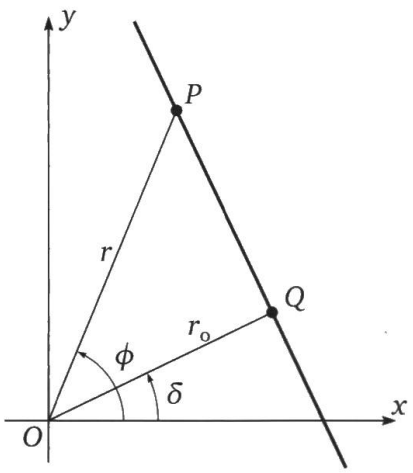


Figura 8.8. El punto fijo Q tiene coordenadas polares (r_0, δ) relativas al origen O. El punto P con coordenadas polares (r, ϕ) se encuentra sobre la línea que cruza Q perpendicular a OQ si y sólo si $r\cos(\phi - \delta) = r_0$. De esta manera, la ecuación de esta línea es (8.43).

$$r(\phi) = \frac{1}{u(\phi)} = \frac{r_0}{\cos(\phi - \delta)}. \tag{8.43}$$

Esta ecuación de aspecto poco prometedor es de hecho la ecuación de una línea recta en coordenadas polares, como se puede ver en la Figura 8.8. En ese dibujo Q es un punto fijo con coordenadas polares (r_0, δ), y la línea en cuestión es la línea a través de Q perpendicular a OQ. Es fácil ver que el punto P con coordenadas polares (r, ϕ) se encuentra en esta línea si y sólo si $r\cos(\phi - \delta) = r_0$. En otras palabras, la ecuación (8.43) es la ecuación de esta línea recta.

En la próxima sección usaré la misma ecuación radial transformada (8.41) para resolver un problema bastante más trivial, usando el camino de un cometa o cualquier otro cuerpo obligado a orbitar en una fuerza del inverso del cuadrado.

8.6 Órbitas de Kepler

Volvamos ahora al problema de Kepler, el problema de encontrar las posibles órbitas de un cometa o cualquier otro objeto sometido a una fuerza del inverso del cuadrado. Los dos ejemplos importantes de este problema son el movimiento de cometas o planetas alrededor del Sol (o satélites de la Tierra alrededor de la Tierra), en cuyo caso la fuerza implicada es la gravitatoria $-Gm_1m_2/r^2$, y el movimiento orbital de dos cargas opuestas q_1 y q_2, en cuyo caso la fuerza implicada es la de Coulomb

kq_1q_2/r^2. Para incluir los dos casos y simplificar las ecuaciones, reescribiré la fuerza como (recordar que $u = 1/r$)

$$F(r) = -\frac{\gamma}{r^2} = -\gamma u^2, \tag{8.44}$$

donde γ es la «constante de la fuerza», igual a Gm_1m_2 en el caso gravitatorio.[4]

Gracias a nuestros elaborados preparativos, ahora podemos resolver el principal problema fácilmente. Introduciendo la fuerza (8.44) en la ecuación radial transformada (8.41), encontramos que $u(\phi)$ debe satisfacer

$$u''(\phi) = -u(\phi) + \gamma\mu/\ell^2. \tag{8.45}$$

Es una característica única de la fuerza del inverso del cuadrado que el último término de esta ecuación es constante, ya que sólo en este caso los u^2 de la fuerza cancelan los $1/u^2$ en (8.41). Debido a que este último término es constante, podemos resolver (8.45) fácilmente: si sustituimos

$$w(\phi) = u(\phi) - \gamma\mu/\ell^2,$$

la ecuación se transforma en

$$w''(\phi) = -w(\phi),$$

que tiene la solución general

$$w(\phi) = A\cos(\phi - \delta), \tag{8.46}$$

donde A es una constante positiva y δ es una constante que podemos tomar como cero con una adecuada selección de dirección $\phi = 0$. Por tanto la solución general para $u(\phi)$ puede escribirse como

$$u(\phi) = \frac{\gamma\mu}{\ell^2} + A\cos\phi = \frac{\gamma\mu}{\ell^2}(1 + \epsilon\cos\phi) \tag{8.47}$$

donde ϵ es simplemente un nombre nuevo para la constante positiva sin dimensión $A\ell^2/\gamma\mu$. Ya que $u = 1/r$, la constante $\gamma\mu/\ell^2$ de la derecha tiene la dimensión [1/longitud], e introduciré la longitud

$$c = \frac{\ell^2}{\gamma\mu} \tag{8.48}$$

---

[4] La constante γ es positiva para la fuerza gravitatoria y para la fuerza entre dos cargas opuestas. Como ya se vio en el Problema 8.31, para dos cargas de igual signo, γ es negativa. Por el momento, supondremos que es positiva.

en cuyos términos la solución se convierte en

$$\frac{1}{r(\phi)} = \frac{1}{c}(1 + \epsilon \cos \phi)$$

o

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon \cos \phi}. \tag{8.49}$$

Esta es nuestra solución para r como una función de ϕ, en términos de la constante positiva indeterminada ϵ y la longitud $c = \ell^2/\gamma\mu$ (que es $\ell^2/Gm_1m_2\mu$ en el problema gravitatorio). Ahora analizaré sus propiedades, en primer lugar para las órbitas acotadas y después para las órbitas no acotadas.

Órbitas acotadas

El comportamiento de la órbita $r(\phi)$ en (8.49) está controlado por la, todavía, constante positiva indeterminada ϵ. Un vistazo a (8.49) nos muestra que este comportamiento es muy diferente para $\epsilon < 1$ o $\epsilon \geq 1$. Si $\epsilon < 1$, el denominador de (8.49) nunca desaparece, y $r(\phi)$ permanece acotada para todo ϕ. Si $\epsilon \geq 1$ el denominador desaparece para algún ángulo, y $r(\phi)$ se aproxima a infinito a medida que ϕ se aproxima a ese ángulo. Evidentemente, el valor $\epsilon = 1$ es la frontera entre las órbitas acotadas y las no acotadas. En poco tiempo mostraré que esta frontera corresponde exactamente a la frontera entre $E < 0$ y $E \geq 0$ mencionados anteriormente. Mientras tanto, empecemos con el caso en el que la constante ϵ es menor que 1. Con $\epsilon < 1$, el denominador de $r(\phi)$ en (8.49) oscila como se muestra en la Figura 8.9 entre los valores $1 \pm \epsilon$. Por lo tanto, $r(\phi)$ oscila entre

$$r_{\text{mín}} = \frac{c}{1 + \epsilon} \qquad \text{y} \qquad r_{\text{máx}} = \frac{c}{1 - \epsilon} \tag{8.50}$$

con $r = r_{\text{mín}}$ en el llamado **perihelio** cuando $\phi = 0$, y $r = r_{\text{máx}}$ en el **afelio** cuando $\phi = \pi$. Ya que $r(\phi)$ es obviamente periódico en ϕ con un período 2π, resulta que

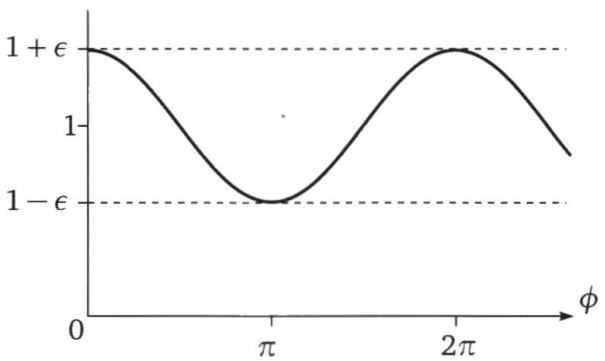


Figura 8.9. El denominador $1 + \epsilon \cos \phi$ en la ecuación (8.49) para $r(\phi)$ oscila entre $1 + \epsilon$ y $1 - \epsilon$, y es periódica con período 2π.

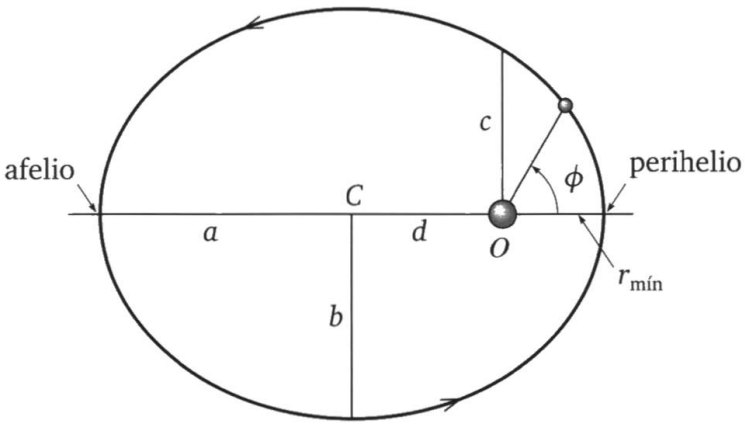


Figura 8.10. Las órbitas acotadas de un cometa o planeta como las dadas en la ecuación (8.49) son elipses. El Sol está en el origen O, que es un foco de la elipse (*no* el centro C). Las distancias a y b se denominan semieje mayor y semieje menor. El parámetro $c = \ell^2/\gamma\mu$ introducido en (8.48) es el valor de r cuando $\phi = 90°$. Los puntos donde el cometa se encuentra más cerca y más lejos del Sol se llaman perihelio y afelio.

$r(2\pi) = r(0)$ y la órbita se cierra sobre sí misma después de sólo una revolución. Por lo tanto la apariencia general de la órbita es como se muestra en la Figura 8.10.

Mientras que la órbita mostrada en la Figura 8.10 desde luego *parece* una elipse, aún no he demostrado que realmente lo es. Sin embargo, es un ejercicio relativamente sencillo (vea el Problema 8.16) reescribir (8.49) en coordenadas cartesianas y obtener la forma

$$\frac{(x+d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{8.51}$$

donde (como se puede comprobar)

$$a = \frac{c}{1-\epsilon^2}, \qquad b = \frac{c}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \qquad \text{y} \qquad d = a\epsilon. \tag{8.52}$$

La ecuación (8.51) es la ecuación estándar de una elipse con semiejes mayor menor a y b, excepto que donde esperaríamos ver x tenemos $x + d$. Esta diferencia refleja que nuestro origen, el Sol, no está en el centro de la elipse, sino a una distancia d de él, como se muestra en la Figura 8.10.

Ahora podemos identificar la constante ϵ, que empezó como una constante indeterminada de integración en (8.47). De acuerdo con (8.52) la razón entre el eje mayor y el menor es

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-\epsilon^2}. \tag{8.53}$$

Aunque probablemente no se recuerde, esta ecuación es la definición (o al menos una posible) de la excentricidad de la elipse. Esto es, esta ecuación nos dice que la constante ϵ es la excentricidad. Hay que fijarse que si $\epsilon = 0$, entonces $b = a$ y la elipse es una circunferencia; si $\epsilon \to 1$, entonces $b/a \to 0$ y la elipse se hace delgada y alargada.

Habiendo definido la constante ϵ como la excentricidad, ahora podemos identificar la posición del Sol en relación con la elipse. Según (8.52) la distancia del centro C hasta el Sol en O es $d = a\epsilon$, y (aunque quizá tampoco se recuerde) $a\epsilon$ es la distancia desde el centro hasta cualquier punto de la elipse. Por lo tanto la posición del Sol es uno de los dos puntos de la elipse, y hemos probado la **primera ley de Kepler**, que los planetas (y cometas cuyas órbitas son acotadas) describen órbitas que son elipses con el Sol en un foco.

Ejemplo 8.4 *El cometa Halley*

El cometa Halley, llamado así por el astrónomo inglés Edmund Halley (1656–1742), describe una órbita muy excéntrica con $\epsilon = 0{,}967$. En máxima aproximación (el perihelio) el cometa está a 0,59 UA del Sol, relativamente cercano a Mercurio. (La UA o unidad astronómica es la distancia media del Sol a la Tierra, alrededor de $1{,}5 \times 10^8$ km). ¿Cuál es la distancia máxima del cometa al Sol, es decir, la distancia del afelio?

La distancia dada es $r_{\text{mín}} = 0{,}59$ UA, y, según (8.50), $r_{\text{máx}}/r_{\text{mín}} = (1+\epsilon)/(1-\epsilon)$. Por lo tanto

$$r_{\text{máx}} = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} r_{\text{mín}} = \frac{1{,}967}{0{,}033} r_{\text{mín}} = 60\, r_{\text{mín}} = 35 \text{ AU}.$$

Esto significa que a su distancia máxima, el cometa de Halley se encuentra fuera de la órbita de Neptuno.

Período orbital; la tercera ley de Kepler

Ahora podemos averiguar el período de las órbitas elípticas del cometa y planetas. De acuerdo con la segunda ley de Kepler (Sección 3.4), la tasa a la cual una línea del Sol a un cometa o planeta barre área es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\ell}{2\mu}.$$

Como el área total de una elipse es $A = \pi ab$, el período es

$$\tau = \frac{A}{dA/dt} = \frac{2\pi ab\mu}{\ell}.$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros y usamos (8.53) para reemplazar b^2 por $a^2(1-\epsilon^2)$, esto se convierte en

$$\tau^2 = 4\pi^2 \frac{a^4(1-\epsilon^2)\mu^2}{\ell^2} = 4\pi^2 \frac{a^3 c\mu^2}{\ell^2},$$

donde en la última igualdad usé (8.52) para reemplazar $a(1-\epsilon^2)$ por c. Como la longitud c venía definida en (8.48) como $\ell^2/\gamma\mu$, esto implica que

$$\tau^2 = 4\pi^2 \frac{a^3\mu}{\gamma}. \tag{8.54}$$

Finalmente, γ es la constante en la ley de la fuerza del inverso del cuadrado $F = -\gamma/r^2$, y, para la fuerza gravitatoria, $\gamma = Gm_1m_2 = G\mu M$ donde M es la masa total, $M = m_1 + m_2$. (Observe la identidad manejable $m_1m_2 = \mu M$). En nuestro caso $m_2 = M_S$, la masa del Sol, que es mucho mayor que m_1, la masa del cometa o planeta. Por lo tanto, una excelente aproximación, $M \approx M_S$, y

$$\gamma = Gm_1m_2 \approx G\mu M_S\,.$$

Por consiguiente, el factor de μ en (8.54) se cancela, y encontramos que

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} a^3. \tag{8.55}$$

Esta es la **tercera ley de Kepler**: como la masa del cometa (o planeta) se anula, la ley dice que para todos los cuerpos que orbitan alrededor del Sol, el cuadrado del período es proporcional al cubo del semieje mayor. (En las órbitas circulares podemos reemplazar a^3 por r^3). La ley se aplica de la misma manera a satélites de cualquier cuerpo grande. Por ejemplo, todos los satélites de la Tierra, incluida la Luna, obedecen a la misma ley [con M_S sustituida por la masa de la Tierra M_T en (8.55)], y lo mismo se aplica a todas las Lunas de Júpiter.

Ejemplo 8.5 *Período de un satélite terrestre de órbita pequeña*

Usar la tercera ley de Kepler para estimar el período de un satélite en órbita circular a unas decenas de milla por encima de la superficie de la Tierra.

El período viene dado por (8.55) con M_S reemplazado por M_T. Como la órbita es circular, podemos reemplazar a por r, y como la órbita está cerca de la superficie de la Tierra, $r \approx R_T$ por el radio de la Tierra. Por tanto

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} {R_T}^3.$$

Esto se simplifica si recordamos la $GM_T/{R_T}^2 = g$, la aceleración de la gravedad sobre la superficie de la Tierra, y encontramos que

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{R_T}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{6{,}38 \times 10^6 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}} = 5070 \text{ s} \approx 85 \text{ min}, \tag{8.56}$$

que coincide con la conocida observación de que los satélites de órbita baja dan la vuelta a la Tierra en, más o menos, una hora y media.

Relación entre energía y excentricidad

Finalmente, podemos relacionar la excentricidad ϵ de la órbita con la energía E del cometa u otro cuerpo que esté orbitando. La forma más sencilla de hacer esto es recordar que, a la distancia de su máximo acercamiento $r_{\text{mín}}$, la energía del cometa es igual a la energía potencial efectiva U_{ef} [ecuación (8.36)],

$$\begin{aligned} E = U_{\text{ef}}(r_{\text{mín}}) &= -\frac{\gamma}{r_{\text{mín}}} + \frac{\ell^2}{2\mu {r_{\text{mín}}}^2} \\ &= \frac{1}{2r_{\text{mín}}}\left(\frac{\ell^2}{\mu r_{\text{mín}}} - 2\gamma\right). \end{aligned} \tag{8.57}$$

Ahora sabemos por (8.50) que $r_{\text{mín}} = c/(1+\epsilon)$, y por su definición (8.48) que $c = \ell^2/\gamma\mu$. Por lo tanto

$$r_{\text{mín}} = \frac{\ell^2}{\gamma\mu(1+\epsilon)}$$

y, sustituyendo por (8.57),

$$\begin{aligned} E &= \frac{\gamma\mu(1+\epsilon)}{2\ell^2}[\gamma(1+\epsilon) - 2\gamma] \\ &= \frac{\gamma^2\mu}{2\ell^2}(\epsilon^2 - 1). \end{aligned} \tag{8.58}$$

Los cálculos que llevan hasta (8.58) son igual de válidos tanto para órbitas acotadas como no acotadas, e implican las esperadas correlaciones: las energías negativas ($E < 0$) corresponden a excentricidades $\epsilon < 1$, que a su vez corresponden a órbitas acotadas. Las energías positivas ($E > 0$) corresponden a excentricidades $\epsilon > 1$, que a su vez corresponden a órbitas no acotadas. La ecuación (8.58) es una relación útil entre las propiedades mecánicas E y ℓ y la propiedad geométrica ϵ. Esto implica algunas conexiones interesantes. Por ejemplo, para un valor dado del momento an-

gular ℓ, la órbita para la energía más baja posible es la órbita circular con $\epsilon = 0$ (una conexión con una importante equivalencia en mecánica cuántica).

8.7 Órbitas de Kepler no acotadas

En la sección anterior encontramos la órbita general de Kepler como la dada por (8.49),

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon \cos \phi}, \tag{8.59}$$

y analizamos en detalle las órbitas acotadas, es decir, aquellas para las que $\epsilon < 1$ o, de manera equivalente, como ya hemos visto, $E < 0$. En esta sección, esbozaré el análisis correspondiente de las órbitas no acotadas, con $\epsilon \geq 1$ y $E \geq 0$.

La frontera entre las órbitas acotadas y no acotadas aparece cuando $\epsilon = 1$ o $E = 0$. Con $\epsilon = 1$, el denominador de (8.59) desaparece cuando $\phi = \pm\pi$. Por lo tanto, $r(\phi) \to \infty$ como $\phi \to \pm\pi$. Esto es, si $\epsilon = 1$, la órbita es no acotada y continúa hacia el infinito a medida que el cometa se aproxima a $\phi = \pm\pi$. Con un poco de

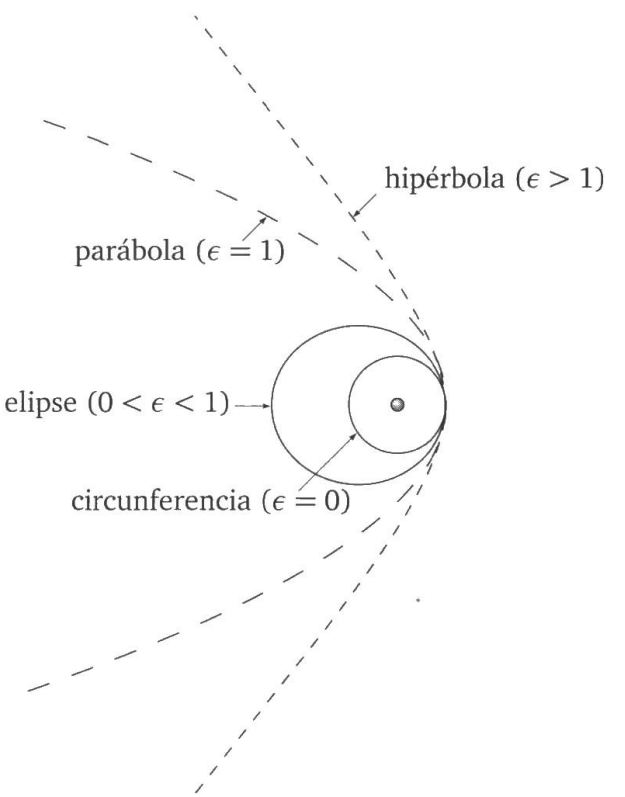


Figura 8.11. Cuatro órbitas de Kepler diferentes para un cometa: una circunferencia, una elipse, una parábola y una hipérbola. Para mayor claridad, las cuatro órbitas se han escogido con los mismos valores para $r_{\text{mín}}$ y con las mayores aproximaciones todas en la misma dirección.

álgebra elemental, similar a la que nos llevó a (8.51), se muestra que con $\epsilon = 1$ la versión cartesiana de (8.59) es

$$y^2 = c^2 - 2cx \tag{8.60}$$

que es la ecuación de una parábola. Esta órbita se muestra (mediante guiones largos) en la Figura 8.11.

Si $\epsilon > 1$ (o $E > 0$), el denominador de (8.59) desaparece en un valor $\phi_{\text{máx}}$ determinado por la condición

$$\epsilon \cos(\phi_{\text{máx}}) = -1.$$

Por lo tanto $r(\phi) \to \infty$ cuando $\phi \to \pm\phi_{\text{máx}}$ y la órbita está confinada a los ángulos $-\phi_{\text{máx}} < \phi < \phi_{\text{máx}}$. Esto le da a la órbita la apariencia general esbozada en la Figura 8.6. Con $\epsilon > 1$ la forma cartesiana de (8.59) es (Problema 8.30)

$$\frac{(x-\delta)^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \tag{8.61}$$

en donde fácilmente se identifican las constantes α, β y δ (Problema 8.30). Esta es la ecuación de una hipérbola, y hemos demostrado que, tal como anticipamos, las órbitas de Kepler de energía positiva son hipérbolas. Una de dichas órbitas se muestra (mediante guiones pequeños) en la Figura 8.11.

Resumen de las órbitas de Kepler

Nuestros resultados para las órbitas de Kepler pueden resumirse de la siguiente manera: todas las órbitas posibles vienen dadas por la ecuación (8.59),

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon \cos\phi}, \tag{8.62}$$

y se caracterizan por las dos constantes de integración[5] ϵ y c. La constante sin dimensión ϵ se relaciona con la energía del cometa mediante (8.58),

$$E = \frac{\gamma^2 \mu}{2\ell^2}(\epsilon^2 - 1). \tag{8.63}$$

Como ya hemos visto, es la excentricidad de la órbita lo que determina la forma de la órbita de la siguiente manera:

---

[5] Como la segunda ley de Newton es una ecuación diferencial de segundo orden y el movimiento es en dos dimensiones, en realidad hay cuatro constantes de integración en total. La tercera es la constante δ en (8.46) que decidimos que fuese cero, obligando al eje de la órbita a ser el eje x. La cuarta es la posición del cometa sobre la órbita en el instante $t = 0$.

excentricidad	energía	órbita
$\epsilon = 0$	$E < 0$	circunferencia
$0 < \epsilon < 1$	$E < 0$	elipse
$\epsilon = 1$	$E = 0$	parábola
$\epsilon > 1$	$E > 0$	hipérbola

Se puede ver en (8.62) que la constante c es un factor de escala que determina el tamaño de la órbita. Tiene dimensiones de longitud y es la distancia del Sol al cometa cuando $\phi = \pi/2$. Es igual a $\ell^2/\gamma\mu$ o, ya que γ es la constante de fuerza Gm_1m_2,

$$c = \frac{\ell^2}{Gm_1m_2\mu}, \tag{8.64}$$

donde m_1 es la masa del cometa, m_2 la del Sol, y μ es la masa reducida $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$, que es muy parecida a m_1 al ser m_2 tan grande.

8.8 Cambios de órbita

En esta última sección hablaré de cómo un satélite puede cambiar de una órbita a otra. Por ejemplo, una nave espacial que quisiera ir a Venus pasaría de una órbita circular cercana a la Tierra y centrada en el Sol a una órbita elíptica que la llevase hasta la órbita de Venus. Otro ejemplo, que es el que discutiremos aquí, es un satélite de la Tierra que desea cambiar de una órbita a otra alrededor de la Tierra, quizá desde una órbita circular a una elíptica que le llevará a una altitud mayor. El análisis de las órbitas de la Tierra es el mismo que el de las órbitas alrededor del Sol, excepto que la masa M_S del Sol debe ser reemplazada por la masa M_T de la Tierra, y los puntos más cercano y más lejano de la Tierra se denominan **perigeo** y **apogeo** (en lugar de perihelio y afelio para el Sol). Centraremos nuestra atención en órbitas acotadas y elípticas, para las cuales la forma más general es

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon\cos(\phi - \delta)}. \tag{8.65}$$

(Siempre que estemos interesados en una única órbita, podríamos elegir nuestro eje x de tal manera que el ángulo δ fuera cero. Si estamos interesados en dos órbitas arbitrarias, no podemos deshacernos de δ de esta manera, al menos no para ambas).

Supongamos que nuestra nave espacial está inicialmente en una órbita de la forma (8.65) con energía E_1, momento angular ℓ_1 y parámetros orbitales c_1, ϵ_1 y δ_1. Una forma común de cambiar las órbitas para la nave espacial es encender sus cohetes a toda potencia durante un breve lapso de tiempo. Como buena aproximación

podemos tratar este procedimiento como un impulso que ocurre a un único ángulo ϕ_0 y provoca un cambio instantáneo de la velocidad en una cantidad conocida. A partir del cambio conocido en la velocidad, podemos calcular la nueva energía E_2 y el momento angular ℓ_2. De (8.48) podemos calcular el nuevo valor de c_2, y de (8.58) la nueva excentricidad ϵ_2. Finalmente, como la nueva órbita debe unirse a la antigua a un ángulo ϕ_0, esto es, $r_1(\phi_0) = r_2(\phi_0)$, podemos deducir δ_2 de la ecuación

$$\frac{c_1}{1+\epsilon_1\cos(\phi_0-\delta_1)} = \frac{c_2}{1+\epsilon_2\cos(\phi_0-\delta_2)} \tag{8.66}$$

Este cálculo, aunque directo en principio, es tedioso, y no especialmente revelador en la práctica. Para simplificar los cálculos y resaltar mejor las cosas importantes, me ocuparé sólo de un caso especial importante.

Empuje tangencial en el perigeo

Consideremos un satélite que se cambia de una órbita a otra encendiendo sus cohetes en la dirección tangencial, hacia delante o hacia atrás, cuando está en el perigeo de su órbita inicial. Por la elección de nuestro eje x, podemos hacer que esto ocurra en la dirección $\phi = 0$, así que $\phi_0 = 0$ y $\delta_1 = 0$. Más aún, como los cohetes se encienden en la dirección tangencial, la velocidad justo después del encendido tiene todavía la misma dirección, que es perpendicular al radio desde la Tierra al satélite. Por tanto, la posición en la que se encienden los cohetes es también el perigeo para la órbita final,[6] y $\delta_2 = 0$ también. Por consiguiente la ecuación (8.66) que asegura la continuidad de la órbita se reduce a

$$\frac{c_1}{1+\epsilon_1} = \frac{c_2}{1+\epsilon_2}. \tag{8.67}$$

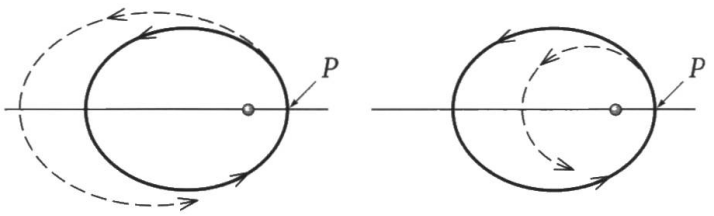
Denotemos por λ la razón de las velocidades del satélite antes y después de encender los cohetes, $v_2 = \lambda v_1$. Llamaré λ al **factor de empuje**; si $\lambda > 1$, entonces el empuje era hacia delante y el satélite se aceleró; si $0 < \lambda < 1$, entonces el empuje era hacia atrás y el satélite se frenó. (En principio, λ podría ser negativo, pero esto representaría un cambio de dirección, y una maniobra que no consideraré).

En el perigeo el momento angular es justo $\ell = \mu r v$. El valor de r no cambia durante el impulso, y supondré que al encenderse los cohetes la masa del satélite cambia en una cantidad despreciable. Bajo estas suposiciones, el momento angular cambia en el mismo factor que la velocidad:

$$\ell_2 \lambda \ell_1. \tag{8.68}$$

---

[6] Realmente, puede ser el perigeo de la órbita final *o el apogeo*, pero podemos tratar ambos casos al mismo tiempo, como veremos directamente.



(a) Impulso hacia delante **(b)** Impulso hacia atrás

Figura 8.12. Cambio de órbita. La órbita original del satélite está representada por la curva continua, y los cohetes se encienden cuando el satélite está en el perigeo P. **(a)** Un impulso hacia delante mueve el satélite a la órbita elíptica a trazos más grande. **(b)** Un impulso hacia atrás mueve el satélite a la órbita elíptica a trazos más pequeña.

De acuerdo con (8.48), el parámetro c es proporcional a ℓ^2. Por lo tanto, el nuevo valor de c es

$$c_2 = \lambda^2 c_1. \tag{8.69}$$

Sustituyendo en (8.67) y resolviendo para ϵ_2, encontramos para la nueva excentricidad

$$\epsilon_2 = \lambda^2 \epsilon_1 + (\lambda^2 - 1). \tag{8.70}$$

La ecuación (8.70) contiene casi toda la información interesante sobre la nueva órbita. Por ejemplo, si $\lambda > 1$ (un empuje hacia delante), es fácil ver que la nueva órbita tiene $\epsilon_2 > \epsilon_1$. Por consiguiente la nueva órbita tiene el mismo perigeo que la primera, pero tiene mayor excentricidad y por eso permanece fuera de la órbita anterior, como muestra la curva a trazos exterior en la Figura 8.12(a). Si hacemos λ suficientemente grande, entonces la nueva excentricidad se hace mayor que 1; en este caso la nueva órbita es realmente una hipérbola, y nuestra nave espacial escapa de la Tierra.

Si elegimos el factor de empuje $\lambda < 1$ (empuje hacia atrás), entonces la nueva excentricidad es menor que la antigua, $\epsilon_2 < \epsilon_1$, y la nueva órbita permanece dentro de la primera, como muestra la curva a trazos interior de la Figura 8.12(b). Cuando hacemos λ progresivamente más pequeño, finalmente ϵ_2 desaparece; esto es, si encendemos los cohetes hacia atrás justo con el impulso correcto, podemos mover el satélite a una órbita circular. Si elegimos λ todavía más pequeño, entonces ϵ_2 se hace negativo. ¿Qué significa esto? El parámetro ϵ comenzó como una constante positiva, pero la ecuación orbital $r = c/(1 + \epsilon \cos\phi)$ concuerda perfectamente con $\epsilon < 0$. La única diferencia es que la dirección $\phi = 0$ es ahora la dirección de r máxima y $\phi = \pi$ es aquella de r mínima; esto es, el apogeo y el perigeo tienen posiciones cambiadas. Aplicando un empuje hacia atrás lo suficientemente grande, en P (el perigeo de la primera órbita), mandamos el satélite a una órbita más pequeña, para la cual P es ahora el apogeo.

Ejemplo 8.6 *Cambios entre órbitas circulares*

La tripulación de un satélite en una órbita circular de radio R_1 quiere pasar a una órbita circular de radio $2R_1$. Esto lo hace mediante dos empujes sucesivos, como se muestra en la Figura 8.13. Primero se da un empuje en el punto P a una segunda órbita de transferencia elíptica, lo suficientemente grande para sacarlo hasta el radio deseado. Segundo, para alcanzar el radio deseado (en P', el apogeo de la órbita de transferencia) se da otro empuje hacia la tercera órbita circular. ¿En qué factor debe aumentar su velocidad en cada uno de estos empujes? Es decir, ¿cuáles son los factores de empuje requeridos, λ y λ'? ¿En qué factor aumenta la velocidad del satélite como resultado de toda la maniobra?

La órbita circular inicial tiene $c_1 = R_1$ y excentricidad $\epsilon_1 = 0$. La órbita final ha de tener radio $R_3 = 2R_1$. De acuerdo con (8.69), la órbita de transferencia tiene $c_2 = \lambda^2 R_1$ y, de acuerdo con (8.70), $\epsilon_2 = (\lambda^2 - 1)$, donde λ es el factor de empuje del primer lanzamiento, en P. Cuando el satélite alcance el punto P', queremos que esté en un radio R_3. Como P' es el apogeo de la órbita de transferencia, esto requiere que

$$R_3 = \frac{c_2}{1-\epsilon_2} = \frac{\lambda^2 R_1}{1-(\lambda^2-1)} = \frac{\lambda^2 R_1}{2-\lambda^2} \tag{8.71}$$

que se resuelve fácilmente para λ y obtenemos

$$\lambda = \sqrt{\frac{2R_3}{R_1+R_3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}15. \tag{8.72}$$

El satélite tiene que aumentar su velocidad alrededor de un 15 % para pasar a la órbita de transferencia deseada.

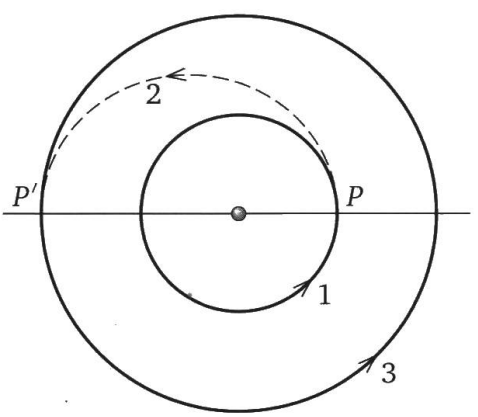


Figura 8.13. Dos empujes sucesivos, en P y P', llevan a un satélite desde la órbita circular más pequeña hasta la órbita 2, y después hasta la órbita circular final 3.

La segunda transferencia sucede en P', el apogeo de la órbita de transferencia. En el Problema 8.33 se puede demostrar que el segundo factor de empuje es

$$\lambda' = \sqrt{\frac{R_1 + R_3}{2R_1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1{,}22; \tag{8.73}$$

esto es, tenemos que aumentar la velocidad un 22 % para pasar de la órbita de transferencia a la órbita circular final.

Sería tentador pensar que el cambio total en la velocidad, al moverse de la órbita inicial a la final, era justo el producto $\lambda\lambda'$ de los dos factores de empuje, pero esto no tiene en cuenta que la velocidad del satélite también cambia a medida que se mueve alrededor de la órbita de transferencia. Por la conservación del momento angular, es fácil ver que las velocidades en los dos extremos de la órbita de transferencia cumplen $v_2(\text{apo})R_3 = v_2(\text{per})R_1$. Por lo tanto, la ganancia total en velocidad está dada por

$$\begin{aligned} v_3 &= \lambda' \cdot \frac{v_2(\text{apo})}{v_2(\text{per})} \cdot \lambda \cdot v_1 \\ &= \sqrt{\frac{R_1 + R_3}{2R_1}} \cdot \frac{R_1}{R_3} \cdot \sqrt{\frac{2R_3}{R_1 + R_3}} \cdot v_1 = \sqrt{\frac{R_1}{R_3}} \cdot v_1. \end{aligned} \tag{8.74}$$

En el caso presente, $R_3 = 2R_1$ y entonces $v_3 = v_1/\sqrt{2}$. Esto es, la velocidad final es realmente menor que la inicial en un factor de $\sqrt{2}$. Este resultado [y más generalmente el resultado (8.74)] podrían haberse anticipado. Es fácil demostrar (Problema 8.32) que para órbitas circulares $v \propto 1/\sqrt{R}$. Por consiguiente doblar el radio supone necesariamente que la velocidad se reduzca en un factor de $\sqrt{2}$.

Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 8

Coordenada relativa y masa reducida

Cuando se reescribe en términos de la **coordenada relativa**

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \qquad \text{[Ec. (8.4)]}$$

y la coordenada del CM **R**, el problema de dos cuerpos se reduce al problema de dos partículas independientes, una partícula libre con masa $M = m_1 + m_2$ y posición **R**, y una partícula con masa igual a la de la **masa reducida**

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \qquad \text{[Ec. (8.11)]}$$

posición **r**, y energía potencial $U(r)$.

El problema unidimensional equivalente

El movimiento de la coordenada relativa, con momento angular dado ℓ, es equivalente al movimiento de una partícula en una dimensión (radial), con masa μ, posición r (con $0 < r < \infty$), y **energía potencial efectiva**

$$U_{\text{ef}}(r) = U(r) + U_{\text{cf}}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} \qquad \text{[Ec. (8.30)]}$$

donde U_{cf} se denomina **energía potencial centrífuga**.

La ecuación radial transformada

Con el cambio de variables de r a $u = 1/r$ y eliminando t en favor de ϕ, la ecuación del movimiento unidimensional radial se convierte en

$$u''(\phi) = -u(\phi) - \frac{\mu}{\ell^2 u(\phi)^2} F. \qquad \text{[Ec. (8.41)]}$$

Órbitas de Kepler

Para un planeta o un cometa, la fuerza es $F = Gm_1m_2/r^2 = \gamma/r^2$, y la solución de (8.41) es

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon \cos\phi} \qquad \text{[Ec. (8.49)]}$$

donde $c = \ell^2/\gamma\mu$ y ϵ está relacionada con la energía mediante

$$E = \frac{\gamma^2\mu}{2\ell^2}(\epsilon^2 - 1). \qquad \text{[Ec. (8.58)]}$$

Esta **órbita de Kepler** es una elipse, una parábola, o una hipérbola, en función de que la excentricidad ϵ sea menor, igual, o mayor que 1.

Problemas para el Capítulo 8

Los asteriscos indican el nivel aproximado de dificultad, desde los más fáciles (⋆) hasta los más difíciles (⋆ ⋆ ⋆).

Sección 8.2 Centro de masa y coordenadas relativas; masa reducida

8.1 ⋆ Comprobar que las posiciones de dos partículas pueden escribirse en términos del CM y las posiciones relativas como $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + m_2\mathbf{r}/M$ y $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - m_1\mathbf{r}/M$. Por lo tanto, confirmar que la EC total de las dos partículas puede expresarse como $T = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2$, donde μ denota la masa reducida $\mu = m_1m_2/M$.

8.2 ⋆ ⋆ Aunque el principal tema de este capítulo es el movimiento de dos partículas no sujetas a ninguna fuerza externa, muchas de las ideas [por ejemplo, la partición del lagrangiano $\mathcal{L}$ en dos partes independientes $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{cm}} + \mathcal{L}_{\text{rel}}$ como en la ecuación (8.13)] se aplican fácilmente a situaciones más generales. Para ilustrarlo, consideremos lo siguiente: dos masas m_1 y m_2 se mueven en un campo gravitatorio uniforme $\mathbf{g}$ e interaccionan a través de una energía potencial $U(r)$. **(a)** Demostrar que el lagrangiano puede descomponerse como en (8.13). **(b)** Escribir las ecuaciones de Lagrange para las tres coordenadas X, Y, Z del CM y describir el movimiento del CM.

Escribir las tres ecuaciones de Lagrange para las coordenadas relativas y mostrar claramente que el movimiento de $\mathbf{r}$ es el mismo que el de una única partícula de masa igual a la masa reducida μ, con posición $\mathbf{r}$ y energía potencial $U(r)$.

8.3 ⋆⋆ Dos partículas de masas m_1 y m_2 están unidas por una cuerda sin masa de longitud natural L y constante de fuerza k. Inicialmente, m_2 está descansando sobre una mesa y yo estoy sujetando m_1 verticalmente por encima de m_2 a una altura L. En el instante $t = 0$, proyecto m_1 verticalmente hacia arriba con velocidad inicial v_0. Hallar las posiciones de las dos masas en cualquier instante posterior t (antes de que cualquiera de las dos masas vuelva a la mesa) y describir el movimiento. [*Ayudas*: Ver el Problema 8.2. Suponer que v_0 es suficientemente pequeño como para que las dos masas nunca se choquen].

Sección 8.3 Ecuaciones del movimiento

8.4 ⋆ Usando el lagrangiano (8.13) escribir las tres ecuaciones de Lagrange para las coordenadas relativas x, y, z y mostrar claramente que el movimiento de la posición relativa $\mathbf{r}$ es el mismo que el de una única partícula con posición $\mathbf{r}$, energía potencial $U(r)$, y masa igual a la de la masa reducida μ.

8.5 ⋆ El momento $\mathbf{p}$ conjugado de la posición relativa $\mathbf{r}$ se define con las componentes $p_x = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}$ y así sucesivamente. Probar que $\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{r}}$. Probar también que en el sistema de referencia CM, $\mathbf{p}$ es el mismo que $\mathbf{p}_1$, el momento de la partícula 1 (y también $-\mathbf{p}_2$).

8.6 ⋆ Mostrar que en el sistema de referencia CM, el momento angular $\boldsymbol{\ell}_1$ de la partícula 1 está relacionado con el momento angular total $\mathbf{L}$ por $\boldsymbol{\ell}_1 = (m_2/M)\mathbf{L}$ y asimismo $\boldsymbol{\ell}_2 = (m_1/M)\mathbf{L}$. Como $\mathbf{L}$ se conserva, esto muestra que lo mismo es cierto de $\boldsymbol{\ell}_1$ y $\boldsymbol{\ell}_2$ separadamente en el sistema de referencia CM.

8.7 ⋆⋆ **(a)** Usando la mecánica elemental de Newton encontrar el período de una masa m_1 en una órbita circular de radio r alrededor de una masa *fija* m_2. **(b)** Usando la separación en CM y movimientos relativos, encontrar el período correspondiente para el caso en que m_2 no está fija y las masas se rodean una a la otra separadas por una distancia constante r. Discutir el límite de este resultado si $m_2 \to \infty$. **(c)** ¿Cuál sería el período orbital si la Tierra fuera reemplazada por una masa igual a la masa del Sol, en una órbita circular, con la distancia entre ambas igual a la distancia Tierra–Sol? (La masa del Sol es más de 300 000 veces la de la Tierra).

8.8 ⋆⋆ Dos masas m_1 y m_2 se mueven en un plano e interaccionan mediante una energía potencial $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$. Escribir su lagrangiano en términos del CM y las posiciones relativas $\mathbf{R}$ y $\mathbf{r}$, y encontrar las ecuaciones de movimiento para las coordenadas X, Y y x, y. Describir el movimiento y hallar la frecuencia del movimiento relativo.

8.9 ⋆⋆ Consideremos dos partículas de masas iguales, $m_1 = m_2$, enganchadas una a la otra por un muelle recto ligero (constante de fuerza k, longitud natural L) y libre para deslizarse sobre una mesa horizontal sin rozamiento. **(a)** Escribir el lagrangiano en términos de las coordenadas $\mathbf{r}_2$, y reescribirlo en términos del CM y las posiciones relativas, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{r}$, usando coordenadas polares (r, ϕ) para $\mathbf{r}$. **(b)** Escribir y resolver las ecuaciones de Lagrange para las coordenadas X, Y del CM. **(c)** Escribir las ecuaciones de Lagrange para r y ϕ. Resolverlas para los dos casos especiales en que r permanece constante y ϕ permanece constante. Describir los movimientos correspondientes. En particular, mostrar que la frecuencia de las oscilaciones en el segundo caso es $\omega = \sqrt{2k/m_1}$.

8.10 ⋆⋆ Dos partículas de masas iguales $m_1 = m_2$ se mueven sobre una superficie horizontal sin rozamiento en la vecindad de una centro de fuerza fijo, con energías potenciales $U_1 = \frac{1}{2}kr_1^2$ y $U_2 = \frac{1}{2}kr_2^2$. Además, las dos interaccionan mediante la energía potencial $U_{12} = \frac{1}{2}\alpha kr^2$, donde r es la distancia entre ellas y α y k son constantes positivas. **(a)** Encontrar el lagrangiano en términos de la posición $\mathbf{R}$ del CM y la posición relativa $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. **(b)** Escribir y resolver las ecuaciones de Lagrange para el CM y las coordenadas relativas X, Y y x, y. Describir el movimiento.

8.11 ⋆⋆ Consideremos dos partículas que interaccionan por medio de la energía potencial de la ley de Hooke, $U = \frac{1}{2}kr^2$, donde $\mathbf{r}$ es su posición relativa $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Mostrar que $\mathbf{r}(t)$ describe

una elipse. Con ello demostrar que ambas partículas se mueven alrededor de elipses centradas en su CM común. [Esto es sorprendentemente delicado. Quizá el método más simple es elegir el plano xy como el plano de la órbita y después resolver la ecuación de movimiento (8.15) para x e y. La solución tendrá la forma $x = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t$, con una expresión parecida para y. Si se resuelven éstas para $\text{sen}\,\omega t$ y $\cos\omega t$ y se recuerda que $\text{sen}^2 + \cos^2 = 1$, se puede poner la ecuación orbital en la forma $ax^2 + 2bxy + cy^2 = k$ donde k es una constante positiva. Entonces se usa el resultado conocido de que si a y c son positivos y $ac > b^2$, esta ecuación define una elipse].

Sección 8.4 El problema unidimensional equivalente

8.12 ⋆⋆ **(a)** Mediante el análisis de la energía potencial efectiva (8.32) hallar el radio al cual un planeta (o cometa) con momento angular ℓ puede orbitar alrededor del Sol en una órbita circular con radio fijo. [Tener en cuenta dU_{ef}/dr]. **(b)** Mostrar que esta órbita circular es estable, en el sentido de que un suave empujón en la dirección radial provocará sólo pequeñas oscilaciones radiales. [Evaluar d^2U_{ef}/dr^2]. Mostrar que el período de estas oscilaciones es igual que el período orbital del planeta.

8.13 ⋆⋆⋆ Dos partículas cuya masa reducida es μ interaccionan mediante la energía potencial $U = \frac{1}{2}kr^2$, donde r es la distancia entre ellas. **(a)** Hacer un esquema que muestre $U(r)$, la energía potencial centrífuga $U_{\text{cf}}(r)$, y la energía potencial efectiva $U_{\text{ef}}(r)$. (Considerar el momento angular ℓ como una constante fija y conocida). **(b)** Hallar la separación de «equilibrio» r_0, la distancia a la cual las dos partículas pueden girar una alrededor de la otra con r constante. [*Ayuda:* Esto requiere que dU_{ef}/dr sea cero]. **(c)** Haciendo un desarrollo de Taylor de $U_{\text{ef}}(r)$ en torno al punto de equilibrio r_0 y despreciando todos los términos en $(r - r_0)^3$ y superiores, hallar la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor de la órbita circular si las partículas son perturbadas ligeramente de la separación a r_0.

8.14 ⋆⋆⋆ Consideremos una partícula de masa reducida μ orbitando en el campo de una fuerza central con $U = kr^n$ donde $kn > 0$. **(a)** Explicar lo que la condición $kn > 0$ nos dice sobre la fuerza. Esbozar la energía potencial efectiva U_{ef} para los casos $n = 2, -1$ y -3. **(b)** Hallar el radio al cual la partícula puede orbitar con un radio fijo. ¿Para qué valores de k es esta órbita circular estable? ¿Confirman los dibujos esta conclusión? **(c)** Para el caso estable, mostrar que el período de pequeñas oscilaciones alrededor de la órbita circular es $\tau_{\text{osc}} = \tau_{\text{orb}}/\sqrt{n+2}$. Argumentar que si $\sqrt{n+2}$ es un número racional, estas órbitas son cerradas. Esbozarlas para los casos $n = 2, -1$ y 7.

Sección 8.6 Órbitas de Kepler

8.15 ⋆ Al mostrar la tercera ley de Kepler (8.55) hicimos una aproximación basada en el hecho de que la masa del Sol M_S es mucho mayor que aquella m del planeta. Mostrar que la ley debería realmente decir $\tau^2 = [4\pi^2/G(M_S + m)]a^3$, y por tanto la «constante» de proporcionalidad es realmente un poco diferente para diferentes planetas. Dado que la masa del planeta más pesado (Júpiter) es alrededor de 2×10^{27} kg, mientras que M_S es alrededor de 2×10^{30} kg (y algunos planetas tienen masas varios órdenes de magnitud menores que Júpiter), ¿en qué porcentaje se esperaría que variase la «constante» de la tercera ley de Kepler para los distintos planetas?

8.16 ⋆⋆ Hemos probado en (8.49) que cualquier órbita de Kepler se puede escribir en la forma $r(\phi) = c/(1 + \epsilon\cos\phi)$, donde $c > 0$ y $\epsilon \geq 0$. Para el caso en que $0 \leq \epsilon < 1$, reescribir esta ecuación en coordenadas cartesianas (x, y) y probar que la ecuación se puede poner en la forma (8.51), que es la ecuación de una elipse. Verificar los valores de las constantes dados en (8.52).

8.17 ⋆⋆ Si se hizo el Problema 4.41 se vio el **teorema del virial** para una órbita circular de una partícula en una fuerza central con $U = kr^n$. He aquí una forma más general del teorema que se aplica a cualquier órbita periódica de la partícula. **(a)** Hallar la derivada temporal de la cantidad $G = \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$ e, integrando desde tiempo 0 hasta t, mostrar que

$$\frac{G(t) - G(0)}{t} = 2\langle T\rangle - \langle \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}\rangle$$

donde **F** es la fuerza neta sobre la partícula y $\langle f \rangle$ denota el promedio temporal de cualquier cantidad f. **(b)** Explicar por qué, si la órbita de la partícula es periódica y hacemos t suficientemente grande, podemos hacer el primer miembro de esta ecuación tan pequeño como queramos. Es decir, el primer miembro tiende a cero cuando $t \to \infty$. **(c)** Usar este resultado para probar que si **F** tiene de potencial $U = kr^n$, entonces $\langle T \rangle = n\langle U \rangle/2$, si ahora $\langle f \rangle$ denota el promedio temporal durante un intervalo largo de tiempo.

8.18 ⋆⋆ Se observa que un satélite de la Tierra en el perigeo se encuentra 250 km de la superficie de la Tierra y viaja a unos 8500 m/s. Hallar la excentricidad de su órbita y su altura por encima de la Tierra en el apogeo. [*Ayuda:* El radio de la Tierra es $R_T \approx 6{,}4 \times 10^6$ m. Se necesitará también saber GM_T, pero se puede encontrar si se recuerda que $GM_T/R_T^2 = g$].

8.19 ⋆⋆ La altura de un satélite en el perigeo es 300 km por encima de la superficie de la Tierra y 3000 km en el apogeo. Encontrar la excentricidad de la órbita. Si tomamos la órbita para definir el plano xy y el eje mayor en la dirección x con la Tierra en el origen, ¿cuál es la altura del satélite cuando cruza el eje y? [Ver la ayuda del Problema 8.18].

8.20 ⋆⋆ Consideremos un cometa que pasa por su afelio a una distancia $r_{máx}$ del Sol. Imaginemos que, manteniendo $r_{máx}$ fijo, hacemos de alguna manera el momento angular ℓ cada vez más y más pequeño, aunque no realmente cero; esto es, hacemos que $\ell \to 0$. Tomar las ecuaciones (8.48) y (8.50) para mostrar que en este límite la excentricidad ϵ de la órbita elíptica tiende a 1 y que la distancia de máximo acercamiento $r_{mín}$ tiende a cero. Describir la órbita con $r_{máx}$ fijo pero ℓ muy pequeño. ¿Cuál es el semieje mayor a?

8.21 ⋆⋆⋆ **(a)** Si no se ha hecho ya, hacer el Problema 8.20. **(b)** Usar la tercera ley de Kepler (8.55) para hallar el período de esta órbita en términos de $r_{máx}$ (y G y M_s). **(c)** Considerar ahora el caso extremo de que el cometa se deja libre desde el *reposo* a una distancia $r_{máx}$ del Sol. (En este caso ℓ es realmente cero). Usar la técnica descrita en conexión con (4.58) para encontrar el tiempo tarda el cometa en alcanzar el Sol. (Tomar el radio del Sol como cero). **(d)** Suponiendo que el cometa puede pasar de alguna manera libremente a través del Sol, describir su movimiento completo y hallar su período. **(e)** Comparar las respuestas de las partes (b) y (d).

8.22 ⋆⋆⋆ Una partícula de masa m se mueve con momento angular ℓ alrededor de un centro de fuerza con $F(r) = k/r^3$ donde k puede ser positivo o negativo. **(a)** Esbozar la energía potencial efectiva U_{ef} para distintos valores de k y describir los diferentes tipos de órbita posibles. **(b)** Escribir y resolver la ecuación radial transformada (8.41), y usar las soluciones para confirmar las predicciones realizadas en la parte (a).

8.23 ⋆⋆⋆ Una partícula de masa m se mueve con momento angular ℓ en las proximidades de un centro de fuerza con

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} + \frac{\lambda}{r^3}$$

donde k y λ son positivos. **(a)** Escribir la ecuación radial transformada (8.41) y probar que la órbita tiene la forma

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon \cos(\beta\phi)}$$

donde c, β y ϵ son constantes positivas. **(b)** Hallar c y β en términos de los parámetros dados, y describir las órbita para el caso en que $0 < \epsilon < 1$. **(c)** ¿Para qué valores de β es la órbita cerrada? ¿Qué les pasa a los resultados cuando $\lambda \to 0$?

8.24 ⋆⋆⋆ Consideremos la partícula del Problema 8.23, pero supongamos que la constante λ es negativa. Escribir la ecuación radial transformada (8.41) y describir las órbitas de bajo momento angular (específicamente, $\ell^2 < -\lambda m$).

8.25 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Considerar una partícula con masa m y momento angular ℓ en el campo de una fuerza central $F = -k/r^{5/2}$. Para simplificar las ecuaciones, elegir unidades para las cuales $m = \ell = k = 1$. **(a)** Hallar el valor r_o de r para el que U_{ef} es mínimo y hacer una gráfica de $U_{ef}(r)$ para $0 < r \leq 5r_o$. (Elegir la escala de tal manera que la gráfica muestre la parte interesante de la

curva). **(b)** Suponiendo ahora que la partícula tiene energía $E = -0{,}1$, encontrar un valor preciso de $r_{\text{mín}}$, la distancia de máxima aproximación de la partícula al centro de fuerza. (Esto requerirá el uso de un programa de ordenador para resolver la ecuación relevante numéricamente). **(c)** Suponiendo que la partícula está en $r = r_{\text{mín}}$ cuando $\phi = 0$, usar un programa de ordenador (tal como «NDSolve» en Mathematica) para resolver la ecuación radial transformada (8.41) y encontrar la órbita en la forma $r = r(\phi)$ para $0 \leq \phi \leq 7\pi$. Representar gráficamente la órbita. ¿Parece que es cerrada?

8.26 ⋆⋆⋆ Mostrar que la validez de las primeras dos leyes de Kepler para cualquier cuerpo que orbita alrededor del Sol implica que la fuerza del Sol sobre cualquier cuerpo es central y proporcional a $1/r^2$.

8.27 ⋆⋆⋆ En el instante t_0 se observa un cometa a un radio r_0 que viaja con velocidad v_0 formando un ángulo agudo α con la línea que une el cometa y el Sol. Poner el Sol en el origen O, con el cometa en el eje x (en t_0) y su órbita en el plano xy, y entonces mostrar cómo se podrían calcular los parámetros de la ecuación orbital en la forma $r = c/[1 + \epsilon\cos(\phi - \delta)]$. Hacer lo mismo para el caso en que $r_0 = 1{,}0 \times 10^{11}$ m, $v_0 = 45$ km/s, y $\alpha = 50$ grados. [La masa del Sol es de unos $2{,}0 \times 10^{30}$ kg, y $G = 6{,}7 \times 10^{-11}$ N·m^2/s^2].

Sección 8.7 Órbitas de Kepler no acotadas

8.28 ⋆ Para un satélite de la Tierra dado con momento angular ℓ, mostrar que la distancia de la aproximación más cercana $r_{\text{mín}}$ en una órbita parabólica es la mitad del radio de la órbita circular.

8.29 ⋆⋆ ¿En qué se convertiría la órbita de la Tierra (la cual se puede considerar una circunferencia en este caso) si la mitad de la masa del Sol desapareciera de repente? ¿Permanecería la Tierra acotada al Sol? [*Ayudas*: Considerar qué pasa con las energías cinética y potencial y el momento angular de la Tierra en el momento de la gran desaparición. El teorema del virial para la órbita circular (Problema 4.41) sirve de ayuda aquí]. Tratar el Sol (o lo que quede de él) como fijo.

8.30 ⋆⋆ La órbita general de Kepler está dada en coordenadas polares por (8.49). Reescribir lo mismo en coordenadas cartesianas para los casos en que $\epsilon = 1$ y $\epsilon > 1$. Mostrar que si $\epsilon = 1$, se obtiene una parábola (8.60), y si $\epsilon > 1$, una hipérbola (8.61). Para la última, identificar las constantes α, β y δ en términos de c y ϵ.

8.31 ⋆⋆⋆ Consideremos el movimiento de dos partículas sujetas a una fuerza del inverso del cuadrado *repulsiva* (por ejemplo, dos cargas positivas). Demostrar que este sistema no tiene estados con $E < 0$ (medido en el sistema CM), y que en todos los estados con $E > 0$, el movimiento relativo hace una hipérbola. Esbozar una órbita típica. [*Ayuda:* Pueden usarse los análisis de las Secciones 8.6 y 8.7 excepto que la fuerza debe cambiarse de sentido; probablemente la manera más sencilla para hacer esto es cambiar el signo de γ en (8.44) y todas las ecuaciones subsiguientes (de manera que $F(r) = +\gamma/r^2$) y γ se mantenga positiva].

Sección 8.8 Cambios de órbita

8.32 ⋆ Demostrar que para órbitas circulares alrededor de un centro de fuerza gravitatoria dado (como el Sol), la velocidad de un cuerpo que orbita es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio orbital.

8.33 ⋆⋆ La Figura 8.13 muestra un vehículo espacial pasando de una órbita circular, órbita 1 en P a una órbita de transferencia 2 y después desde la órbita de transferencia en P' hasta la órbita circular final 3. En el Ejemplo 8.6 se deducía en detalle el factor de empuje requerido para el lanzamiento en P. Demostrar de la misma manera que el factor de empuje requerido en P' es $\lambda' = \sqrt{(R_1 + R_3)/2R_1}$. [El razonamiento debería discurrir casi paralelamente al del Ejemplo 8.6, pero hay que tener en cuenta que P' es el apogeo (no el perigeo) de la órbita de transferencia. Por ejemplo, los signos positivos en (8.67) aquí deberían ser negativos].

8.34 ⋆⋆ Supongamos que decidimos enviar un vehículo espacial a Neptuno, usando la transferencia simple descrita en el Ejemplo 8.6 (página 351). La nave comienza en una órbita circular

cercana a la Tierra (radio 1 AU o unidad astronómica) y debe acabar en una órbita circular cercana a Neptuno (radio alrededor de 30 AU). Usar la tercera ley de Kepler para demostrar que la transferencia tardará unos 31 años. (En la práctica esto se puede mejorar procurando que la nave reciba un empuje adicional al pasar por Júpiter).

8.35 ⋆⋆⋆ Una nave espacial en una órbita circular quiere transferirse a otra órbita circular de un cuarto del radio, mediante un empuje tangencial para pasar a una órbita elíptica y un segundo empuje tangencial en el extremo opuesto de la elipse, para llegar a la órbita circular deseada. (El dibujo se asemeja a la Figura 8.13 pero recorrida hacia atrás). Encontrar los factores de empuje necesarios y demostrar que la velocidad en la órbita final es dos veces *mayor* que la velocidad inicial.

CAPÍTULO 9

Mecánica en sistemas no inerciales

Vimos en el Capítulo 1 que las leyes de Newton son válidas sólo en el caso especial de sistemas de referencia *inerciales* (sistemas que están o bien acelerándose o bien rotando). La reacción natural ante este condicionamiento es la de afrontar todos los problemas de mecánica usando sólo sistemas inerciales, y esto es, de hecho, lo que hemos estado haciendo hasta ahora. Sin embargo, existen situaciones en las que es muy deseable considerar un sistema no inercial. Por ejemplo, si estamos sentados en un coche que se está acelerando y queremos describir el comportamiento de una moneda que estamos lanzando al aire, es muy natural querer describirlo *como visto por uno mismo*, esto es, en el sistema de aceleración del coche en el que se viaja. Otro ejemplo importante es el de un sistema de referencia fijo a la Tierra. Como una (excelente) aproximación podemos considerar que es un sistema inercial. No obstante, la Tierra rota sobre su propio eje y se acelera en su propia órbita, y por estas dos razones, un sistema de referencia fijo a la Tierra no es del todo inercial. En la mayoría de los problemas, la característica no inercial de un sistema fijo a la Tierra es totalmente ignorable, pero existen situaciones, por ejemplo el lanzamiento de un cohete de largo alcance, en las que la rotación de la Tierra tiene consecuencias importantes. Naturalmente, nos gustaría describir el movimiento relativo al sistema ligado a la Tierra en el que vivimos, pero para hacerlo, debemos aprender a hacer mecánica en sistemas no inerciales.

En las dos primeras secciones de este capítulo describiré un caso sencillo, el de un sistema de referencia que se acelera pero no rota. Durante el resto del capítulo, hablaré sobre el caso de un sistema de referencia en rotación.

9.1 Aceleración sin rotación

Consideremos un sistema inercial $\mathcal{S}_0$ y un segundo sistema $\mathcal{S}$ que se está acelerando con respecto a $\mathcal{S}_0$ con aceleración **A**, que no tiene que ser necesariamente constante. Observe que como el sistema que nos interesa es el no inercial, ése es el que he denominado $\mathcal{S}$. Además, estoy usando letras mayúsculas para la aceleración (y la velocidad) del sistema $\mathcal{S}$ relativo al sistema $\mathcal{S}_0$. El sistema inercial $\mathcal{S}_0$ podría ser un sistema anclado al suelo (de momento, ignoraremos la diminuta aceleración de cualquier sistema ligado a la Tierra). El sistema $\mathcal{S}$ podría ser un sistema fijado a un vagón de tren que se mueve con respecto a $\mathcal{S}_0$, con velocidad **V** y aceleración $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{V}}$. Supongamos ahora que un pasajero que está en el vagón lanza hacia arriba una pelota de tenis de masa m, y consideremos el movimiento de la pelota, primero medido en el sistema $\mathcal{S}_0$. Como $\mathcal{S}_0$ es inercial, sabemos que la segunda ley de Newton se cumple, de manera que

$$m\ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{F}, \tag{9.1}$$

donde $\mathbf{r}_0$ es la posición de la pelota con respecto a $\mathcal{S}_0$ y **F** es la fuerza neta sobre la pelota, la suma vectorial de todas las fuerzas sobre la pelota (gravedad, resistencia del aire, la mano del pasajero que la empuja, etcétera).

Ahora consideremos el movimiento de la pelota medido respecto al sistema que se acelera $\mathcal{S}$. La posición de la pelota relativa a $\mathcal{S}$ es **r** y, mediante la suma vectorial de las velocidades, su velocidad $\dot{\mathbf{r}}$ con respecto a $\mathcal{S}$ está relacionada con $\dot{\mathbf{r}}_0$ mediante la fórmula de la suma de velocidades:[1]

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{V} \tag{9.2}$$

esto es,

(velocidad de la pelota relativa al suelo)
= (velocidad de la pelota relativa al vagón) + (velocidad del vagón relativa al suelo).

Diferenciando y reorganizando, encontramos que

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{A}. \tag{9.3}$$

[1] Un importante descubrimiento de la relatividad es que, por supuesto, las velocidades no combinan exactamente según la simple suma vectorial de (9.2); no obstante, desde el punto de vista de la mecánica clásica (9.2) esto es correcto. De la misma manera, daré por supuesto que los tiempos medidos en $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}_0$ son los mismos, lo cual es correcto en mecánica clásica pero no en mecánica relativista.

Si multiplicamos esta ecuación por m y usamos (9.1) para reemplazar $m\ddot{\mathbf{r}}_0$ por $\mathbf{F}$, encontramos que

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - m\mathbf{A}. \tag{9.4}$$

Esta ecuación tiene exactamente la misma forma que la segunda ley de Newton, *excepto* que además de $\mathbf{F}$, la suma de todas las fuerzas identificadas en el sistema inercial, existe un término adicional, a la derecha, igual a $-m\mathbf{A}$. Esto significa que podemos usar la segunda ley de Newton en el sistema no inercial $\mathcal{S}$ *siempre que* aceptemos que en el sistema no inercial debemos añadir un término de fuerza adicional, a menudo denominado **fuerza inercial**:

$$\mathbf{F}_{\text{inercial}} = -m\mathbf{A}. \tag{9.5}$$

Esta fuerza inercial, experimentada en sistemas no inerciales, es habitual en diversas situaciones cotidianas: si se está sentado en una avión que se acelera rápidamente en su despegue se tiene la sensación de que existe una fuerza que nos empuja contra nuestro asiento; si se está de pie en un autobús que frena bruscamente ($\mathbf{A}$ hacia atrás) la fuerza inercial $-m\mathbf{A}$ va hacia delante y nos puede hacer caer si no nos agarramos bien. Cuando un coche toma rápidamente una curva cerrada, la fuerza inercial que siente el pasajero es la denominada fuerza centrífuga, que le empuja hacia afuera. Uno puede pensar que la fuerza inercial es una fuerza «ficticia», introducida con el único propósito de conservar la segunda ley de Newton. No obstante, para un observador situado en un sistema que se acelera, todo esto es muy real.

En muchos problemas que implican objetos en sistemas acelerados, el procedimiento casi más sencillo es usar la segunda ley de Newton en el sistema no inercial, sin olvidarse de incluir la fuerza externa adicional como en (9.4). Un ejemplo sencillo:

Ejemplo 9.1 *Un péndulo en un coche que acelera*

Consideremos un péndulo simple (de masa m y longitud L) instalado en un vagón de tren que acelera hacia la derecha con aceleración constante $\mathbf{A}$, como se muestra en la Figura 9.1. Encontrar el ángulo ϕ_{eq} al que el péndulo permanecerá en reposo, relativo al vagón que acelera y encontrar la frecuencia de las pequeñas oscilaciones alrededor de este ángulo de equilibrio.

Como se puede observar en cualquier sistema inercial, sólo existen dos fuerzas sobre el cuerpo colgante, la tensión de la cuerda $\mathbf{T}$ y el peso $m\mathbf{g}$; por lo tanto la fuerza neta (en cualquier sistema inercial) es $\mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g}$. Si escogemos trabajar en el sistema no inercial del coche que acelera, también existe la fuerza inercial $-m\mathbf{A}$, y la ecuación de movimiento (9.4) es

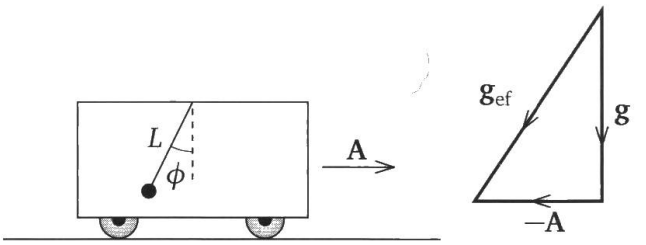


Figura 9.1. Un péndulo está suspendido del techo de un vagón de tren que acelera con aceleración constante **A**. En el sistema no inercial del vagón, la aceleración se manifiesta por la fuerza inercial $-m\mathbf{A}$, que a su vez es equivalente a sustituir **g** por la gravedad efectiva $\mathbf{g}_{\text{ef}} = \mathbf{g} - \mathbf{A}$.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} - m\mathbf{A}. \tag{9.6}$$

En este problema se puede hacer una sorprendente simplificación: debido a que el peso $m\mathbf{g}$ y la fuerza inercial $-m\mathbf{A}$ son ambos proporcionales a la masa m, podemos combinar los dos términos y escribir

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{T} + m(\mathbf{g} - \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{T} + m\mathbf{g}_{\text{ef}} \end{aligned} \tag{9.7}$$

donde $\mathbf{g}_{\text{ef}} = \mathbf{g} - \mathbf{A}$. Podemos ver que la ecuación de movimiento del péndulo, en el sistema de aceleración del vagón, es exactamente igual que en un sistema inercial, *excepto que* **g** *ha sido sustituida por una gravedad efectiva* $\mathbf{g}_{\text{ef}} = \mathbf{g} - \mathbf{A}$, como se muestra en la Figura 9.1.[2] Esto hace que la solución de nuestro problema sea casi trivial.

Si el péndulo va a permanecer en reposo (visto dentro del coche), entonces $\ddot{\mathbf{r}}$ debe ser cero, y de acuerdo con (9.7) **T** debe ser exactamente opuesto a $m\mathbf{g}_{\text{ef}}$. En particular, vemos de la Figura 9.1 que la dirección de **T** (y por tanto del péndulo) tiene que ser

$$\phi_{\text{eq}} = \operatorname{arctg}(A/g). \tag{9.8}$$

La frecuencia de pequeña amplitud de un péndulo en un sistema inercial es bien conocida: $\omega = \sqrt{g/L}$. Por consiguiente el período de nuestro péndulo se obtiene sustituyendo g por $g_{\text{ef}} = \sqrt{g^2 + A^2}$. Esto es,

$$\omega = \sqrt{\frac{g_{\text{ef}}}{L}} = \sqrt{\frac{\sqrt{g^2 + A^2}}{L}}. \tag{9.9}$$

[2] Este resultado, que el efecto de estar en un sistema acelerado es el mismo que sentir una fuerza gravitatoria adicional, es la piedra angular de la relatividad general, donde se llama *principio de equivalencia*.

Merece la pena comparar esta solución con otros métodos más directos. Primero podríamos ciertamente haber encontrado el ángulo de equilibrio (9.8) trabajando en un sistema inercial anclado en el suelo. En este sistema, sólo hay dos fuerzas sobre el cuerpo ($\mathbf{T}$ y $m\mathbf{g}$). Si el péndulo va a permanecer en reposo en el vagón de tren, entonces (visto desde el suelo) se debe acelerar exactamente a $\mathbf{A}$. Por lo tanto la fuerza neta $\mathbf{T} + m\mathbf{g}$ debe igualar a $m\mathbf{A}$, y dibujando un triángulo de fuerzas uno se puede convencer fácilmente de que esto requiere que $\mathbf{T}$ tenga la dirección de (9.8). Por otro lado, para encontrar la frecuencia de las oscilaciones (9.9) directamente en el sistema de referencia anclado en el suelo es necesario bastante ingenio, y no ofrece la claridad de nuestra deducción no inercial.

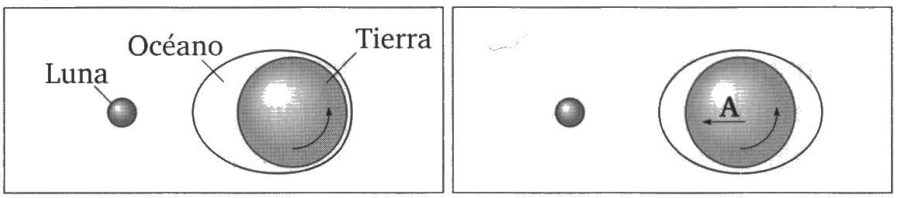
También podríamos haber deducido ambos resultados usando el método lagrangiano. Éste tiene la ventaja importante de que no es necesario pensar en sistemas inerciales y no inerciales (sólo escribir el lagrangiano $\mathcal{L}$ en términos de la coordenada generalizada ϕ y después ponerse a trabajar). Sin embargo, encontrar la frecuencia (9.9) de esta manera es un poco aparatoso, tal como habrá descubierto si se hizo el Problema 7.30.

9.2 Las mareas

Una aplicación bonita del resultado (9.4) es la explicación de las mareas. Como probablemente sepa el lector, las mareas son el resultado de los movimientos de los océanos de la Tierra causados por las atracciones gravitatorias de la Luna y el Sol. Según va rotando la Tierra vamos viendo subidas y bajadas del nivel del mar. El mayor contribuyente a este efecto es la Luna y, para simplificar nuestra discusión, al principio ignoraré al Sol por completo. También supondré, al principio, que los océanos cubren por completo la superficie del globo.

Una explicación aparentemente plausible, aunque totalmente incorrecta, de las mareas se ilustra en la Figura 9.2(a). De acuerdo con este argumento incorrecto, la atracción de la Luna tira de los océanos hacia la propia Luna, provocando un único movimiento hacia ella. El problema con esta argumentación (además de estar mal) es que un único movimiento (abultamiento) provocaría una única marea al día, en vez de las dos observadas.

La explicación correcta, ilustrada en la Figura 9.2(b), es más complicada. El efecto dominante de la Luna es dar a toda la Tierra, incluyendo los océanos, una aceleración $\mathbf{A}$ hacia la Luna. Esta aceleración es la aceleración centrípeta de la Tierra cuando la Luna y la Tierra giran alrededor de su centro de masa común y es (casi exactamente) lo mismo que si todas las masas que conforman la Tierra estuvieran concentradas en su centro. Esta aceleración centrípeta de cualquier objeto que esté sobre la Tierra, cuando orbita con ella, corresponde al tirón de la Luna que sentiría



(a) Incorrecta **(b)** Correcta

Figura 9.2. Vistas de la Tierra y la Luna por encima del Polo Norte, con la Tierra girando en sentido contrario a las agujas del reloj sobre el eje polar. **(a)** Una explicación aparentemente plausible, pero incorrecta, de las mareas argumenta que la atracción de la Luna es la causa de que los océanos se abulten hacia la Luna. Como la Tierra rota una vez al día, una persona fija en la Tierra detectaría una sola marea alta al día, y no las dos observadas. **(b)** La explicación correcta es la siguiente: el principal efecto de la atracción de la Luna es el de dar a toda la Tierra (incluyendo los océanos) una pequeña aceleración **A** en dirección a la Luna. Como se ha explicado en el texto, el efecto residual es que los océanos se mueven tanto hacia la Luna como en dirección contraria a la Luna. Como la Tierra gira una vez al día, estos dos movimientos provocan las dos mareas altas diarias.

el objeto en el centro de la Tierra. Ahora bien, cualquier objeto que esté en el lado de la Tierra más cercano a la Luna está atraído por ésta con una fuerza que es ligeramente *mayor* que la que sería en el centro. Por lo tanto, vistos desde la Tierra, esos objetos se comportan como si experimentaran una leve atracción adicional hacia la Luna. Concretamente, la superficie del océano se distorsiona hacia la Luna. Por otro lado, los objetos situados en el lado opuesto de la Tierra (el más alejado de la Luna) son atraídos por la Luna con una fuerza que es ligeramente *más débil* de lo que sería en el centro, lo que significa que se mueven (relativos a la Tierra) como si fueran ligeramente repelidos por la Luna. Esta leve repulsión hace que el océano se distorsione hacia el lado opuesto a la Luna y es responsable de la segunda marea alta de cada día.

Podemos considerar este argumento de forma cuantitativa (y probablemente más convincente) si volvemos a la ecuación (9.4). Las fuerzas de cualquier masa m cerca de la superficie de la Tierra son **(1)** el tirón gravitatorio, $m\mathbf{g}$, de la Tierra, **(2)** el tirón gravitatorio, $-GM_{\mathrm{L}}m\hat{\mathbf{d}}/d^2$, de la Luna (donde M_{L} es la masa de la Luna y $\mathbf{d}$ es la posición del objeto relativa a la Luna, como en la Figura 9.3), y **(3)** la fuerza neta no gravitatoria $\mathbf{F}_{\mathrm{ng}}$ (por ejemplo, la fuerza flotante sobre una gota de agua en el océano). Al mismo tiempo, la aceleración de nuestro origen O, el centro de la Tierra, es

$$\mathbf{A} = -GM_{\mathrm{L}}\frac{\hat{\mathbf{d}}_{\mathrm{o}}}{d_{\mathrm{o}}^2}$$

donde $\mathbf{d}_{\mathrm{o}}$ es la posición del centro de la Tierra relativa a la Luna. Poniendo todo esto junto encontramos para (9.4)

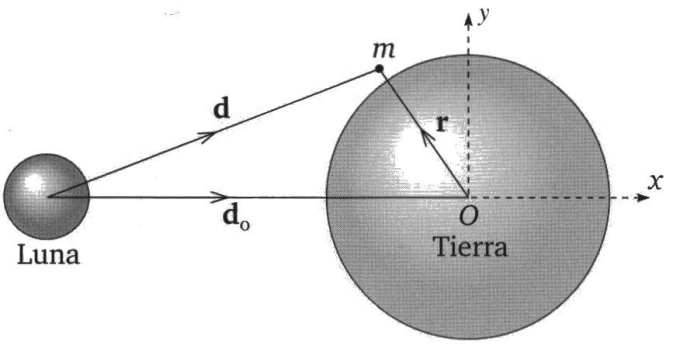


Figura 9.3. Una masa m cerca de la superficie de la Tierra tiene la posición $\mathbf{r}$ relativa el centro de la Tierra, y $\mathbf{d}$ relativa a la Luna. El vector $\mathbf{d}_o$ es la posición del centro de la Tierra relativa a la de la Luna.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - m\mathbf{A} \tag{9.10}$$

$$= \left(m\mathbf{g} - GM_L m \frac{\hat{\mathbf{d}}}{d^2} + \mathbf{F}_{ng} \right) + GM_L m \frac{\hat{\mathbf{d}}_o}{d_o^2} \tag{9.11}$$

o, si combinamos los dos términos que incluyen M_L,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{marea} + \mathbf{F}_{ng}$$

donde la **fuerza de la marea**

$$\mathbf{F}_{marea} = -GM_L m \left(\frac{\hat{\mathbf{d}}}{d^2} - \frac{\hat{\mathbf{d}}_o}{d_o^2} \right) \tag{9.12}$$

es la diferencia entre la fuerza real de la Luna sobre m y la correspondiente fuerza si m estuviera en el centro de la Tierra.

El efecto completo de la Luna sobre el movimiento (relativo a la Tierra) de cualquier objeto cercano a la Tierra está incluido en la fuerza de la marea $\mathbf{F}_{marea}$ de (9.12). En el punto directamente enfrentado a la Luna, el punto P en la Figura 9.4, los vectores $\mathbf{d} = \overrightarrow{MP}$ y $\mathbf{d}_o = \overrightarrow{MO}$ apuntan en la misma dirección, pero $d < d_o$. Por tanto el primer término en (9.12) domina, y la fuerza de la marea es hacia la Luna. En el punto R, enfrentado directamente a la Luna pero situado en el lado de la Tierra opuesto a P, de nuevo $\mathbf{d}$ (igual a $\overrightarrow{MR}$) y $\mathbf{d}_o$ apunta en la misma dirección, pero aquí $d > d_o$ y la fuerza de la marea apunta en dirección opuesta a la Luna. En el punto Q, los vectores $\mathbf{d} = \overrightarrow{MQ}$ y $\mathbf{d}_o = \overrightarrow{MO}$ apuntan en direcciones diferentes; las componentes x de los dos términos en (9.12) se cancelan casi exactamente, pero sólo el primer término tiene componente y. Por ello en Q (y también en S) la fuerza de la marea es hacia dentro, hacia el centro de la Tierra, como se muestra en la Figura 9.4. En particular, el efecto de la fuerza de la marea es distorsionar el océano a la forma mostrada en la Figura 9.2(b), con protuberancias centradas en los puntos P y R, produciendo las dos mareas altas diarias observadas.

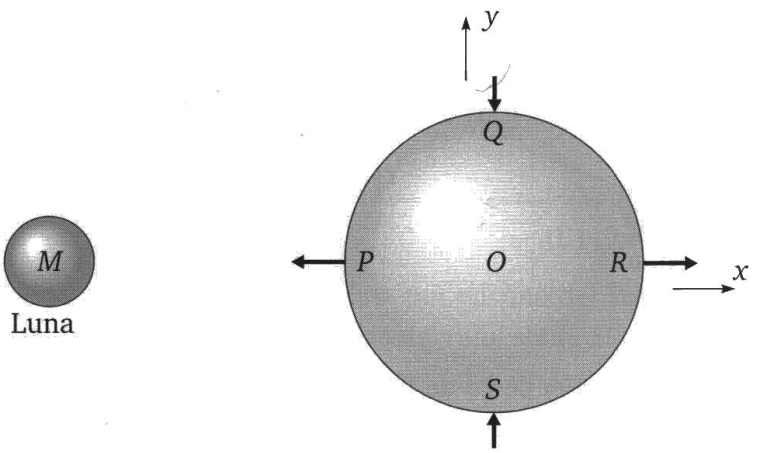


Figura 9.4. La fuerza de la marea $\mathbf{F}_{\text{marea}}$ tal como está dada por (9.12) es hacia fuera (lejos del centro de la Tierra) en los puntos P y R, pero hacia dentro (hacia el centro de la Tierra) en Q y S.

Magnitud de las mareas

La manera más sencilla de encontrar la diferencia de altura entre mareas altas y bajas es observar que la superficie del océano es una superficie equipotencial (una superficie de energía potencial constante). Para probarlo, consideremos una gota de agua de mar en la superficie el océano. La gota está en equilibrio (relativo al sistema de referencia de la Tierra) bajo la influencia de tres fuerzas: el tirón gravitatorio de la Tierra $m\mathbf{g}$, la fuerza de la marea $\mathbf{F}_{\text{marea}}$, y la fuerza de la presión $\mathbf{F}_{\text{p}}$ del agua de mar que la rodea. Como un fluido estático no puede ejercer ninguna fuerza cortante, la fuerza de la presión $\mathbf{F}_{\text{p}}$ debe ser normal a la superficie del océano (es de hecho la fuerza flotante del principio de Arquímedes). Como la gota de agua está en equilibrio, se sigue que $m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{marea}}$ debe ser también normal a la superficie.

Ahora bien, tanto $m\mathbf{g}$ como $\mathbf{F}_{\text{marea}}$ son conservativas, así que cada una se puede escribir como el gradiente de una energía potencial:

$$m\mathbf{g} = -\boldsymbol{\nabla} U_{\text{eg}} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}_{\text{marea}} = -\boldsymbol{\nabla} U_{\text{marea}}$$

donde U_{eg} es la energía potencial debida a la gravedad de la Tierra y U_{marea} es la energía correspondiente a la fuerza de la marea, la cual es, por inspección de (9.12),[3]

$$U_{\text{marea}} = -GM_{\text{L}}m\left(\frac{1}{d} + \frac{x}{d_{\text{o}}^2}\right). \tag{9.13}$$

[3] De acuerdo con (9.12), $\mathbf{F}_{\text{marea}}$ es la suma de dos términos. El primero es justo la típica fuerza del inverso del cuadrado con energía potencial correspondiente $-GM_{\text{L}}m/d$ y el segundo es un vector constante que apunta en la dirección x, que da el término $-GM_{\text{L}}mx/d_{\text{o}}^2$.

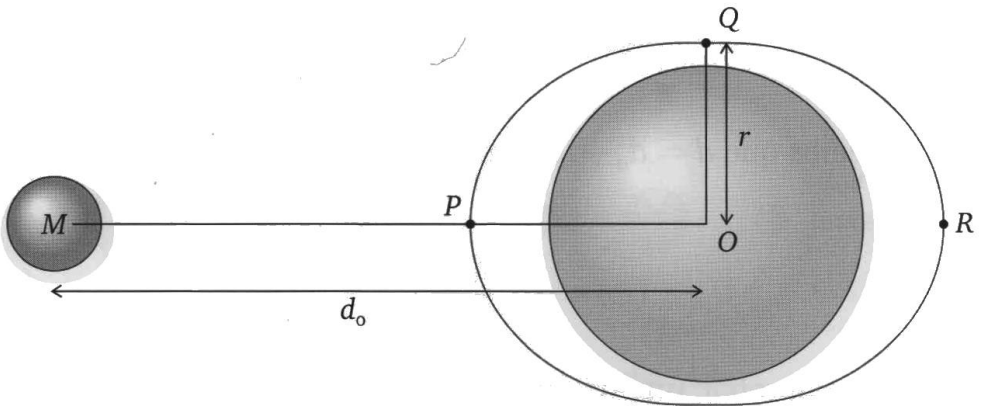


Figura 9.5. La diferencia h entre mareas altas y bajas es la diferencia entre las longitudes OP y OQ. Esta diferencia está muy exagerada aquí (porque h resulta ser del orden de 1 metro), y ambas longitudes OP y OQ son muy parecidas al radio de la Tierra, $R_T \approx 6400$ km. Además, $r \approx R_T$ es realmente unas 60 veces menor que la distancia Tierra-Luna $OM = d_o$.

Por consiguiente, el enunciado de que $m\mathbf{g}+\mathbf{F}_{\text{marea}}$ es normal a la superficie del océano se puede resumir diciendo que $\nabla(U_{\text{eg}} + U_{\text{marea}})$ es normal a la superficie, lo que en realidad significa que $U = (U_{\text{eg}} + U_{\text{marea}})$ es constante en la superficie. En otras palabras, la superficie del océano es una superficie equipotencial.

Como U es constante en la superficie, se sigue que

$$U(P) = U(Q)$$

(vea la Figura 9.5) o

$$U_{\text{eg}}(P) - U_{\text{eg}}(Q) = U_{\text{marea}}(Q) - U_{\text{marea}}(P). \tag{9.14}$$

El primer miembro aquí es justo

$$U_{\text{eg}}(P) - U_{\text{eg}}(Q) = mgh \tag{9.15}$$

donde h es la diferencia requerida entre mareas altas y bajas (la diferencia entre las longitudes OP y OQ en la Figura 9.5). Para encontrar el segundo miembro de (9.14) debemos evaluar las dos energías potenciales, $U_{\text{marea}}(Q)$ y $U_{\text{marea}}(P)$ de la definición (9.13). En el punto Q, vemos que $d = \sqrt{d_o^2 + r^2}$ (con $r \approx R_T$) y $x = 0$. Por lo tanto, de (9.13),

$$U_{\text{marea}}(Q) = -GM_L m \frac{1}{\sqrt{d_o^2 + R_T^2}}.$$

Podemos reescribir la raíz cuadrada como $\sqrt{d_o^2 + R_T^2} = d_o\sqrt{1 + (R_T/d_o)^2}$. Entonces, como $R_T/d_o \ll 1$, podemos usar la aproximación binomial $(1+\epsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\epsilon$ para obtener

$$U_{\text{marea}}(Q) \approx -\frac{GM_{\text{L}}m}{d_{\text{o}}}\left(1-\frac{{R_{\text{T}}}^2}{2{d_{\text{o}}}^2}\right). \tag{9.16}$$

En el punto P, vemos que $d = d_{\text{o}} - R_{\text{T}}$ y $x = -R_{\text{T}}$, y un cálculo similar proporciona (Problema 9.5)

$$U_{\text{marea}}(P) \approx -\frac{GM_{\text{L}}m}{d_{\text{o}}}\left(1+\frac{{R_{\text{T}}}^2}{{d_{\text{o}}}^2}\right). \tag{9.17}$$

(Como se puede comprobar, uno obtiene la misma respuesta en el punto R que mira al lado contrario de la Luna, así que, en esta aproximación, las alturas de las dos mareas diarias deberían ser iguales). Sustituyendo (9.15), (9.16) y (9.17) en (9.14) obtenemos

$$mgh = \frac{GM_{\text{L}}m}{d_{\text{o}}}\,\frac{3{R_{\text{T}}}^2}{2{d_{\text{o}}}^2}.$$

Si recordamos que $g = GM_{\text{T}}/{R_{\text{T}}}^2$, esto implica que

$$h = \frac{3\,M_{\text{L}}R_{\text{T}}^4}{2\,M_{\text{T}}\,{d_{\text{o}}}^3}. \tag{9.18}$$

Introduciendo los números ($M_{\text{L}} = 7{,}35 \times 10^{22}$ kg, $M_{\text{T}} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg, $R_{\text{T}} = 6{,}37 \times 10^6$ m, y $d_{\text{o}} = 3{,}84 \times 10^8$ m), encontramos para la altura de las mareas, debidas únicamente a la Luna,

$$h = 54 \text{ cm} \qquad \text{[Luna sola]}. \tag{9.19}$$

La altura de las mareas producida únicamente por el Sol está también dada por (9.18), pero sustituyendo M_{L} por la masa del Sol, $M_{\text{S}} = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg, y d_{o} por la distancia desde el Sol a la Tierra, $1{,}495 \times 10^{11}$ m. Esto da

$$h = 25 \text{ cm} \qquad \text{[Sol solo]}. \tag{9.20}$$

Aunque la contribución del Sol a las mareas es menor que la de la Luna, ciertamente no es despreciable, y los dos efectos se combinan de una forma interesante. Primero, consideremos un instante en el que la Tierra, el Sol y la Luna están aproximadamente en línea (bien con la Tierra en medio, como en Luna llena, bien con la Luna en medio como en Luna nueva; vea la Figura 9.6). En este caso las fuerzas de la marea debidas a la Luna y al Sol se refuerzan entre sí (porque las dos protuberancias causadas por la Luna coinciden con las dos causadas por el Sol); entonces, pronosticaríamos mareas grandes (conocidas como *mareas vivas*) con h dada por la suma de (9.19) y (9.20), esto es, $h = 54 + 25 = 79$ cm. Por otro lado, si el Sol, la Tierra y la Luna forman un triángulo recto, entonces los dos efectos de la marea se cance-

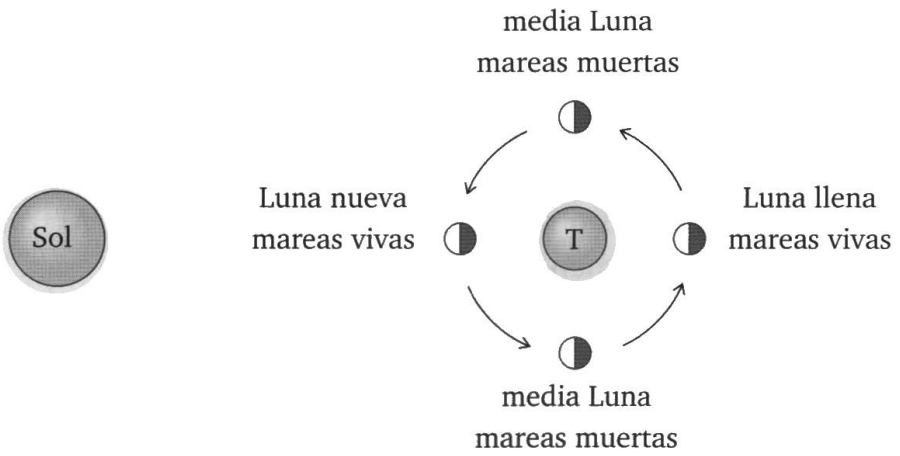


Figura 9.6. Para posiciones sucesivas de la Luna en su órbita mensual alrededor de la Tierra. En Luna nueva y Luna llena, los efectos de la marea de la Luna y el Sol se refuerzan entre ellos y las mareas son grandes («mareas vivas»). En media Luna, los dos efectos tienden a cancelarse y las mareas son pequeñas («mareas muertas»).

larían y pronosticaríamos mareas más pequeñas (conocidas como *mareas muertas*) con altura $h = 54 - 25 = 29$ cm.

Aunque la teoría que acabo de presentar es básicamente correcta, especialmente en el centro de los océanos más grandes, la situación real incluye muchas complicaciones fascinantes. Quizá la más importante sea el efecto de las masas terrestres continentales. Hasta ahora he supuesto que los océanos cubren todo el globo, permitiendo que las fuerzas de la marea de la Luna y del Sol incluyan las dos protuberancias de la Figura 9.5. Pero la presencia de los continentes puede afectar a nuestras conclusiones, conduciendo a veces a mareas más pequeñas y a veces a mareas más grandes. Un mar pequeño, como el Mar Negro o incluso el Mediterráneo, que está aislado de los océanos principales por tierra tendrá lógicamente mareas mucho más pequeñas que las que hemos calculado aquí. Por otro lado, las mareas que se mueven a través de un gran océano pueden ser bloqueadas por los continentes que los rodean y pueden llegar a producir alturas mucho mayores. Y las mareas que entran en estuarios estrechos y afilados pueden provocar olas de marea espectaculares o «macareos».

9.3 El vector velocidad angular

En el resto de este capítulo trataremos el movimiento de objetos vistos desde sistemas de referencia que están *rotando* (relativos a sistemas inerciales). Antes de comenzar esta discusión, debo introducir algunos conceptos y la notación para manejar las rotaciones. Un estudio detallado de las rotaciones es en realidad sorprendentemente complicado. Afortunadamente, no necesitamos muchos de los detalles, y algunas pro-

piedades que son bastante difíciles de demostrar son razonablemente plausibles y se pueden enunciar sin la prueba.

Los ejes de rotación en los que estaremos interesados son casi siempre ejes fijos en un cuerpo rígido. El ejemplo más importante es un conjunto de ejes fijos en la Tierra que rota, pero veremos varios otros ejemplos en el Capítulo 10. Al tratar la rotación de un cuerpo rígido, hay realmente dos situaciones que nos interesan. Primera, algunas veces el cuerpo está rotando alrededor de un punto del cuerpo que está *fijo* (en algún sistema inercial); por ejemplo, una rueda que está girando alrededor de un eje fijo, o un péndulo oscilando en torno a un pivote fijo. Segunda, si el cuerpo que rota no tiene un punto fijo (por ejemplo, una pelota de béisbol que está girando cuando vuela por el aire), entonces normalmente procedemos en dos pasos: en primer lugar encontramos el movimiento del centro de masa, y después analizamos el movimiento rotacional del cuerpo relativo a su CM. Siempre que restrinjamos nuestra atención al movimiento relativo al CM, estamos de hecho examinando el movimiento en un sistema de referencia en el cual el CM está fijo. Así, de una u otra forma, nuestra discusión sobre cuerpos en rotación concierne a cuerpos con un punto efectivamente fijo.

El resultado crucial respecto a un cuerpo que rota alrededor de un punto fijo se llama **teorema de Euler** y afirma que el movimiento más general de cualquier cuerpo relativo a un punto fijo O es una rotación alrededor de algún eje que pasa por O. Aunque este teorema es bastante complicado de demostrar, el resultado parece muy natural y espero que se acepte sin prueba.[4] Implica que para especificar una rotación alrededor de un punto dado O sólo necesitamos dar la dirección del eje en torno al cual ocurrió la rotación y el ángulo que rotó el cuerpo. Aquí estamos más interesados en el *ritmo* de rotación, o *velocidad angular*, y el teorema de Euler implica que esto se puede especificar dando la dirección del eje de rotación y el ritmo de rotación alrededor de este eje. La dirección del eje de rotación se puede especificar por un vector unitario $\mathbf{u}$ y el ritmo por el número $\omega = d\theta/dt$. Por ejemplo, un tiovivo podría estar rotando alrededor de un eje vertical ($\mathbf{u}$ apunta verticalmente) a un ritmo de 10 rad/min ($\omega = 10$ rad/min). A menudo es conveniente combinar el vector unitario $\mathbf{u}$ con ω para formar un **vector velocidad angular**

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{u}. \tag{9.21}$$

El vector único $\boldsymbol{\omega}$ especifica ambas cosas, la dirección y el eje de rotación (a saber, $\mathbf{u}$, la dirección de $\boldsymbol{\omega}$) y el ritmo de rotación (a saber, ω, la magnitud de $\boldsymbol{\omega}$). Realmente no hemos definido todavía del todo un único vector $\boldsymbol{\omega}$. Por ejemplo, para el tiovivo que está rotando alrededor de un eje vertical, la dirección del vector $\boldsymbol{\omega}$ es la vertical, pero cuál es su sentido, ¿apunta hacia arriba o hacia abajo? Suprimimos esta ambigüedad

[4] Se puede encontrar una prueba en, por ejemplo, *Classical Mechanics* por Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safco (3ª ed., Addison-Wesley, 2002), Sección 4-6.

usando la regla de la mano derecha: Elegimos el sentido de $\boldsymbol{\omega}$ de tal manera que cuando nuestro pulgar derecho apunte en el sentido de $\boldsymbol{\omega}$, nuestros dedos derechos roten en el sentido de rotación. Otra manera de decir esto es que si miramos en el sentido del vector $\boldsymbol{\omega}$, veremos que el cuerpo rota en el sentido de las agujas del reloj.

Es importante darse cuenta de que la velocidad angular puede cambiar con el tiempo. Si la velocidad de rotación está cambiando, entonces $\boldsymbol{\omega}$ estará cambiando en módulo, y si el eje de rotación está cambiando, entonces $\boldsymbol{\omega}$ estará cambiando en dirección. Por ejemplo, la velocidad angular de una nave espacial que se está yendo fuera de control normalmente cambiará ambas cosas: módulo y dirección. En este caso $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ es la velocidad angular instantánea en el instante t. Por otro lado, hay muchas situaciones interesantes en las que $\boldsymbol{\omega}$ es constante (en módulo y dirección); por ejemplo, esto es cierto (hasta una extraordinaria aproximación) de la velocidad angular con la que la Tierra gira sobre su eje.

Una relación útil

Hay una relación útil entre la velocidad angular de un cuerpo rígido y la velocidad lineal de cualquier punto del cuerpo. Consideremos, por ejemplo, la Tierra, rotando con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ sobre su centro O (que tomaré como estacionario para la presente discusión). Después consideremos cualquier punto P fijo a la Tierra (o sobre ella), por ejemplo la cima del Everest, con posición $\mathbf{r}$ relativa a O. Podemos especificar $\mathbf{r}$ por sus coordenadas esféricas polares (r, θ, ϕ) con el eje z apuntando directamente al Polo Norte, de tal manera que θ es la **colatitud** –la latitud medida desde el Polo Norte (en lugar desde el ecuador, lo cual es más habitual entre geógrafos). A medida que la Tierra gira sobre su eje, el punto P se ve arrastrado en dirección hacia el este, alrededor de un círculo de latitud de radio $\rho = r \operatorname{sen} \theta$, como se muestra en la Figura 9.7. Esto significa que P se mueve con velocidad $v = \omega r \operatorname{sen} \theta$, y si

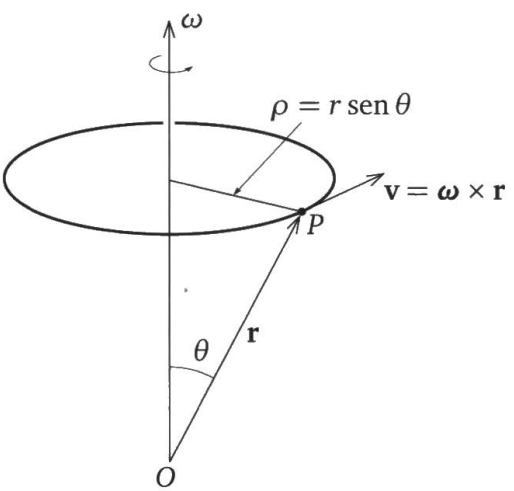


Figura 9.7. La rotación de la Tierra arrastra el punto P sobre la superficie alrededor de un círculo de latitud (radio $\rho = r \operatorname{sen} \theta$) con velocidad $v = \omega\rho = \omega r \operatorname{sen} \theta$ y por tanto la velocidad $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

comprobamos la dirección en la Figura 9.7, veremos que la velocidad del vector es $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Es fácil observar que este resultado es independiente de la naturaleza del cuerpo que rota; esto es, para cualquier cuerpo rígido que rota a velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de un eje a través de O, la velocidad de cualquier punto P (posición $\mathbf{r}$) fijo en el cuerpo es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{9.22}$$

Esta útil relación es, por supuesto, una generalización de la conocida relación $v = \omega r$ aprendida en física elemental para la velocidad de un punto sobre el perímetro de una rueda de radio r. Quizá merezca la pena destacar que existe una relación correspondiente para *cualquier* vector fijo sobre un cuerpo que rota. Por ejemplo, si $\mathbf{e}$ es un vector unitario fijo en el cuerpo, entonces, su ritmo de cambio, vista desde un sistema que no rota es

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}, \tag{9.23}$$

un resultado que usaremos en breve.

Suma de velocidades angulares

Una propiedad básica final de las velocidades angulares que merece la pena mencionar es que las velocidades angulares relativas se suman de la misma manera que las velocidades relativas de traslación. Sabemos (en el marco de la mecánica clásica) que si dos sistemas, 2 y 1, tienen una velocidad relativa $\mathbf{v}_{21}$ y un cuerpo 3 tiene una velocidad $\mathbf{v}_{32}$ relativa al sistema 2, entonces la velocidad de 3 con relación al sistema 1 es simplemente la suma

$$\mathbf{v}_{31} = \mathbf{v}_{32} + \mathbf{v}_{21}. \tag{9.24}$$

Supongamos ahora que el sistema 2 está rotando con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{21}$ en relación con sistema 1 (ambos sistemas con el mismo origen O) y que el cuerpo 3 está rotando (alrededor de O) con velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}_{31}$ y $\boldsymbol{\omega}_{32}$ relativas a los sistemas 1 y 2. Ahora consideremos cualquier punto $\mathbf{r}$ fijo en el sistema 3. Sus velocidades de traslación relativas a los sistemas 1 y 2 deben satisfacer (9.24). De acuerdo con (9.22) esto significa que

$$\boldsymbol{\omega}_{31} \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}_{32} \times \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{r}) = (\boldsymbol{\omega}_{32} + \boldsymbol{\omega}_{21}) \times \mathbf{r}$$

y, como esto debe ser cierto para cualquier $\mathbf{r}$, resulta que

$$\boldsymbol{\omega}_{31} = \boldsymbol{\omega}_{32} + \boldsymbol{\omega}_{21}. \tag{9.25}$$

Esto es, las velocidades angulares se suman de la misma manera que las velocidades de traslación.

Notación para velocidades angulares

A la hora de etiquetar velocidades angulares, por lo general me atendré a los siguientes convencionalismos: usaré la letra minúscula $\boldsymbol{\omega}$ para la velocidad angular de un cuerpo (como una peonza) cuyo movimiento es nuestro principal foco de interés, y usaré la letra mayúscula $\boldsymbol{\Omega}$ para la velocidad angular de un sistema de referencia en rotación, no inercial, relativo al cual estamos calculando el movimiento de uno o más objetos. Esta distinción es coherente con las anteriores dos secciones, donde usé **A** y **V** mayúsculas para la aceleración y velocidad de un sistema no inercial (relativo a un sistema inercial). En la práctica, $\boldsymbol{\omega}$ normalmente denota una incógnita, mientras que $\boldsymbol{\Omega}$ es normalmente una velocidad angular conocida, como la velocidad angular de la Tierra en su rotación diaria. Durante el resto del capítulo nos ocuparemos del movimiento de objetos tal y como se ven en un sistema de referencia en rotación, y, de acuerdo con este convencionalismo, denotaré la velocidad angular de ese sistema mediante $\boldsymbol{\Omega}$.

9.4 Derivadas temporales en un sistema rotatorio

Ya estamos preparados para considerar las ecuaciones de movimiento para un objeto visto desde un sistema $\mathcal{S}$ que está rotando con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ relativo a un sistema inercial $\mathcal{S}_0$. Aunque nuestras conclusiones pueden aplicarse a cualquier sistema que rota, el ejemplo más importante es un sistema fijo a la Tierra rotando, y este es el ejemplo que hemos de tener presente. Establecido esto, vamos a detenernos a calcular la velocidad angular de la Tierra, que rota sobre su eje cada 24 horas.[5] Por lo tanto, para un sistema fijo en la Tierra

$$\Omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{24 \times 3600 \text{ s}} \approx 7{,}3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}. \tag{9.26}$$

Esta velocidad angular es muy pequeña, y por esta razón a menudo podemos ignorarla por completo. No obstante, veremos que la rotación de la Tierra tiene efectos medibles sobre el movimiento de proyectiles, péndulos y otros sistemas. Existen

[5] Estrictamente hablando, el período de rotación sobre el eje de la Tierra es un día *sidéreo*, el tiempo que tarda en rotar una vez en relación con las estrellas distantes. Éste es más corto que un día solar en un factor de 365/366, pero la diferencia es demasiado pequeña como para ocuparnos aquí de ella.

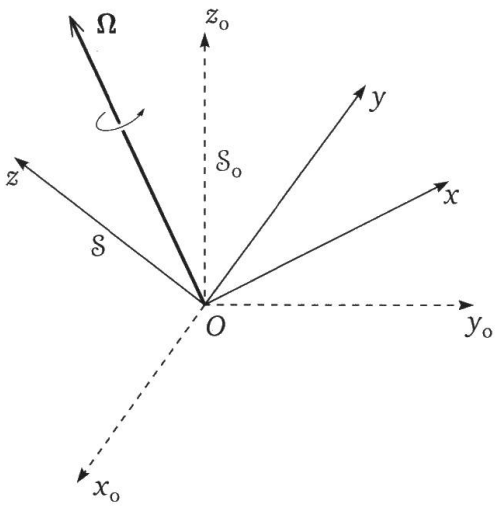


Figura 9.8. El sistema $\mathcal{S}_0$ definido por los tres ejes a trazos es inercial. El sistema $\mathcal{S}$ definido por los tres ejes continuos comparte el mismo origen O, pero está rotando con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ relativa a $\mathcal{S}_0$.

otros efectos inerciales (principalmente las mareas), asociados al movimiento orbital de la Tierra y la Luna, pero no son tan importantes para los problemas que veremos aquí, y por ahora no los consideraré.

Supondré que los dos sistemas $\mathcal{S}_0$ y $\mathcal{S}$ comparten un origen común O, como muestra la Figura 9.8, de tal manera que el único movimiento de $\mathcal{S}$ relativo a $\mathcal{S}_0$ es una rotación con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$. Por ejemplo, el origen común O podría ser el centro de la Tierra, $\mathcal{S}$ podría ser un conjunto de ejes fijos en la Tierra, y $\mathcal{S}_0$ un conjunto de ejes con el mismo origen pero con direcciones fijas relativas a las estrellas lejanas. El sistema $\mathcal{S}$ es conveniente para nuestros propósitos pero es no inercial; el sistema $\mathcal{S}_0$ es relativamente poco práctico, pero es inercial.

Consideremos ahora un vector arbitrario $\mathbf{Q}$. Podría ser el vector de posición de una pelota, la fuerza neta sobre un objeto, o cualquier otro vector de interés. Nuestra primera tarea es relacionar el ritmo temporal de cambio de $\mathbf{Q}$ medido en el sistema $\mathcal{S}_0$ con el ritmo correspondiente medido en $\mathcal{S}$. Para distinguir estos dos ritmos de cambio, usaré temporalmente la siguiente notación:

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\mathcal{S}_0} = \text{(ritmo de cambio del vector } \mathbf{Q} \text{ relativo al sistema inercial } \mathcal{S}_0)$$

y

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\mathcal{S}} = \text{(ritmo de cambio del mismo vector } \mathbf{Q} \text{ relativo al sistema que rota } \mathcal{S}).$$

Para comparar estos dos ritmos de cambio, desarrollaré el vector $\mathbf{Q}$ en términos de tres vectores ortogonales $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ que están fijos en el sistema que rota $\mathcal{S}$. (Por

ejemplo, estos tres vectores unitarios podrían apuntar en las direcciones de los tres ejes continuos mostrados en la Figura 9.8). Por consiguiente,[6]

$$\mathbf{Q} = Q_1\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2 + Q_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} Q_i\,\mathbf{e}_i\,. \tag{9.27}$$

Este desarrollo se ha elegido por la conveniencia de los observadores situados en el sistema $\mathcal{S}$, porque los vectores unitarios están fijos en ese sistema. Sin embargo, se debe reconocer que el desarrollo es igualmente válido en ambos sistemas. [Cualquiera que sea el sistema que usemos, (9.27) es justo un desarrollo del vector $\mathbf{Q}$ en términos de los tres vectores ortogonales $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$]. La única diferencia es que para los observadores de $\mathcal{S}$ los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ son fijos, pero vistos por los observadores de $\mathcal{S}_0$ esos vectores están rotando.

Diferenciemos ahora el desarrollo (9.27) con respecto al tiempo. Primero, vistos en el sistema $\mathcal{S}$, los vectores $\mathbf{e}_i$ son constantes, y obtenemos simplemente

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\mathcal{S}} = \sum_i \frac{dQ_i}{dt}\mathbf{e}_i\,. \tag{9.28}$$

[Como los coeficientes del desarrollo Q_i en (9.27) son los mismos en cualquiera de los dos sistemas, no necesitamos especificar la derivada del segundo miembro con un subíndice $\mathcal{S}$ o $\mathcal{S}_0$].

Vistos en el sistema $\mathcal{S}_0$, los vectores $\mathbf{e}_i$ varían con el tiempo. Por consiguiente, diferenciando (9.27) en el sistema $\mathcal{S}_0$ da

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\mathcal{S}_0} = \sum_i \frac{dQ_i}{dt}\mathbf{e}_i + \sum_i Q_i\left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_{\mathcal{S}_0}\,. \tag{9.29}$$

La derivada en el segundo término del segundo miembro se evalúa fácilmente con la ayuda de la «útil relación» (9.23). El vector $\mathbf{e}_i$ está fijo en el sistema $\mathcal{S}$, que está rotando con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ relativa a $\mathcal{S}_0$. Por lo tanto el ritmo de cambio de $\mathbf{e}_i$ visto en $\mathcal{S}_0$ está dado por (9.23) como

$$\left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_{\mathcal{S}_0} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_i\,.$$

---

[6] Este es uno de esos momentos en los que, tal como anticipé en el Capítulo 1, la notación $\mathbf{e}_i$ con $i = 1, 2, 3$ es más conveniente para nuestros tres vectores unitarios que $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$. Por ahora esto es sólo porque nos permite usar el signo de suma, $\sum$, en sumas como (9.27). En el Capítulo 10 veremos que la elección más conveniente de ejes que rotan es usar los *ejes principales* del cuerpo en rotación, y la notación $\mathbf{e}_i$ funciona de manera muy natural para ellos. Por tanto usaré mayoritariamente esta notación para los vectores unitarios fijos en un cuerpo en rotación, y continuaré usando $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ para el sistema que no rota.

Por consiguiente, podemos reescribir la segunda suma de (9.29) como

$$\sum_i Q_i \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_{\mathcal{S}_0} = \sum_i Q_i (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_i) = \boldsymbol{\Omega} \times \sum_i Q_i \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}.$$

Insertando este resultado en (9.29), y usando (9.28) para sustituir la primera suma, encontramos que

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\mathcal{S}_0} = \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}. \tag{9.30}$$

Esta importante identidad relaciona la derivada de cualquier vector $\mathbf{Q}$ medido en el sistema inercial $\mathcal{S}_0$ con la derivada correspondiente en el sistema en rotación $\mathcal{S}$. En la próxima sección la utilizaré para encontrar la forma de la segunda ley de Newton en el sistema en rotación $\mathcal{S}$.

9.5 La segunda ley de Newton en un sistema en rotación

Estamos ahora preparados para encontrar la forma de la segunda ley de Newton en el sistema en rotación $\mathcal{S}$. Para simplificar, supondremos que la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ de $\mathcal{S}$ relativa a $\mathcal{S}_0$ es constante, como es el caso (a una buena aproximación) para ejes fijos a la Tierra. Un aspecto bastante sorprendente de la declaración de que $\boldsymbol{\Omega}$ es constante es que si es cierto en un sistema entonces es automáticamente cierto en el otro. Esto se sigue inmediatamente de (9.30): como $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} = 0$, las dos derivadas de $\boldsymbol{\Omega}$ son siempre la misma; en particular, si una es cero, también lo es la otra.

Consideremos ahora una partícula de masa m y posición $\mathbf{r}$. En el sistema inercial $\mathcal{S}_0$, la partícula obedece la segunda ley de Newton en su forma natural,

$$m\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{\mathcal{S}_0} = \mathbf{F} \tag{9.31}$$

donde como siempre $\mathbf{F}$ denota la fuerza neta sobre la partícula, el vector suma de todas las fuerzas identificadas en el sistema inercial. La derivada del primer miembro es, por supuesto, la derivada evaluada por los observadores en el sistema inercial $\mathcal{S}_0$. No obstante, podemos usar ahora la Ecuación (9.30) para expresar la derivada en términos de las derivadas evaluadas en el sistema que rota $\mathcal{S}$. Primero, de acuerdo con (9.30)

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\mathcal{S}_0} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}.$$

Diferenciando una segunda vez, encontramos

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{\mathcal{S}_0} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{S}_0}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\mathcal{S}_0}$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{S}_0}\left[\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}\right].$$

Aplicando (9.30) a la derivada exterior del segundo miembro, encontramos

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{\mathcal{S}_0} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{S}}\left[\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}\right] + \boldsymbol{\Omega}\times\left[\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}\right]. \tag{9.32}$$

Este resultado algo desordenado se puede arreglar un poco. Primero, como nuestro interés principal va a estar en las derivadas evaluadas en el sistema en rotación $\mathcal{S}$, usaremos la notación del «punto» para estas derivadas. Es decir, usaré $\dot{\mathbf{Q}}$ para denotar

$$\dot{\mathbf{Q}} \equiv \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\mathcal{S}},$$

la derivada de cualquier vector $\mathbf{Q}$ en el sistema que rota $\mathcal{S}$. Si después nos damos cuenta de que, como $\boldsymbol{\Omega}$ es constante, su derivada es cero, y agrupamos juntos los dos términos, podemos reescribir (9.32) como

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{\mathcal{S}_0} = \ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}) \tag{9.33}$$

donde los puntos del segundo miembro todos indican derivadas con respecto al sistema que rota $\mathcal{S}$. Si sustituimos ahora el resultado (9.33) en la segunda ley de Newton (9.31) para el sistema inercial $\mathcal{S}_0$ y pasamos dos términos al segundo miembro, encontramos que la forma de la segunda ley de Newton para el sistema en rotación $\mathcal{S}$ es

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + 2m\dot{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{\Omega} + m(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})\times\boldsymbol{\Omega}, \tag{9.34}$$

donde, como siempre, $\mathbf{F}$ denota la suma de todas las fuerzas en cualquier sistema inercial. Como con el sistema acelerado de la Sección 9.1, vemos que la ecuación de movimiento en un sistema de referencia en rotación *parece* justo la segunda ley de Newton, excepto que en este caso hay dos términos extra en el miembro de la ecuación en que está la fuerza. El primero de estos términos extra se denomina **fuerza de Coriolis** (en honor del físico francés G. G. de Coriolis, 1792-1843, quien fue el primero que la explicó),

$$\mathbf{F}_{\text{cor}} = 2m\dot{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{\Omega}. \tag{9.35}$$

La segunda es la conocida **fuerza centrífuga**

$$\mathbf{F}_{\text{cf}} = m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}. \tag{9.36}$$

Discutiré estos dos términos en las secciones siguientes. Por ahora, el punto importante es que podemos avanzar y usar la segunda ley de Newton en sistemas de referencia en rotación (y por tanto no inerciales), siempre y cuando nos acordemos de sumar siempre estas dos fuerzas inerciales «ficticias» a la fuerza neta **F** calculada para un sistema inercial. Es decir, en el sistema que rota,[7]

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{cor}} + \mathbf{F}_{\text{cf}}. \tag{9.37}$$

9.6 La fuerza centrífuga

Acabamos de ver que para poder usar la segunda ley de Newton en un sistema en rotación (como un sistema fijo a la Tierra), debemos introducir dos fuerzas inerciales: la centrífuga y la de Coriolis. Hasta cierto punto, podemos examinar las dos fuerzas por separado. Más concretamente, la fuerza de Coriolis que actúa sobre un objeto es proporcional a la velocidad del objeto $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ en relación con el sistema en rotación. Por lo tanto, la fuerza de Coriolis es cero para cualquier objeto que esté en reposo en un sistema que rota, y es ignorable en objetos que se muevan a velocidades suficientemente lentas. Durante el resto del capítulo, nuestra principal preocupación será el sistema en rotación de la Tierra, para el cual fácilmente podemos estimar la importancia relativa de dos fuerzas inerciales. Como ambas fuerzas implican productos vectoriales, dependen de las direcciones de los diferentes vectores, pero para una estimación del orden de magnitud, podemos tomar

$$F_{\text{cor}} \sim mv\Omega \quad \text{y} \quad F_{\text{cf}} \sim mr\Omega^2,$$

donde v es la velocidad del objeto en relación con el sistema en rotación de la Tierra, esto es, la velocidad observada por nosotros en la superficie de la Tierra. Por lo tanto

[7] Nuestra deducción de este importante resultado dependía crucialmente de la relación (9.30) entre las derivadas temporales de un vector dado en los sistemas en rotación y sin rotación. Si esta relación resulta confusa, puede optarse por la derivación alternativa basada en el formalismo lagrangiano, esbozado en el Problema 9.11.

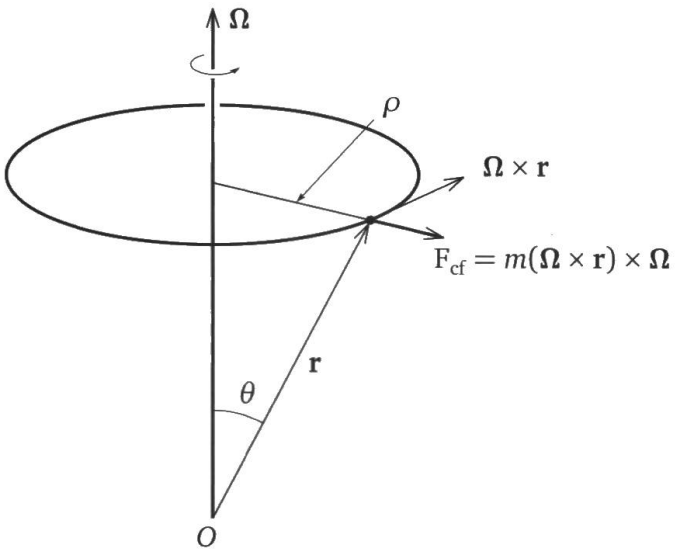


Figura 9.9. El vector $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$ es la velocidad de un objeto arrastrado hacia el este a una velocidad $\Omega\rho$ por la rotación de la Tierra. Por lo tanto, la fuerza centrífuga, $m(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\times\mathbf{\Omega}$, apunta de manera radial hacia afuera desde el eje y tiene magnitud $m\Omega^2\rho$.

$$\frac{F_{\text{cor}}}{F_{\text{cf}}} \sim \frac{v}{R\Omega} \sim \frac{v}{V}. \tag{9.38}$$

Aquí, en la expresión del medio, he cancelado el factor común $m\Omega$ y he reemplazado r por el radio de la Tierra R. (Recuerde que el origen es el centro de la Tierra, de manera que para objetos cercanos a la superficie de la Tierra $r \approx R$). En la última expresión he reemplazado $R\Omega$ por V, la velocidad de un punto en el ecuador mientras la Tierra rota a velocidad angular Ω. Dado que V es aproximadamente 1600 kilómetros/hora, (9.38) demuestra que para proyectiles de $v \ll 1600$ km/h sería un buen comienzo de aproximación ignorar la fuerza de Coriolis, y esto es lo que haré en esta sección.[8]

La fuerza centrífuga viene dada por (9.36) como

$$\mathbf{F}_{\text{cf}} = m(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\times\mathbf{\Omega}. \tag{9.39}$$

Podemos ver qué aspecto tiene con la ayuda de la Figura 9.9, que muestra un objeto que está sobre la superficie de la Tierra o cerca de ella a una colatitud θ. La rotación de la Tierra lleva consigo el objeto alrededor de un círculo de latitud, y el vector $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$ (que es sólo la velocidad de este movimiento circular visto desde un sistema que no rota) es tangencial a este círculo. Por lo tanto $(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\times\mathbf{\Omega}$ apunta radialmente hacia

[8] Como veremos más adelante, incluso cuando $v \ll 1600$ km/h, la fuerza de Coriolis puede tener efectos apreciables (por ejemplo en el péndulo de Foucault). No obstante, desde luego sí es cierto que F_{cor} es pequeña en comparación con F_{cf}, por lo que resulta lógico despreciar la primera al principio.

afuera desde el eje de rotación en la dirección $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, el vector unitario en la dirección ρ en coordenadas cilíndricas polares. La magnitud de $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}$ se ve fácilmente que es $\Omega^2 r \operatorname{sen}\theta = \Omega^2 \rho$. Por lo tanto,

$$\mathbf{F}_{\text{cf}} = m\Omega^2 \rho \, \hat{\boldsymbol{\rho}}. \tag{9.40}$$

Para concluir, desde el punto de vista de observadores que rotan con la Tierra, existe una fuerza centrífuga que apunta radialmente hacia afuera desde eje de la Tierra y que tiene magnitud $m\Omega^2\rho$. Si momentáneamente permitimos que $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ denote la velocidad asociada a la rotación de la Tierra (observada desde un sistema sin rotación), entonces su magnitud es $v = \Omega\rho$, y la fuerza centrífuga toma la conocida forma mv^2/ρ.

Aceleración en caída libre

La aceleración en caída libre que llamamos $\mathbf{g}$ es la aceleración inicial, relativa a la Tierra, de un objeto que se deja caer desde el reposo en un vacío cercano a la superficie de la Tierra. Ahora podemos comprobar que en realidad ésta es una noción sorprendentemente complicada. La ecuación de movimiento (relativo a la Tierra) es[9]

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{\text{grav}} + \mathbf{F}_{\text{cf}}, \tag{9.41}$$

donde $\mathbf{F}_{\text{cf}}$ viene dado por (9.40) y $\mathbf{F}_{\text{grav}}$ es la fuerza gravitatoria

$$\mathbf{F}_{\text{grav}} = -\frac{GMm}{R^2}\hat{\mathbf{r}} = m\mathbf{g}_{\text{o}}. \tag{9.42}$$

Aquí, M y R son la masa y el radio de la Tierra, y $\hat{\mathbf{r}}$ denota el vector unitario que apunta radialmente hacia afuera desde O, el centro de la Tierra.[10] La aceleración $\mathbf{g}_{\text{o}}$ se define por la segunda igualdad y podría definirse como la aceleración «real» de la gravedad, ya que es la aceleración que observaríamos si no existiese el efecto centrífugo.

Podemos ver por (9.41) que la aceleración inicial de un objeto en caída libre viene determinada por una fuerza efectiva igual a la suma de dos términos,

---

[9] He definido $\mathbf{g}$ como la aceleración *inicial* de un cuerpo liberado desde el reposo, para asegurar que la fuerza de Coriolis es cero. A medida que el objeto gana velocidad, veremos que la fuerza de Coriolis toma importancia y que la aceleración cambia (aunque el efecto generalmente es muy pequeño).

[10] Al afirmar que la fuerza gravitatoria es $-(GMm/r^2)\hat{\mathbf{r}}$, estoy suponiendo que la Tierra es una esfera perfectamente simétrica, lo cual, aun siendo una buena aproximación, no es totalmente cierta. Afortunadamente, lo más importante es que $\mathbf{F}_{\text{grav}}$ es indudablemente proporcional a m, por lo que siempre puede escribirse como $m\mathbf{g}_{\text{o}}$. Para casi todos los propósitos, puede decirse que $\mathbf{g}_{\text{o}}$ está en la dirección de $-\hat{\mathbf{r}}$, y desde luego se aproxima mucho.

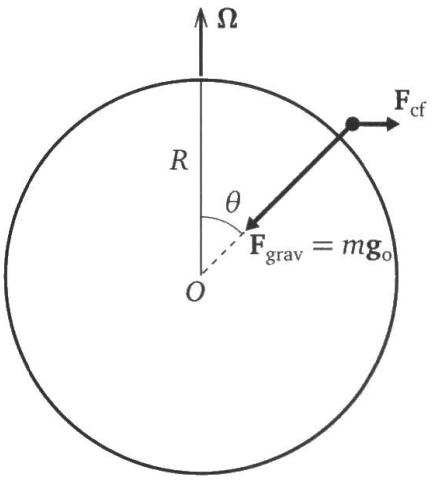


Figura 9.10. La aceleración en caída libre (relativa a la Tierra) de un objeto, cercano a la superficie de la Tierra, y liberado desde el reposo, es el resultado de dos términos de fuerza, la verdadera fuerza gravitatoria $m\mathbf{g}_o$ y la fuerza inercial centrífuga $\mathbf{F}_{cf}$, que apunta hacia afuera desde el eje de rotación. (El tamaño del término centrífugo se exagera en este dibujo).

$$\mathbf{F}_{ef} = \mathbf{F}_{grav} + \mathbf{F}_{cf} = m\mathbf{g}_o + m\Omega^2 R \operatorname{sen}\theta\, \hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{9.43}$$

donde la última expresión para $\mathbf{F}_{cf}$ viene de (9.40) con ρ sustituido por $R\operatorname{sen}\theta$. Las dos fuerzas que componen la fuerza efectiva se muestran en la Figura 9.10, de lo que resulta obvio que la aceleración en caída libre, por lo general, no es igual a la verdadera aceleración gravitatoria, ni en magnitud ni en dirección. Más concretamente, dividiendo (9.43) por m, encontramos para la aceleración en caída libre $\mathbf{g}$,

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_o + \Omega^2 R \operatorname{sen}\theta\, \hat{\boldsymbol{\rho}}\,. \tag{9.44}$$

La componente $\mathbf{g}$ en la dirección radial hacia dentro (la dirección de $-\mathbf{r}$).[11]

$$g_{rad} = g_o - \Omega^2 R \operatorname{sen}^2\theta. \tag{9.45}$$

El segundo término centrífugo es cero en los polos ($\theta = 0$ o π) y es mayor en el ecuador, donde su magnitud es fácil de hallar [usando el valor de Ω a partir de (9.26)] para dar

$$\Omega^2 R = (7{,}3 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1})^2 \times (6{,}4 \times 10^6\ \mathrm{m}) \approx 0{,}034\ \mathrm{m/s}^2. \tag{9.46}$$

[11] Estrictamente hablando esta es la componente de $\mathbf{g}$ en la dirección de $\mathbf{g}_o$ y no de $-\mathbf{r}$. De igual modo, el factor $\operatorname{sen}^2\theta$ en realidad debería ser $\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta'$ donde θ' es el ángulo entre la línea de $\mathbf{g}_o$ y el norte (en contraposición a θ, el ángulo entre $\mathbf{r}$ y el norte). Sin embargo, la diferencia (que sólo se debe al hecho de que la Tierra no es una esfera perfectamente simétrica) es, a casi todos los efectos, despreciable.

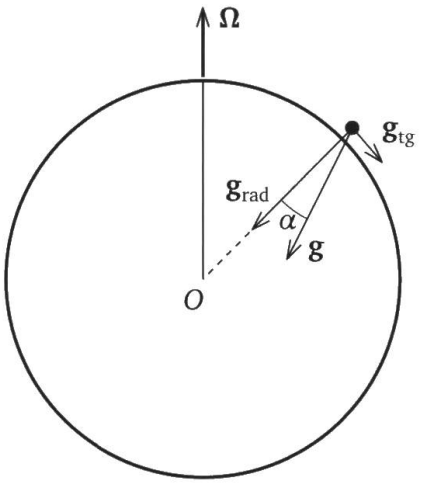


Figura 9.11. Debido a la fuerza centrífuga, la aceleración en caída libre **g** tiene una componente tangencial distinta de cero (aquí muy exagerada) y **g** se desvía de la dirección radial el ángulo pequeño α.

Como g_0 es alrededor de 9,8 m/s^2, vemos que, debido a la fuerza centrífuga, el valor de g en el ecuador es alrededor de 0,3% menor que en los polos.[12] Aunque esta diferencia es desde luego pequeña, es fácilmente medible con los modernos gravímetros, que pueden medir g hasta alrededor de 1 parte en 10^9.

Puede verse a partir de (9.44) y Figura 9.10 que la componente tangencial de **g** (la componente normal de la verdadera fuerza gravitatoria) viene por completo de la fuerza centrífuga y es

$$g_{tg} = \Omega^2 R \operatorname{sen}\theta \cos\theta. \tag{9.47}$$

Esta componente tangencial de **g** es cero en los polos y en el ecuador, y es máxima en la latitud 45°. La característica más llamativa de un valor distinto de cero para g_{tg} es que significa que la aceleración en caída libre no está exactamente en la dirección de la verdadera fuerza gravitatoria. Como puede verse en la Figura 9.11, el ángulo entre **g** y la dirección radial es alrededor de $\alpha \approx g_{tg}/g_{rad}$, y su valor máximo (en $\theta = 45°$) es

$$\alpha_{máx} = \frac{\Omega^2 R}{2g_0} \approx \frac{0{,}034}{2 \times 9{,}8} \approx 0{,}0017 \text{ rad} \approx 0{,}1°. \tag{9.48}$$

Este ángulo α es el ángulo entre la aceleración observada en caída libre **g** y la verdadera aceleración de la gravedad $\mathbf{g}_0$, lo que quizá podríamos denominar «vertical».

[12] La diferencia real es más bien alrededor de 0,5%, el 0,2% adicional es el resultado del abultamiento de la Tierra en el ecuador.

El valor de α es en realidad bastante difícil de medir. La dirección de la $\mathbf{g}$ observada es fácil (al menos en principio). Para encontrar la dirección de $\mathbf{g}_0$, se puede pensar en usar la línea de plomada, pero enseguida deberíamos darnos cuenta de que una línea de plomada también está sometida a la fuerza centrífuga y colgará en la dirección de $\mathbf{g}$, y no en la de $\mathbf{g}_0$. De hecho, cualquier intento por encontrar la dirección de $\mathbf{g}_0$ conduce siempre a encontrar la dirección de $\mathbf{g}$. Por esta razón, en adelante *definiré* «vertical» como la dirección de la línea de plomada. Por lo tanto, en las contadas ocasiones en que estas pequeñas distinciones sí importan, «vertical» significará «en la dirección de $\pm\mathbf{g}$». De igual manera, «horizontal» significará «perpendicular a $\mathbf{g}$».

9.7 La fuerza de Coriolis

Cuando un objeto se mueve, existe una segunda fuerza inercial que debemos incluir para usar la segunda ley de Newton para un sistema en rotación. Esta es la fuerza de Coriolis (9.35)

$$\mathbf{F}_{\text{cor}} = 2m\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\Omega} = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} \tag{9.49}$$

donde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ es la velocidad del objeto relativa al sistema en rotación. Existe un increíble paralelismo entre la fuerza de Coriolis y la conocida fuerza $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ sobre una carga q en un campo magnético B. Desde luego, si reemplazamos $2m$ por q y $\boldsymbol{\Omega}$ por $\mathbf{B}$, la primera se convierte de manera exacta en la última. Aunque este paralelismo no tiene un gran significado, a menudo puede ser de ayuda a la hora de visualizar cómo la fuerza de Coriolis afecta al movimiento de una partícula.

La magnitud de la fuerza de Coriolis depende de las magnitudes de $\mathbf{v}$ y $\boldsymbol{\Omega}$ además de sus orientaciones relativas. Para el caso en que el sistema en rotación es la Tierra, en (9.26) hemos visto que $\Omega \approx 7{,}3 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$. Para un objeto con $v \approx 50$ m/s (por ejemplo, una pelota de béisbol a gran velocidad), la aceleración máxima que podría producir la fuerza de Coriolis (actuando por sí sola y con $\mathbf{v}$ perpendicular a $\boldsymbol{\Omega}$) sería

$$a_{\text{máx}} = 2v\Omega \approx 2 \times (50\ \text{m/s}) \times (7{,}3 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1}) \approx 0{,}007\,\text{m/s}^2.$$

Comparada con la aceleración en caída libre $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, es muy pequeña, aunque desde luego detectable si nos tomáramos la molestia. Algunos proyectiles, como cohetes y proyectiles de largo alcance, viajan a mucha más velocidad que 50 m/s, y para ellos la fuerza de Coriolis es más importante. Además, veremos que existen sistemas, como el péndulo de Foucault, en los que aunque muy pequeña, la fuerza de Coriolis puede actuar durante mucho tiempo y por lo tanto producir un efecto grande.

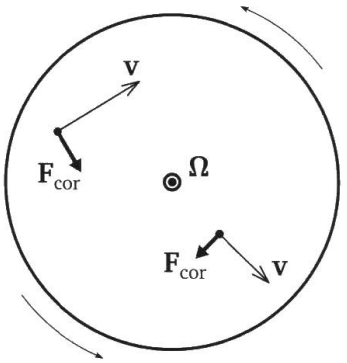


Figura 9.12. Vista de pájaro de una plataforma giratoria horizontal que está rotando en sentido contrario a las agujas del reloj respecto a un sistema inercial. La velocidad angular de la plataforma $\boldsymbol{\Omega}$ apunta hacia arriba fuera del dibujo. Como vería cualquier observador sobre la plataforma, los dos objetos que se deslizan por la plataforma están sometidos a fuerzas de Coriolis $\mathbf{F}_{cor} = 2m\mathbf{v}\times\boldsymbol{\Omega}$. Independientemente de las posiciones de los cuerpos y sus velocidades, la fuerza de Coriolis siempre tiende a desviar la velocidad hacia la derecha. (Si la dirección de la rotación fuese en el sentido de las agujas del reloj, entonces $\boldsymbol{\Omega}$ apuntaría hacia dentro de la página y la fuerza de Coriolis tendería a desviar los objetos que se mueven hacia la izquierda).

Dirección de la fuerza de Coriolis

Al igual que la fuerza magnética $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, la fuerza de Coriolis $2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$ es siempre perpendicular a la velocidad del objeto que se mueve, y su dirección viene dada por la regla de la mano derecha. La Figura 9.12 es una vista de pájaro de una plataforma giratoria que está rotando en sentido contrario a las agujas del reloj respecto al suelo. La velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ apunta de manera vertical hacia arriba (en la figura hacia fuera de la página). Si consideramos un objeto que se desliza o rueda por la plataforma, es fácil ver que, cualquiera que sea la posición y velocidad del objeto, la fuerza de Coriolis tiende a desviar la velocidad hacia la derecha. De manera similar, si la plataforma estuviera rotando en el sentido de las agujas del reloj, la desviación de Coriolis siempre sería hacia la izquierda. (El que el objeto *se desvíe* en cualquiera de las direcciones especificadas, depende de qué otras fuerzas actúen y lo grandes que sean).

Podríamos imaginarnos que la Figura 9.12 es el hemisferio norte visto por encima del Polo Norte. (Como la Tierra rota hacia el este, la velocidad angular está dirigida como se muestra). Por lo tanto llegamos a la conclusión de que el efecto de Coriolis, debido a la rotación de la Tierra, tiende a desviar los objetos que se mueven hacia la derecha en el hemisferio norte (y por supuesto, hacia la izquierda en el hemisferio sur).[13] Este efecto es importante para la artillería de largo alcance, que estando en

[13] Al ser la Tierra tridimensional (en contraposición a la plataforma giratoria que es bidimensional) el efecto de Coriolis es un poco más complicado que lo que sugiere esta sencilla afirmación.

el hemisferio norte tiene que apuntar hacia la izquierda del objetivo, y estando en el sur debe apuntar hacia la derecha. (Vea el Problema 9.28). Un ejemplo importante en meteorología es el fenómeno de los ciclones. Estos ocurren cuando el aire que rodea una región de bajas presiones se mueve rápidamente hacia adentro. Debido al efecto de Coriolis, el aire se desvía hacia la derecha, como se muestra en la Figura 9.13, y por lo tanto comienza a circular en sentido contrario a las agujas del reloj (en el hemisferio norte y en el sentido de las agujas del reloj en el hemisferio sur). Cuando esto sucede con suficiente fuerza, el resultado es una tormenta conocida como ciclón, huracán o tifón.

Es importante tener presente que tanto la fuerza de Coriolis como la centrífuga son en esencia efectos cinéticos que resultan de nuestra insistencia en usar un sistema de referencia en rotación. En algunos casos sencillos, es en realidad más fácil (además de instructivo) analizar el movimiento en un sistema inercial y después transformar los resultados al sistema que rota, como ilustra el siguiente ejemplo. Aun así, la transformación entre los dos sistemas suele ser tan complicada que resulta más fácil trabajar todo el tiempo en el sistema en rotación y vivir con las fuerzas «ficticias» de Coriolis y centrífuga.

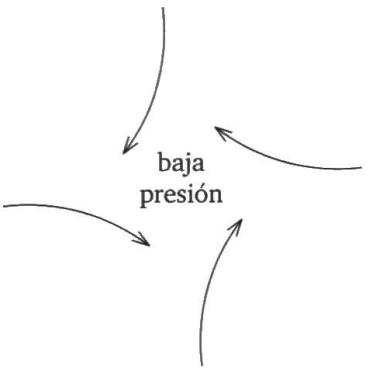
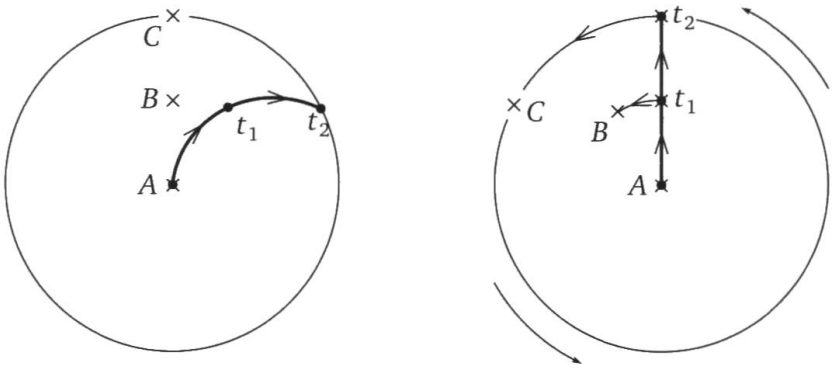


Figura 9.13. Un ciclón es el resultado del aire que se mueve hacia una región de bajas presiones y que es desviado hacia la derecha (en el hemisferio norte) por el efecto Coriolis. Esto ocasiona un flujo en sentido contrario a las agujas del reloj con la fuerza de la presión interna balanceando la fuerza de Coriolis externa.

Ejemplo 9.2 *Movimiento simple en una plataforma giratoria*

Tres observadores A, B y C están de pie sobre una plataforma giratoria horizontal, con A en el centro, C en el borde y B en medio de los dos, como se muestra en la Figura 9.14(a). La plataforma está rotando en el sentido de las agujas del reloj (visto desde arriba), con velocidad angular Ω. En el instante $t = 0$, A empuja un

Sin embargo, la afirmación anterior sí es correcta para objetos que se mueven paralelamente a la superficie de la Tierra y para proyectiles de corta trayectoria).



(a) Visto desde un sistema en rotación **(b)** Visto desde un sistema sin rotación

Figura 9.14. **(a)** Tres observadores A, B y C están en fila sobre una plataforma giratoria, con A en el centro y C en el perímetro. El observador A empuja el disco hacia B y C, pero debido a la fuerza de Coriolis, el disco gira hacia la derecha y no da ni a B ni a C. **(b)** El mismo experimento visto por un observador desde el suelo. En este sistema, el disco viaja en línea recta, pero en t_1, cuando alcanza el radio de B, este observador se ha movido hacia la izquierda. En t_2 cuando el disco alcanza el perímetro, C se ha desplazado aún más hacia la izquierda.

disco sin rozamiento directamente hacia B y C, pero para su sorpresa, el disco no da ni a B ni a C, fallando el último incluso por más margen que el primero. Explicar estos sucesos desde ambos puntos de vista, el de los observadores que están sobre la plataforma giratoria y el de un observador que está en el suelo.

La fuerza neta sobre el disco (tal como sería identificada en cualquier sistema inercial) es cero. Por consiguiente en el sistema en rotación, las únicas dos fuerzas son la centrífuga y la de Coriolis. La primera está siempre dirigida radialmente hacia afuera y no influye en la desviación del disco. La segunda cambia constantemente la velocidad del disco hacia la derecha, justo como un campo magnético dirigido hacia arriba actuando sobre una carga positiva. Esto hace que el disco siga la trayectoria curvada mostrada en la Figura 9.14(a). En el instante t_1, cuando alcanza el radio de B, está a poca distancia a la derecha de B; y en el instante t_2, cuando llega al borde de la mesa giratoria, está aún más a la derecha de C (casi cuatro veces más). Esta explicación es correcta y clara, pero depende de nuestro entendimiento de la fuerza de Coriolis. Analizando el mismo experimento en el sistema basado en el suelo, podemos entender mejor por qué ocurre la desviación.

En el sistema inercial de un observador en el suelo, la fuerza neta sobre el disco es cero, y el disco sigue una trayectoria recta, como se muestra en la Figura 9.14(b). Sin embargo, en el instante t_1, cuando debería estar alcanzando a B, el observador B se ha movido hacia la izquierda a medida que la mesa gira. En el instante t_2, cuando debería haber estado alcanzando a C, el observador C se ha movido incluso más lejos hacia la izquierda. Visto por el disco, B y C se han movido hacia la izquierda. Por lo tanto, visto por B y C, el disco ha girado a la derecha como en la Figura 9.14(a).

En realidad, esta sencilla explicación alternativa del efecto de Coriolis lo es sólo aparentemente. En general, los efectos de las fuerzas de Coriolis y centrífuga son sorprendentemente complicados y no son tan fáciles de explicar en relación con el sistema que no rota. (Vea los Poblemas 9.20 y 9.24).

9.8 Caída libre y la fuerza de Coriolis

Consideremos el efecto de la fuerza de Coriolis sobre un objeto en caída libre, esto es, un objeto que cae en el vacío, cerca de un punto **R** en la superficie de la Tierra. Para este análisis, debemos incluir también la fuerza centrífuga, así que la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g}_o + \mathbf{F}_{cf} + \mathbf{F}_{cor} \tag{9.50}$$

donde, como antes, $m\mathbf{g}_o$ denota la fuerza verdadera de la gravedad de la Tierra sobre el objeto. La fuerza centrífuga es $m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}$, (donde **r** es la posición del objeto relativa al centro de la Tierra), pero como excelente aproximación podemos sustituir **r** por **R** (la posición de la superficie de la Tierra donde se está realizando el experimento). Por tanto,

$$\mathbf{F}_{cf} = m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \times \boldsymbol{\Omega}.$$

Volviendo a la ecuación de movimiento (9.50), se reconocerá que la suma de los dos primeros términos del segundo miembro es justo $m\mathbf{g}$, donde **g** es la aceleración de caída libre observada para un objeto liberado del reposo en la posición **R**, como se introdujo en (9.44). En otras palabras, podemos omitir el término $\mathbf{F}_{cf}$ de (9.50), si sustituimos $\mathbf{g}_o$ por la **g** observada en la localización de nuestro experimento. Si sustituimos $2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$ por $\mathbf{F}_{cor}$, la ecuación de movimiento se convierte en (después de la cancelación del factor m)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} + 2\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\Omega}. \tag{9.51}$$

Una característica simplificadora de la ecuación (9.51) es que no incluye la posición **r** en absoluto (sólo sus derivadas $\dot{\mathbf{r}}$ y $\ddot{\mathbf{r}}$). Esto significa que la ecuación no cambiará si hacemos un cambio de origen (porque el cambio de origen supone añadir una constante a **r**). Consecuentemente, voy a escoger ahora mi origen en la superficie de la Tierra en la posición **R**, como se muestra en la Figura 9.15. Con esta elección de ejes, podemos resolver la ecuación de movimiento en sus tres componentes. Las componentes de $\dot{\mathbf{r}}$ y $\boldsymbol{\Omega}$ son

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

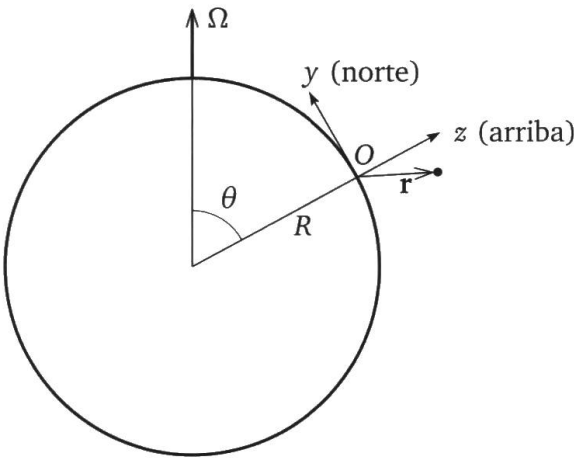


Figura 9.15. Elección de ejes para un experimento de caída libre. El origen O está en la superficie de la Tierra en la localización del experimento (posición $\mathbf{R}$ relativa al centro de la Tierra). El eje z apunta verticalmente hacia arriba (más exactamente, en la dirección de $-\mathbf{g}$, donde $\mathbf{g}$ es la aceleración de caída libre observada), los ejes x e y son horizontales (esto es, perpendiculares a $\mathbf{g}$), con y apuntando hacia el norte, y x hacia el este. La posición del objeto que cae relativa a O es $\mathbf{r}$.

y

$$\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega \operatorname{sen}\theta, \Omega\cos\theta).$$

Por consiguiente, aquellos de $\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\Omega}$ son

$$\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\Omega} = (\dot{y}\Omega\cos\theta - \dot{z}\Omega\operatorname{sen}\theta,\ -\dot{x}\Omega\cos\theta,\ \dot{x}\Omega\operatorname{sen}\theta) \tag{9.52}$$

y la ecuación de movimiento (9.51) se resuelve en las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\Omega(\dot{y}\cos\theta - \dot{z}\operatorname{sen}\theta) \\ \ddot{y} &= -2\Omega\dot{x}\cos\theta \\ \ddot{z} &= -g + 2\Omega\dot{x}\operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{9.53}$$

Resolveremos estas tres ecuaciones haciendo una sucesión de aproximaciones que dependen de la pequeñez de Ω. Primero, como Ω es muy pequeño, obtenemos una aproximación razonable para empezar si ignoramos Ω por completo. En esta aproximación, las ecuaciones se reducen a

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = 0 \qquad \text{y} \qquad \ddot{z} = -g. \tag{9.54}$$

que son las ecuaciones de caída libre resueltas en cualquier curso de introducción a la física. Si el objeto se deja caer desde el reposo desde $x = y = 0$ y $z = h$, entonces las primeras dos ecuaciones implican que $\dot{x}$, $\dot{y}$, x e y todos siguen siendo cero, mientras que la última ecuación implica que $\dot{z} = -gt$ y $z = h - \frac{1}{2}gt^2$. Por tanto nuestra solución aproximada es

$$x = 0, \qquad y = 0 \qquad \text{y} \qquad z = h - \tfrac{1}{2} g t^2, \tag{9.55}$$

es decir, el objeto cae verticalmente hacia abajo con aceleración constante g. Esta aproximación se denomina a veces la aproximación *a orden cero* porque incluye sólo la potencia cero de Ω (esto es, es independiente de Ω). Es bien sabido que es una buena aproximación, pero no muestra ningún efecto de la fuerza de Coriolis.

Para obtener la siguiente aproximación consideramos que los términos en (9.53) que incluyen Ω son pequeños. Por consiguiente, no habrá problema en evaluar estos términos usando nuestra aproximación a orden cero para x, y y z. Sustituyendo (9.55) en el segundo miembro de (9.53), obtenemos

$$\ddot{x} = 2\Omega g t \operatorname{sen}\theta, \qquad \ddot{y} = 0 \qquad \text{y} \qquad \ddot{z} = -g. \tag{9.56}$$

De ellas, la dos últimas son exactamente las mismas que a orden cero, pero la ecuación para x es nueva y se integra fácilmente dos veces para dar

$$x = \tfrac{1}{3} \Omega g t^3 \operatorname{sen}\theta, \tag{9.57}$$

con y y z lo mismo que en la aproximación a orden cero (9.55). Este resultado se llama naturalmente aproximación a *primer orden* (buena hasta la primera potencia de Ω). Podemos repetir este proceso otra vez para obtener una aproximación a segundo orden y así sucesivamente, pero la de primer orden es suficientemente buena para nuestros propósitos.

Lo interesante de la solución (9.57) es que un objeto en caída libre no cae en línea recta hacia abajo. En lugar de ello, la fuerza de Coriolis hace que se curve ligeramente hacia el este (dirección x positiva). Para hacernos una idea de la magnitud del efecto, consideremos un objeto que se deja caer en un pozo de 100 metros de profundidad de una mina situada en el ecuador, y determinemos la desviación total cuando llega al fondo. El tiempo que tarda en alcanzar el fondo se determina a partir de la última de las ecuaciones (9.55) y es $t = \sqrt{2h/g}$, y (9.57) da para la desviación total hacia el este $\theta = 90°$ y $g \approx 10\ \text{m/s}^2$)

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3} \Omega g \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} \\ &\approx \frac{1}{3} \times (7{,}3 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1}) \times (10\ \text{m/s}^2) \times (20\ \text{s}^2)^{3/2} \approx 2{,}2\text{cm} \end{aligned}$$

una desviación pequeña, pero ciertamente detectable. Una desviación de este tipo fue realmente predicha por Newton y verificada por su rival Robert Hooke (famoso por la ley de Hooke, 1635-1703), aunque no fue explicada correctamente hasta que se entendió el efecto de Coriolis.

9.9 El péndulo de Foucault

Para terminar con una aplicación muy interesante del efecto de Coriolis, consideremos el péndulo de Foucault, que se puede ver un muchos museos de ciencias de todo el mundo y se llama así por su inventor, el físico francés Jean Foucault (1819-1868). Es un péndulo formado por una masa muy pesada m que está suspendida por un cable ligero desde un techo muy alto. Este montaje permite al péndulo oscilar libremente durante mucho tiempo y moverse en ambas direcciones, este-oeste y norte-sur. Visto en un sistema inercial, sólo actúan dos fuerzas sobre la pesa, la tensión $\mathbf{T}$ en el cable y el peso $m\mathbf{g}_0$. En el sistema en rotación de la Tierra, están también la fuerza centrífuga y la de Coriolis, así que la ecuación de movimiento en el sistema de la Tierra es

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{T} + m\mathbf{g}_0 + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega} + 2m\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\Omega}.$$

De la misma manera que en la sección anterior, los términos segundo y tercero de la derecha se combinan para dar $m\mathbf{g}$, donde $\mathbf{g}$ es la aceleración observada de caída libre, y la ecuación de movimiento se convierte en

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} + 2m\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\Omega}. \tag{9.58}$$

Podemos elegir ahora nuestros ejes como en la sección anterior, de tal manera que x apunta hacia el este, y hacia el norte y z verticalmente hacia arriba (en la dirección de $-\mathbf{g}$), y el péndulo es como el mostrado en la Figura 9.16.

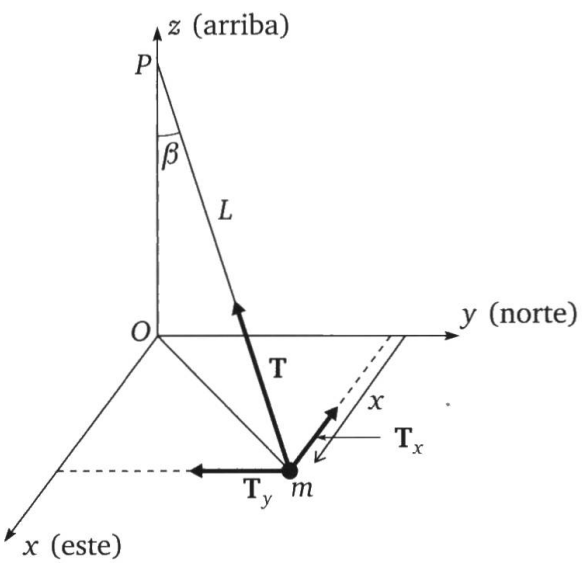


Figura 9.16. Un péndulo de Foucault se compone de una pesa de masa m suspendida por un cable ligero de longitud L desde el punto P que está en un techo alto. La fuerza de la tensión sobre la pesa se muestra como $\mathbf{T}$ y sus componentes x e y son T_x y T_y. Para pequeñas oscilaciones el ángulo β es muy pequeño.

Voy a restringir nuestra discusión al caso de pequeñas oscilaciones, así que el ángulo β entre el péndulo y la vertical es siempre pequeño. Esto permite hacer dos aproximaciones simplificadoras. En primer lugar, la componente z de la tensión $\mathbf{T}$ se aproxima bien por la magnitud; esto es, $T_z = T\cos\beta \approx T$. Después, no es difícil ver que, para pequeñas oscilaciones, $T_z \approx mg$.[14] Poniendo estas dos aproximaciones juntas, podemos escribir

$$T \approx mg. \tag{9.59}$$

Necesitamos ahora examinar las componentes x e y de la ecuación de movimiento (9.58). Esto requiere que identifiquemos las componentes x e y de $\mathbf{T}$. Si se mira la Figura 9.16, se verá que, por triángulos semejantes, $T_x/T = -x/L$ y análogamente para T_y. Combinando esto con (9.59), encontramos que

$$T_x = -mgx/L \quad \text{y} \quad T_y = -mgy/L. \tag{9.60}$$

Las componentes x e y de $\mathbf{g}$ son, por supuesto, cero, y las componentes de $\dot{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{\Omega}$ están dadas en (9.52). Poniendo todas estas en (9.58), encontramos (después de cancelar un factor de m y quitando un término que incluye $\dot{z}$, que es despreciable comparado con $\dot{x}$ o $\dot{y}$ para pequeñas oscilaciones)

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -gx/L + 2\dot{y}\Omega\cos\theta \\ \ddot{y} &= -gy/L - 2\dot{x}\Omega\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{9.61}$$

donde como siempre θ denota la colatitud de la localización del experimento. El factor g/L es justo ω_0^2, donde ω_0 es la frecuencia natural del péndulo, y $\Omega\cos\theta$ es justo Ω_z, la componente z de la velocidad angular de la Tierra. Por tanto estas dos ecuaciones de movimiento se pueden reescribir como

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2\Omega_z\dot{y} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\Omega_z\dot{x} + \omega_0^2 y &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.62}$$

Podemos resolver las ecuaciones acopladas (9.62) usando el truco, introducido en el Capítulo 2, de definir un número complejo

$$\eta = x + iy.$$

Recuerde que este número complejo no sólo contiene la misma información que la posición en el plano xy, sino que además la representación de η en el plano complejo es una vista de pájaro real de la posición proyectada del péndulo (x, y).

---

[14] Mire la componente z de (9.58). En el límite de pequeñas oscilaciones, el término del primer miembro y el último término del segundo tienden ambos a cero, y nos quedamos con $T_z - mg = 0$.

Si multiplicamos la segunda ecuación de (9.62) por i y la añadimos a la primera, obtenemos la ecuación diferencial única

$$\ddot{\eta} + 2i\Omega_z\dot{\eta} + \omega_o^2\eta = 0. \tag{9.63}$$

Es una ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden y por ello tiene exactamente dos soluciones independientes. Por lo tanto si podemos hallar dos soluciones independientes, sabremos que la solución más general es una combinación lineal de estas dos. Como pasa muchas veces, podemos hallar dos soluciones independientes mediante una suposición: suponemos que existe una solución de la forma

$$\eta(t) = e^{-i\alpha t} \tag{9.64}$$

para alguna constante α. Sustituyendo esta suposición en (9.63), vemos inmediatamente que es una solución si y sólo si α cumple

$$\alpha^2 - 2\Omega_z\alpha - \omega_o^2 = 0$$

o

$$\begin{aligned} \alpha &= \Omega_z \pm \sqrt{{\Omega_z}^2 + \omega_o^2} \\ &\approx \Omega_z \pm \omega_o \end{aligned} \tag{9.65}$$

donde la última línea es una aproximación extremadamente buena porque la velocidad angular de la Tierra Ω es bastante más pequeña que la del péndulo ω_o. Esto nos da las dos soluciones independientes requeridas, y la solución general a la ecuación de movimiento (9.63) es

$$\eta = e^{-i\Omega_z t}\left(C_1 e^{i\omega_o t} + C_2 e^{-i\omega_o t}\right). \tag{9.66}$$

Para ver qué aspecto tiene esta solución, necesitamos fijar las dos constantes C_1 y C_2 especificando las condiciones iniciales. Supongamos que en $t = 0$ se ha tirado del péndulo en la dirección x (este) hasta una posición $x = A$ e $y = 0$, y se deja libre desde el reposo ($v_{xo} = v_{yo} = 0$). Con estas condiciones iniciales, se puede comprobar fácilmente que[15] $C_1 = C_2 = A/2$, y nuestra solución se convierte en

$$\eta(t) \equiv x(t) + iy(t) = Ae^{-i\Omega_z t}\cos\omega_o t. \tag{9.67}$$

En $t = 0$ la exponencial compleja es igual a uno, y $x = A$, mientras que $y = 0$. Como $\Omega_z \ll \omega_o$, el factor coseno en (9.67) hace muchas oscilaciones antes de que

[15] Realmente, hay una pequeña sutileza, en que estos valores simples dependen de la suposición (cierta) de que $\Omega_z \ll \omega_o$, como se verá cuando se comprueben.

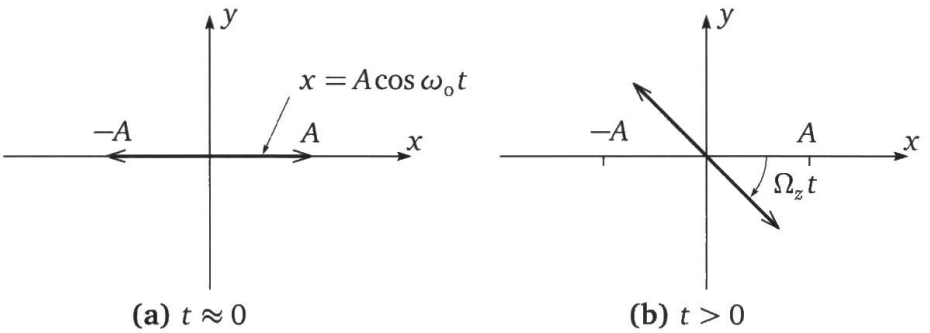


Figura 9.17. Vistas desde arriba del movimiento de un péndulo de Foucault. **(a)** Durante un rato después de ser liberado, el péndulo oscila atrás y adelante a lo largo del eje x, con amplitud A y frecuencia ω_0. **(b)** A medida que el tiempo avanza, el plano de sus oscilaciones rota lentamente con velocidad angular igual a Ω_z, la componente z de la velocidad angular de la Tierra.

la exponencial cambie apreciablemente de uno. Esto implica que, inicialmente, $x(t)$ oscila con frecuencia angular ω_0 entre $\pm A$, mientras que y permanece cerca de cero. Es decir, inicialmente, el péndulo describe un movimiento armónico simple a lo largo del eje x, como se indica en la Figura 9.17(a).

Sin embargo, finalmente la exponencial compleja $e^{-i\Omega_z t}$ comienza a cambiar, haciendo rotar al número complejo $\eta = x + iy$ un ángulo $\Omega_z t$. En el Hemisferio Norte, donde Ω_z es positivo, esto significa que el número $x + iy$ continúa oscilando sinusoidalmente (debido al factor $\cos \omega_0 t$), pero en una dirección que rota en el sentido de las agujas del reloj. Esto es, el plano en el que oscila el péndulo rota lentamente en el sentido de las agujas del reloj, con velocidad angular Ω_z, como se indica en la Figura 9.17(b). En el Hemisferio Sur, donde Ω_z es negativo, la rotación correspondiente es en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Si el péndulo de Foucault está situado en colatitud θ (latitud $90° - \theta$), entonces el ritmo al que rota su plano de oscilación es

$$\Omega_z = \Omega \cos \theta. \tag{9.68}$$

En el Polo Norte ($\theta = 0$), $\Omega_z = \Omega$ y el ritmo de rotación del péndulo es el mismo que la velocidad angular de la Tierra. Este resultado es fácil de entender: como visto en un sistema inercial (que no rota), un péndulo de Foucault en el Polo Norte oscilaría obviamente en un plano fijo; mientras tanto, la Tierra está rotando en sentido contrario a las agujas del reloj (vista desde arriba) con velocidad angular Ω. Claramente, como visto desde la Tierra, el plano de oscilación del péndulo tiene que estar rotando en sentido de las agujas del reloj con velocidad angular Ω.

En cualquier otra latitud, el resultado es mucho más complicado desde un punto de vista inercial, pero el ritmo de rotación del péndulo de Foucault se calcula fácilmente a partir de (9.68). En el ecuador ($\theta = 90°$), $\Omega_z = 0$ y el péndulo no rota. En una latitud en torno a 42° (la latitud aproximada de Boston, Chicago, o Roma),

$$\Omega_z = \Omega \cos 48^\circ \approx \tfrac{2}{3}\Omega.$$

Como Ω completa 360/día, $\frac{2}{3}\Omega = 240$/día, y vemos que en el curso de 6 horas (tiempo durante el cual un péndulo largo y bien construido continuará ciertamente oscilando sin un amortiguamiento muy acusado), el plano del movimiento del péndulo rotará a través de 60° (un efecto fácilmente observable).

9.10 Fuerza de Coriolis y aceleración de Coriolis

Recuerde que en la Ecuación (1.48) del Capítulo 1 encontramos la forma de la segunda ley de Newton en coordenadas polares en dos dimensiones,

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \\ F_\phi = m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}). \end{cases} \tag{9.69}$$

Ahora podemos entender los términos un tanto inquietantes de cada una de las dos ecuaciones de la derecha en términos de las fuerzas centrífuga y de Coriolis.

Consideremos una partícula que está sometida a una fuerza neta $\mathbf{F}$ y se mueve en dos dimensiones. (Exactamente el mismo análisis funciona en tres dimensiones usando coordenadas polares cilíndricas, pero por simplicidad trabajaré en dos dimensiones). Relativa a cualquier sistema inercial $\mathcal{S}$ con origen O, la partícula debe cumplir (9.69). Ahora consideremos un sistema no inercial $\mathcal{S}'$ que comparte el mismo origen O y está rotando con velocidad angular constante Ω, elegida de tal manera que $\Omega = \dot{\phi}$ en un instante dado $t = t_0$. Esto es, en el instante elegido t_0, el sistema $\mathcal{S}'$ y la partícula están rotando al mismo ritmo. (Por esta razón, el sistema $\mathcal{S}'$ se denomina a veces *sistema corrotante*). Si la partícula tiene coordenadas polares (r', ϕ') relativas a $\mathcal{S}'$, entonces en todo momento

$$r' = r$$

(porque $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ comparten el mismo origen, y en el instante t_0

$$\dot{\phi}' = 0$$

mientras el sistema $\mathcal{S}'$ y la partícula están rotando al mismo ritmo en $t = t_0$). La segunda ley de Newton se puede aplicar en el sistema $\mathcal{S}'$, siempre que incluyamos las fuerzas centrífuga y de Coriolis. Por consiguiente

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{cf}} + \mathbf{F}_{\text{cor}} = m\ddot{\mathbf{r}}'. \tag{9.70}$$

Escribamos esta ecuación en coordenadas polares: la fuerza centrífuga $\mathbf{F}_{\text{cf}}$ es puramente radial, con componente radial $r\Omega^2$. (Recuerde que $r' = r$, así que no hay

ninguna diferencia en escribir r o r'). La fuerza de Coriolis $\mathbf{F}_{\text{cor}}$ es $2m\mathbf{v}'\times\boldsymbol{\Omega}$, y, como $\mathbf{v}'$ es puramente radial en el sistema en corrotación, $\mathbf{F}_{\text{cor}}$ está en la dirección de ϕ' con componente ϕ' $-2m\dot{r}\Omega$. Finalmente el término $m\ddot{\mathbf{r}}'$ del segundo miembro de (9.70) se puede sustituir por el análogo de (9.69), excepto que en el sistema corrotante $\dot{\phi} = 0$ (en el instante escogido t_0), así que los términos que contienen $\dot{\phi}$ estarán ausentes. Poniendo todo esto junto, encontramos para la ecuación de movimiento de la partícula en el sistema corrotante,

$$\mathbf{F}+\mathbf{F}_{\text{cf}}+\mathbf{F}_{\text{cor}} = m\ddot{\mathbf{r}}' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} F_r + mr\Omega^2 = m\ddot{r} \\ F_\phi - 2m\dot{r}\Omega = mr\ddot{\phi}. \end{cases} \tag{9.71}$$

(Como el sistema S' está rotando a un ritmo constante, puedo reemplazar $\ddot{\phi}'$ por $\ddot{\phi}$ porque son iguales).

Vamos a comparar ahora la ecuación de movimiento (9.69) para el sistema inercial, con (9.71) para el sistema corrotante. El punto más importante a tener en cuenta es que, como $\Omega = \dot{\phi}$, son exactamente las mismas ecuaciones para r y ϕ, aunque ciertos términos están distribuidos de diferente manera entre los dos miembros. En (9.69) para el sistema que no rota, los únicos términos de fuerza a la izquierda son la fuerza neta real, con componentes F_r y F_ϕ. A la derecha de (9.69), la aceleración es la centrípeta $-r\dot{\phi}^2$ en su componente radial y la aceleración de Coriolis $2\dot{r}\dot{\phi}$ en su componente ϕ. En (9.71) para el sistema que rota, ninguno de estos términos de aceleración adicionales está presente (porque decidimos que $\dot{\phi}'$ fuese cero), pero en lugar de ello reaparecen en el lado de la fuerza de las ecuaciones (con signos opuestos, por supuesto) como la fuerza centrífuga $m\Omega^2 r$ en la ecuación radial y la fuerza de Coriolis $-2m\dot{r}\Omega$ en la ecuación de ϕ.

Como las dos versiones de las ecuaciones son la misma, está claro que son igualmente correctas. En el sistema inercial, las fuerzas son más sencillas (no son fuerzas «ficticias») pero las aceleraciones son más complicadas; en el sistema que rota, es justo al contrario. El sistema que uno elija para usar viene dictado por la conveniencia. En particular, cuando el observador está anclado en un sistema que rota (como lo estamos nosotros, los terrícolas), es normalmente más conveniente trabajar en el sistema que rota y aprender a vivir con las fuerzas «ficticias» centrífuga y de Coriolis.

Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 9

Fuerza inercial en un sistema que se acelera pero que no rota

El movimiento de un cuerpo, como se ve en un sistema que tiene aceleración **A** relativa a un sistema inercial, se puede encontrar usando la segunda ley de Newton en la forma $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}+\mathbf{F}_{\text{inercial}}$, donde **F** es la fuerza neta sobre el cuerpo (como medida en cualquier sistema inercial) y $\mathbf{F}_{\text{inercial}}$ es una

fuerza inercial adicional

$$\mathbf{F}_{\text{inercial}} = -m\mathbf{A}. \qquad \text{[Ec. (9.5)]}$$

El vector velocidad angular

Si un cuerpo está rotando alrededor de un eje especificado por el vector unitario **u** (dirección dada por la regla de la mano derecha) a un ritmo ω (medido normalmente en radianes por segundo), su **vector velocidad angular** está definido como

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{u}. \qquad \text{[Ec. (9.21)]}$$

La «relación útil»

La velocidad de un punto **r** fijo en un cuerpo rígido que está rotando con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \qquad \text{[Ec. (9.22)]}$$

Derivadas temporales en un sistema en rotación

Si el sistema $\mathcal{S}$ tiene velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ relativa al sistema $\mathcal{S}_0$, entonces las derivadas temporales de un único vector **Q** vistas en los dos sistemas están relacionadas por

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\mathcal{S}_0} = \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}. \qquad \text{[Ec. (9.30)]}$$

La segunda ley de Newton en un sistema en rotación

Si el sistema $\mathcal{S}$ tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ relativa a un sistema inercial $\mathcal{S}_0$, entonces la segunda ley de Newton en el sistema en rotación toma la forma

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{cor}} + \mathbf{F}_{\text{cf}}, \qquad \text{[Ec. (9.37)]}$$

donde **F** es la fuerza neta sobre el cuerpo (como la existente en cualquier sistema inercial) y las fuerzas inerciales $\mathbf{F}_{\text{cor}}$ y $\mathbf{F}_{\text{cf}}$ son las fuerzas de **Coriolis** y **centrífuga**,

$$\mathbf{F}_{\text{cor}} = 2m\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\Omega} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_{\text{cf}} = m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}. \qquad \text{[Ecs. (9.35) y (9.36)]}$$

Aceleración en caída libre

La conocida aceleración en caída libre **g** (definida como la aceleración inicial, en relación con la Tierra, desde el reposo) incluye la «verdadera» aceleración gravitatoria $\mathbf{g}_0$ y el efecto sobre la fuerza centrífuga

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \times \boldsymbol{\Omega}. \qquad \text{[Ec. (9.44)]}$$

«Vertical» se define como la dirección de **g**, y «horizontal» como perpendicular a **g**.

Problemas para el Capítulo 9

Los asteriscos indican el nivel aproximado de dificultad, desde los más fáciles (⋆) hasta los más difíciles (⋆ ⋆ ⋆).

Sección 9.1 Aceleración sin rotación

9.1 ⋆ Asegurarse de comprender la razón por la cual un péndulo en equilibrio, colgado del techo de un coche que se está acelerando hacia delante, se inclina hacia atrás; y después considerar lo siguiente: un globo de helio está anclado, por un cordel sin masa, al suelo de un coche que se está acelerando hacia delante con aceleración A. Explicar claramente por qué el globo tiende a inclinarse *hacia delante* y encontrar su ángulo de inclinación en equilibrio. [*Hint*: Los globos de helio flotan debido a la fuerza flotante de Arquímedes, que es el resultado de un gradiente de presión en el aire. ¿Cuál es la relación entre las direcciones del campo gravitatorio y de la fuerza flotante?]

9.2 ⋆ Una estación espacial con forma de rosquilla (radio exterior R) obtiene gravedad artificial girando sobre el eje de la rosquilla a velocidad angular ω. Esbozar las fuerzas y las aceleraciones que actúan sobre un astronauta de pie en la estación espacial **(a)** visto desde un sistema inercial desde fuera de la estación y **(b)** visto desde el sistema en reposo del propio astronauta (que tiene una aceleración centrípeta $A = \omega^2 R$ tal y como se ve en el sistema inercial). ¿Cuál es la velocidad angular necesaria si $R = 40$ metros y la gravedad aparente es igual al valor habitual de aproximadamente 10 m/s^2? **(c)** ¿Cuál es la diferencia de porcentaje entre la g percibida a una distancia de seis pies del astronauta ($R = 40$ m) y de su cabeza ($R = 38$ m)?

Sección 9.2 Las mareas

9.3 ⋆ ⋆ **(a)** Considerar la fuerza de la marea (9.12) sobre una masa m en la posición P de la Figura 9.4. Escribir d como $(d_o - R_T) = d_o(1 - R_T/d_o)$ y usar la aproximación binomial $(1-\epsilon)^{-2} \approx 1 + 2\epsilon$ para demostrar que $\mathbf{F}_{\text{marea}} \approx -(2GM_L m R_T/{d_o}^3)\hat{\mathbf{x}}$. Confirmar la dirección de las fuerzas mostradas en la Figura 9.4 y hacer una comparación numérica de la fuerza de la marea y la fuerza gravitatoria $m\mathbf{g}$ de la Tierra. **(b)** Hacer los cálculos correspondientes para la fuerza en el punto R. Comparar esta fuerza con la de la sección (a) (magnitud y dirección).

9.4 ⋆ ⋆ Hacer los mismos cálculos que en el Problema 9.3(a) pero para la fuerza de la marea en el punto Q en la Figura 9.4. [En este caso escribir $\hat{\mathbf{d}}/d^2 = \mathbf{d}/d^3$ y usar la aproximación binomial en la forma $(1+\epsilon)^{-3} \approx 1 - 3\epsilon$].

9.5 ⋆ ⋆ Repasar la derivada de la energía potencial de la marea (9.16) de una gota de agua en el punto Q de la Figura 9.5 y después detallar la derivación de (9.17) para la EP de la marea en el punto P.

9.6 ⋆ ⋆ ⋆ Sea $h(\theta)$ la altura del océano en cualquier punto T sobre la superficie de la Tierra, donde $h(\theta)$ se mide hacia arriba desde el nivel del punto Q de la Figura 9.5 y θ es el ángulo polar TOR de T. Teniendo en cuenta que la superficie del océano es equipotencial, demostrar que $h(\theta) = h_o \cos^2\theta$, donde $h_o = 3M_L R_T^4/(2M_T d_o^3)$. Esbozar y describir la forma de la superficie del océano, teniendo en cuenta que $h_o \ll R_T$. [*Sugerencia:* Habrá que evaluar $U_{\text{marea}}(T)$ como dado por (9.13), con d igual a la distancia MT. Para hacer esto hay que encontrar d por la ley de los cosenos y después aproximar d^{-1} usando la aproximación binomial, procurando mantener *todos* los términos en orden $(R_T/d_o)^2$. Prescindir de cualquier efecto del Sol].

Sección 9.4 Derivadas temporales en un sistema rotatorio

9.7 ⋆ **(a)** Explicar la relación (9.30) entre las derivadas de un vector $\mathbf{Q}$ en dos sistemas $\mathcal{S}_o$ y $\mathcal{S}$ para el caso especial en que $\mathbf{Q}$ está fijo en el sistema $\mathcal{S}$. **(b)** Hacer lo mismo para un vector $\mathbf{Q}$ que está fijo en el sistema $\mathcal{S}_o$ y comparar la respuesta con la de la sección (a).

Sección 9.5 La segunda ley de Newton en un sistema en rotación

9.8 ⋆ ¿Cuáles son las direcciones de las fuerzas de Coriolis y centrífuga sobre una persona que se mueve **(a)** hacia el sur cerca del Polo Norte, **(b)** hacia el este por el ecuador, y **(c)** hacia el sur cruzando el ecuador?

9.9 ⋆ Una bala de masa m se dispara horizontalmente a velocidad v_0 y en dirección norte desde una posición en colatitud θ. Encontrar la dirección y la magnitud de la fuerza de Coriolis en términos de m, v_0, θ, y la velocidad angular de la Tierra Ω. ¿En qué se parece la fuerza de Coriolis al peso de la bala si $v_0 = 1000$ m/s y $\theta = 40°$?

9.10 ⋆⋆ Mediante la derivada de la ecuación de movimiento (9.34) para un sistema en rotación supusimos que la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ era constante. Demostrar que si $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \neq 0$ entonces existe una tercera «fuerza ficticia», a veces denominada *fuerza azimutal*, en el segundo miembro de (9.34) igual a $m\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}$.

9.11 ⋆⋆⋆ En este problema demostraremos la ecuación de movimiento (9.34) para un sistema en rotación usando el método lagrangiano. Como es habitual, este método es muchas veces más sencillo que el newtoniano (exceptuando algunos ejercicios de vectores ligeramente complicados) pero es quizá menos revelador. Sea $\mathcal{S}$ un sistema no inercial con velocidad angular constante $\boldsymbol{\Omega}$ en relación al sistema inercial $\mathcal{S}_0$. Supongamos que ambos sistemas tienen el mismo origen, $O = O'$. **(a)** Encontrar el lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$ en términos de las coordenadas $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$ de $\mathcal{S}$. [Recordar que primero hay que analizar T en el sistema inercial. En este sentido, recordar también que $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$]. **(b)** Demostrar que las tres ecuaciones lagrangianas reproducen (9.34) de manera precisa.

Sección 9.6 La fuerza centrífuga

9.12 ⋆ **(a)** Demostrar que para diseñar una estructura estática en un sistema que rota (como por ejemplo una estación espacial) se pueden usar las reglas normales de la estática incluyendo la fuerza centrífuga «ficticia». **(b)** Queremos colocar un disco sobre una mesa giratoria horizontal que rota (velocidad angular Ω) y mantenerlo en reposo sobre la mesa, sujeto por la fuerza de rozamiento estática (coeficiente μ). ¿Cuál es la distancia máxima desde el eje de rotación desde la que se puede hacer esto? (Argumentar desde el punto de vista de un observador sobre el sistema en rotación).

9.13 ⋆ Demostrar que el ángulo α entre una línea de plomada y la dirección del centro de la Tierra viene dado por $\operatorname{sen}\alpha = (R_e\Omega^2 \operatorname{sen} 2\theta)/(2g)$, donde g es la aceleración observada en caída libre y suponemos que la Tierra es una esfera perfectamente simétrica. Estimar los valores mínimo y máximo de la magnitud de α.

9.14 ⋆⋆ Estoy girando un cubo de agua sobre su eje vertical a velocidad angular Ω. Demostrar que, una vez que el agua se ha acomodado en equilibrio (en relación al cubo), su superficie será una parábola. (Utilizar coordenadas cilíndricas polares y recordar que la superficie es equipotencial bajo los efectos combinados de las fuerzas centrífuga y gravitatoria).

9.15 ⋆⋆ En determinado planeta, cuya esfera es perfectamente simétrica, la aceleración en caída libre tiene magnitud $g = g_0$ en el Polo Norte y $g = \lambda g_0$ en el ecuador (con $0 \leq \lambda \leq 1$). Encontrar $g(\theta)$, la aceleración en caída libre en colatitud θ como una función de θ.

Sección 9.7 La fuerza de Coriolis

9.16 ⋆ El centro de una varilla larga sin rozamiento está pivotado en el origen y se la obliga a rotar a una velocidad angular constante Ω en un plano horizontal. Escribir la ecuación de movimiento para una cuenta ensartada en la barra, usando las coordenadas x e y de un sistema que rota con la barra (con x a lo largo de la barra e y perpendicular a la misma). Resolver para $x(t)$. ¿Qué papel juega la fuerza centrífuga? ¿Y la fuerza de Coriolis?

9.17 ⋆ Considerar la cuenta ensartada en el aro circular del Ejemplo 7.6 (página 288) desde un sistema de referencia que rota con el aro. Encontrar la ecuación de movimiento de la cuenta

y comprobar que el resultado está de acuerdo con la Ecuación (7.69). Usando un diagrama de cuerpo libre, explicar el resultado (7.71) para las posiciones de equilibrio.

9.18 ⋆⋆ Una partícula de masa m se encuentra confinada a moverse, sin rozamiento, en un plano vertical, con los ejes x horizontal e y verticalmente hacia arriba. El plano está obligado a rotar con velocidad angular constante Ω alrededor del eje y. Encontrar las ecuaciones de movimiento para x e y, resolver y describir los posibles movimientos.

9.19 ⋆⋆ Me encuentro de pie (usando crampones) sobre un tiovivo sin rozamiento completamente plano y que rota en sentido contrario a las agujas del reloj con velocidad angular Ω alrededor de su eje vertical. **(a)** Estoy sujetando un disco en reposo justo por encima del suelo (del tiovivo) y lo suelto. Describir el camino seguido por el disco visto por un observador que mira hacia abajo desde una torre cercana (fija al suelo), así como visto por mí desde el tiovivo. En el último caso explicar lo que yo veo en función de las fuerzas centrífuga y de Coriolis. **(b)** Contestar a las mismas preguntas para un disco liberado del reposo por un espectador de brazos largos, que se encuentra de pie en el suelo, inclinado sobre el tiovivo.

9.20 ⋆⋆ Considerar un disco sin rozamiento sobre una mesa giratoria que rota en sentido contrario a las agujas del reloj, a velocidad angular Ω. **(a)** Escribir la segunda ley de Newton para las coordenadas x e y del disco, visto por mí de pie sobre la mesa giratoria. (Asegurarse de incluir las fuerzas centrífuga y de Coriolis e ignorar la rotación de la Tierra). **(b)** Resolver las dos ecuaciones usando el truco de escribir $\eta = x + iy$ y probando una solución de la forma $\eta = e^{-i\alpha t}$. [En este caso, como en el del MAS críticamente amortiguado del que hablábamos en la Sección 5.4, sólo se obtiene una solución de esta manera. El otro tiene la misma forma (5.43) que encontramos para la segunda solución en MAS amortiguado]. Escribir la solución general. **(c)** En un instante $t = 0$, empujo el disco desde la posición $\mathbf{r}_0 = (x_0, 0)$ con velocidad $\mathbf{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$ (todos medidos por mí en la mesa giratoria). Demostrar que

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= (x_0 + v_{x0}t)\cos\Omega t + (v_{y0} + \Omega x_0)t\,\mathrm{sen}\,\Omega t \\ y(t) &= -(x_0 + v_{x0}t)\,\mathrm{sen}\,\Omega t + (v_{y0} + \Omega x_0)t\cos\Omega t \end{aligned}\right\}. \tag{9.72}$$

(d) Describir y esbozar el comportamiento del disco para valores grandes de t. [*Ayuda:* Cuando t es grande los términos proporcionales a t dominan (excepto en el caso en que sus dos coeficientes sean cero). Con t grande, escríbase (9.72) en la forma $x(t) = t(B_1\cos\Omega t + B_2\,\mathrm{sen}\,\Omega t)$, con una expresión similar para $y(t)$, y utilizar el truco de (5.11) para combinar el seno y el coseno en un único coseno, o seno para el caso de $y(t)$. Llegados a este punto podemos reconocer que el camino es el mismo tipo de espiral, cualesquiera que sean las condiciones iniciales (con la excepción mencionada)].

9.21 ⋆⋆ Cuando un disco se desliza sobre una mesa giratoria, como en los Problemas 9.20 y 9.24, puede detenerse de manera instantánea. Esbozar la forma del camino cuando esto sucede y explicarlo. Si se hizo el Problema 9.24, comentar la relevancia de este resultado con la sección (d) de dicho problema.

9.22 ⋆⋆ Si una carga negativa $-q$ (por ejemplo un electrón) en una órbita elíptica alrededor de una carga positiva fija Q está sujeta a un campo magnético débil $\mathbf{B}$, el efecto de $\mathbf{B}$ es hacer que la elipse tenga un lento movimiento de precesión, efecto conocido como **Precesión de Larmor**. Para demostrarlo, escribir la ecuación de movimiento de la carga negativa en el campo de Q y $\mathbf{B}$. Ahora reescribir la ecuación para un sistema en rotación con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$. [Recordar que esto cambia tanto $d^2\mathbf{r}/dt^2$ como $d\mathbf{r}/dt$]. Demostrar que mediante una adecuada selección de $\boldsymbol{\Omega}$ se puede lograr que los términos que incluyen $\dot{\mathbf{r}}$ se cancelen, pero siempre queda un término que incluye $\mathbf{B}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{r})$. Si $\mathbf{B}$ es lo suficientemente débil, este término puede ignorarse. Demostrar que en este caso la órbita del sistema en rotación es una elipse (o hipérbola). Describir el aspecto de la elipse tal y como se ve en el sistema original que no rota.

9.23 ⋆⋆ He aquí una forma inusual de resolver el oscilador isotrópico en dos dimensiones: el movimiento de una partícula sometida a una fuerza $-k\mathbf{r}$. Demostrar que escogiendo un sistema de

referencia en rotación adecuado puede organizarse de tal manera que la fuerza centrífuga cancela la fuerza $-k\mathbf{r}$. Recordando la analogía entre la fuerza de Coriolis y la magnética, se debería poder escribir la solución general para el movimiento tal y como se ve en el sistema en rotación. Si escribimos la solución en la forma compleja de la Sección 2.7, podemos volver al sistema que no gira multiplicando por un número complejo adecuado. Demostrar que la solución general es una elipse. [Ver el Problema 8.11 como ayuda a esta última parte].

9.24 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Utilizar un programa de gráficos adecuado (como ParametricPlot en Mathematica) para trazar las órbitas (9.72) del disco del Problema 9.20 sobre una mesa giratoria con $x_0 = \Omega = 1$ y las siguientes velocidades iniciales $\mathbf{v}_0$: **(a)** $(0,1)$, **(b)** $(0,0)$, **(c)** $(0,-1)$, **(d)** $(-0{,}5,-0{,}5)$, **(e)** $(-0{,}7,-0{,}7)$, **(f)** $(0,-0{,}1)$. Comentar los detalles interesantes.

Sección 9.8 Caída libre y la fuerza de Coriolis

9.25 ⋆ Un tren de alta velocidad viaja a una velocidad constante de 150 m/s (unos 482 km/h) sobre una pista horizontal recta, a través del Polo Sur. Encontrar el ángulo entre una línea de plomada suspendida desde el techo en el interior del tren y otra en el interior de una cabaña situada en tierra. ¿En qué dirección se desvía la línea de plomada del tren?

9.26 ⋆⋆ En la Sección 9.8 usamos un método de aproximaciones sucesivas para encontrar la órbita de un objeto liberado del reposo, correcto a primer orden en la velocidad angular de la Tierra Ω. Demostrar de la misma manera que si se lanza un objeto con velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ desde un punto O sobre la superficie de la Tierra a una colatitud θ, entonces a primer orden en Ω su órbita es

$$\left.\begin{aligned} x &= v_{x0}t + \Omega(v_{y0}\cos\theta - v_{z0}\,\mathrm{sen}\,\theta)t^2 + \tfrac{1}{3}\Omega g t^3\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y &= v_{y0}t - \Omega(v_{x0}\cos\theta)t^2 \\ z &= v_{z0}t - \tfrac{1}{2}gt^2 + \Omega(v_{x0}\,\mathrm{sen}\,\theta)t^2. \end{aligned}\right\} \tag{9.73}$$

[Primero resolver las ecuaciones de movimiento (9.53) en orden cero, esto es, ignorando Ω por completo. Sustituir la solución cero por $\dot{x}$, $\dot{y}$ y $\dot{z}$ a la derecha de las ecuaciones (9.53) e integrar para dar la siguiente aproximación. Suponer que v_0 es lo suficientemente pequeño como para que la resistencia del aire sea despreciable y que $\mathbf{g}$ es una constante durante todo el vuelo].

9.27 ⋆⋆ En la Sección 9.8 hablamos del camino de un objeto arrojado desde una escalera muy alta, sobre el ecuador. **(a)** Esbozar este camino visto desde una torre, fija al suelo, situada al norte del punto desde el que se arroja el objeto. Explicar por qué el objeto aterriza al este del punto desde el que se arroja. **(b)** Realizar el mismo experimento visto por un observador inercial que flota en el espacio al norte del punto de la caída. Explicar claramente (desde este punto de vista) por qué el objeto aterriza al este del punto desde el que se arroja. [*Ayuda:* El momento angular del objeto alrededor del centro de la Tierra se conserva. Esto significa que la velocidad angular del objeto $\dot{\phi}$ cambia al caer].

9.28 ⋆⋆ Utilizar el resultado (9.73) del Problema 9.26 para hacer lo siguiente: un cañón naval dispara un proyectil a colatitud θ en una dirección situada a α sobre la horizontal y directamente hacia el este, con velocidad a boca de cañón v_0. **(a)** Ignorando la rotación de la Tierra (así como la resistencia del aire), averiguar cuánto tiempo (t) estaría el proyectil en el aire y a qué distancia (R) aterrizaría. Si $v_0 = 500$ m/s y $\alpha = 20°$, qué son t y R? **(b)** Un artillero naval detecta un barco enemigo directamente hacia el este a la distancia R de la parte (a) e, ignorando el efecto Coriolis, apunta su cañón exactamente igual que en la sección (a). Encontrar por cuánto, hacia el norte o el sur, y en qué dirección, el proyectil errará su objetivo, en términos de $\Omega, v_0, \alpha, \theta$ y g. (También errará en dirección este-oeste, pero esto no es tan crítico). Si el incidente sucede a una latitud 50 al norte ($\theta = 40$), ¿cuál será esta distancia? ¿Y si la latitud es 50 sur? Este es un problema serio en artillería de largo alcance: durante la I Guerra Mundial, en una batalla cerca de las Islas Malvinas, la marina británica falló, de manera continuada, en sus disparos a barcos alemanes por decenas de yardas debido a que por lo visto olvidaron que el efecto Coriolis, en el hemisferio sur, es completamente opuesto al que se da en el hemisferio norte.

9.29 ⋆⋆ **(a)** Se arroja una pelota de béisbol en vertical hacia arriba, con velocidad inicial v_0 desde un punto en el suelo a colatitud θ. Utilizar la solución (9.73) del Problema 9.26 para demostrar que la pelota regresará al suelo a una distancia $(4\Omega {v_0}^3 \operatorname{sen}\theta)/(3g^2)$ al oeste de su punto de lanzamiento. **(b)** Estimar el tamaño de este efecto en el ecuador si $v_0 = 40$ m/s. **(c)** Trazar la órbita de la pelota vista desde el norte (por un observador fijo en la Tierra). Comparar con la órbita de una pelota que se suelta desde un punto por encima del ecuador, y explicar por qué el efecto Coriolis mueve hacia el este la pelota soltada y el oeste la pelota lanzada.

9.30 ⋆⋆⋆ La fuerza de Coriolis puede producir un momento de fuerza sobre un objeto que gira. Para ilustrarlo, considerar un aro horizontal de masa m y radio r que gira con velocidad angular ω sobre su eje vertical a una colatitud θ. Demostrar que la fuerza de Coriolis, debido a la rotación de la Tierra, produce un momento de fuerza de magnitud $m\omega\Omega r^2 \operatorname{sen}\theta$ dirigido hacia el oeste, donde Ω es la velocidad angular de la Tierra. Este momento de fuerza es la base de la brújula giroscópica.

9.31 ⋆⋆⋆ El **generador de Compton** es una bellísima demostración de la fuerza de Coriolis debida a la rotación de la Tierra, inventada por el físico estadounidense A. H. Compton (1892-1962, más conocido como el autor del efecto Compton) mientras aún era estudiante en la universidad. Un estrecho tubo de cristal con forma de anillo o toroide (el radio R del anillo $\gg$ el radio del tubo) se llena con agua y unas pocas partículas de polvo para poder ver cualquier movimiento del agua. El anillo y el agua inicialmente son estacionarios y horizontales, pero entonces giramos el anillo a 180° sobre su diámetro este-oeste. Explicar por qué esto causa que el agua se mueva en el tubo. Demostrar que la velocidad del agua justo después de girarlo 180° es $2\Omega R\cos\theta$, donde Ω es la velocidad angular de la Tierra y θ es la colatitud del experimento. ¿Cuál sería la velocidad si $R \approx 1$ m y $\theta = 40°$? Compton midió esta velocidad con un microscopio y se aproximó hasta un 3 %.

9.32 ⋆⋆⋆ Hacer todas las partes del Problema 9.28, pero encontrar por cuánto falla el proyectil en dar al objetivo tanto en la dirección norte-sur como en la este-oeste. [*Ayuda:* En este caso hay que darse cuenta de que el tiempo de vuelo sí se ve afectado por el efecto de Coriolis].

Sección 9.9 El péndulo de Foucault

9.33 ⋆⋆ La solución general para el movimiento de pequeña amplitud de un péndulo de Foucault viene dada por (9.66). Si en $t = 0$ el péndulo está en reposo con $x = A$ e $y = 0$, encontrar los dos coeficientes C_1 y C_2, y demostrar que debido a que $\Omega \ll \omega_0$ la aproximación $C_1 = C_2 = A/2$ es buena, dando la solución (9.67).

9.34 ⋆⋆ En un punto P sobre la superficie de la Tierra se construye una enorme plataforma, completamente plana y sin rozamiento. La plataforma está perfectamente horizontal, esto es, perpendicular a la aceleración en caída libre local $\mathbf{g}_P$. Encontrar la ecuación de movimiento para un disco que se desliza sobre la plataforma y demostrar que tiene la misma forma que (9.61) para el péndulo de Foucault, excepto que la longitud del péndulo L se sustituye por el radio de la Tierra R. ¿Cuál es la frecuencia de las oscilaciones del disco y cuál es la frecuencia de la precesión de Foucault? [*Ayuda:* Escribir el vector de posición del disco, en relación al centro de la Tierra O como $\mathbf{R} + \mathbf{r}$, donde $\mathbf{R}$ es la posición del punto P y $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ es la posición del disco en relación a P. La contribución de la fuerza centrífuga que incluye a $\mathbf{R}$ puede ser absorbida por $\mathbf{g}_P$ y la contribución que incluye a $\mathbf{r}$ es despreciable. La fuerza restauradora viene de la variación de $\mathbf{g}$ mientras se mueve el disco]. Para comprobar la validez de nuestra aproximación, comparar el tamaño aproximado de la fuerza gravitatoria restauradora, el de la fuerza de Coriolis y el del término ignorado $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}$ en la fuerza centrífuga.

CAPÍTULO 10

Movimiento rotacional de cuerpos rígidos

Un cuerpo rígido es un conjunto de N partículas, cuya característica es que su forma no puede cambiar, es decir, la distancia entre dos cualesquiera de sus partículas es fija. Un cuerpo perfectamente rígido es, por supuesto, una idealización, pero una idealización extremadamente útil y una buena aproximación para muchos sistemas reales. Un cuerpo compuesto por N partículas es, en muchos sentidos, más sencillo que un sistema arbitrario de N partículas: el sistema arbitrario requiere $3N$ coordenadas para especificar su configuración, tres coordenadas para cada una de las N partículas. El cuerpo rígido sólo requiere seis coordenadas: tres para determinar la posición del centro de masa y tres para determinar la orientación del cuerpo. Más aún, veremos que el movimiento de un cuerpo rígido puede dividirse en dos problemas más sencillos, el movimiento traslacional del centro de masa y la rotación del cuerpo alrededor del CM.

Comenzaré el capítulo con algunos resultados generales, en su mayoría relacionados con el CM del cuerpo. Estos resultados generalizan los obtenidos al principio del Capítulo 8 para dos partículas, y la mayoría pueden aplicarse a *cualquier* sistema de N partículas. Sin embargo, rápidamente me centraré en el movimiento de un cuerpo rígido y en su aspecto más interesante, el movimiento rotacional, que es lo que ocupará casi la totalidad de este capítulo.

10.1 Propiedades del centro de masa

Consideremos un sistema de N partículas $\alpha = 1, \ldots, N$ de masa m_α y posición $\mathbf{r}_\alpha$ medidas con relación a un origen seleccionado O. El centro de masa del sistema se

definió en el Capítulo 3, en la Ecuación (3.9), como la posición (respecto al mismo origen O)

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\, dm \tag{10.1}$$

donde M especifica la masa total de todas las partículas y donde se usa la forma integral cuando el sistema puede considerarse como una distribución continua de masa.

El momento total y el CM

Existen varios parámetros importantes del movimiento del sistema que pueden expresarse claramente en términos del CM. Como vimos en el Capítulo 3, en la Ecuación (3.11), el momento total es

$$\mathbf{P} = \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha = M\dot{\mathbf{R}}. \tag{10.2}$$

Esto es, el momento total del sistema es exactamente igual al de una única partícula de masa igual a la masa total M y velocidad igual a la del CM. Si derivamos este resultado vemos que $\dot{\mathbf{P}} = M\ddot{\mathbf{R}}$ o bien, ya que $\dot{\mathbf{P}}$ debe ser igual a la fuerza exterior neta $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ en el sistema [como vimos en la ecuación (1.29)],

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = M\ddot{\mathbf{R}}. \tag{10.3}$$

Es decir, el CM se mueve exactamente igual que si fuera una única partícula de masa M sometida a la fuerza exterior neta del sistema. Este resultado es la única justificación importante para nuestro tratamiento de objetos extensos, como pelotas de béisbol y cometas, como partículas puntuales. Hasta el punto de que aunque estos objetos no puntuales pueden representarse por su CM, se mueven exactamente igual que las partículas puntuales.

El momento angular total

El papel que juega el movimiento del CM en el momento angular total de un sistema es más complicado, pero igual de importante. El siguiente argumento no depende de que el sistema sea un cuerpo rígido, pero para concretar las cosas consideremos un cuerpo rígido compuesto por N partes de masas m_α, tal y como se esboza en la Figura 10.1, donde el cuerpo se muestra como un elipsoide. La posición de m_α con relación a un origen arbitrario O se expresa como $\mathbf{r}_\alpha$ y la del CM con relación a O como $\mathbf{R}$. También se muestra la posición $\mathbf{r}'_\alpha$ de m_α *en relación con el CM*, que cumple

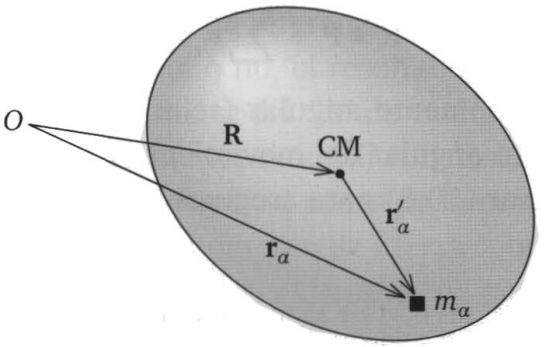


Figura 10.1. Cuerpo rígido (mostrado aquí como un elipsoide) compuesto de muchas partes pequeñas, $\alpha = 1, \ldots, N$. La masa de una parte típica es m_α y su posición en relación con el origen O es $\mathbf{r}_\alpha$. La posición del CM relativa a O es $\mathbf{R}$, y $\mathbf{r}'_\alpha$ denota la posición de m_α respecto al CM, de manera que $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_\alpha$.

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_\alpha . \tag{10.4}$$

El momento angular $\boldsymbol{\ell}_\alpha$ de m_α alrededor del origen O es

$$\boldsymbol{\ell}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha . \tag{10.5}$$

Por lo tanto el momento angular respecto a O es

$$\mathbf{L} = \sum_\alpha \boldsymbol{\ell}_\alpha = \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha .$$

Si usamos (10.4) para reescribir tanto $\mathbf{r}_\alpha$ como $\dot{\mathbf{r}}_\alpha$, encontramos que $\mathbf{L}$ es la suma de los cuatro términos:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{R} \times m_\alpha \dot{\mathbf{R}} + \sum \mathbf{R} \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{R}} + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha .$$

Si sacamos fuera de cada una de estas cuatro sumas los términos que no dependen de α, encontramos (recordemos que $\sum m_\alpha = M$)

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times \sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \left(\sum m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha\right) \times \dot{\mathbf{R}} + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha . \tag{10.6}$$

Ahora esta expresión puede simplificarse de manera significativa. Advierta primero que la suma en el paréntesis en el tercer término del segundo miembro es la posición del CM *relativa al CM* (multiplicado por M). Esto es, por supuesto, cero (Problema 10.1):

$$\sum m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha = 0. \tag{10.7}$$

Por lo tanto el tercer término en (10.6) es cero. Derivando esta relación, vemos que la suma en el segundo término en (10.6) es también cero. Por tanto todo lo que queda de (10.6) es

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha . \tag{10.8}$$

El primer término es el momento angular (relativo a O) del movimiento del CM. El segundo es el momento angular del movimiento relativo al CM. Por consiguiente podemos volver a expresar (10.8) para asegurar

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(\text{movimiento del CM}) + \mathbf{L}(\text{movimiento relativo al CM}). \tag{10.9}$$

Para ilustrar este útil resultado consideremos el movimiento de un planeta alrededor del Sol (el cual podemos tratar sin problemas como fijo porque su masa es muy grande comparada con la del planeta). En este caso, (10.9) afirma que el momento angular total del planeta es el momento angular del movimiento orbital del CM alrededor del Sol, más el momento angular de su movimiento de giro alrededor de su CM,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{orb}} + \mathbf{L}_{\text{giro}}. \tag{10.10}$$

Esta división del momento angular total en sus partes orbital y de giro es especialmente útil porque es muchas veces cierto (al menos en una primera aproximación) que las dos partes se conservan por separado. Para verlo, observe primero que como $\mathbf{L}_{\text{orb}} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$,

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{orb}} = \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{P} + \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}^{\text{ext}} \tag{10.11}$$

(porque el primer producto vectorial es cero y $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{\text{ext}}$). Esto es, $\mathbf{L}_{\text{orb}}$ evoluciona justo como si el planeta fuera un partícula puntual, con toda su masa concentrada en su CM. En particular, si la fuerza del Sol sobre el planeta fuera perfectamente central ($\mathbf{F}^{\text{ext}}$ exactamente colineal con $\mathbf{R}$), entonces $\mathbf{L}_{\text{orb}}$ sería constante. En la práctica la fuerza no es exactamente central (porque los planetas no son perfectamente esféricos y el campo gravitatorio del Sol no es perfectamente uniforme), pero es cierto con una excelente aproximación.

Para hallar $\dot{\mathbf{L}}_{\text{giro}}$, podemos escribir $\mathbf{L}_{\text{giro}} = \mathbf{L} - \mathbf{L}_{\text{orb}}$. Ya sabemos que $\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}}$, así que

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}^{\text{ext}}_\alpha = \sum (\mathbf{r}'_\alpha + \mathbf{R}) \times \mathbf{F}^{\text{ext}}_\alpha = \sum \mathbf{r}'_\alpha \times \mathbf{F}^{\text{ext}}_\alpha + \mathbf{R} \times \mathbf{F}^{\text{ext}}. \tag{10.12}$$

Restando (10.11) de (10.12) obtenemos $\dot{\mathbf{L}}_{\text{giro}}$,

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{giro}} = \dot{\mathbf{L}} - \dot{\mathbf{L}}_{\text{orb}} = \sum \mathbf{r}'_\alpha \times \mathbf{F}^{\text{ext}}_\alpha = \boldsymbol{\Gamma}^{\text{ext}}(\text{alrededor del CM});$$

esto es, el ritmo de cambio de $\mathbf{L}_{\text{giro}}$, el momento angular alrededor del CM, es justo el momento de fuerza externo neto, *medido respecto al CM*. [Este resultado que parece muy natural fue mencionado sin prueba en la ecuación (3.28). Lo que lo hace un

poco sorprendente es que un sistema de referencia ligado al CM *no* sea generalmente un sistema inercial. Sorprendente o no, el resultado es cierto y muy útil]. Como el momento de fuerza del Sol alrededor del CM de cualquier planeta es muy pequeño, $\mathbf{L}_{\text{giro}}$ es casi constante. Sin embargo, esta útil conclusión, aunque una excelente aproximación, no es exacta. Por ejemplo, a causa de la protuberancia ecuatorial de nuestro planeta, existe un pequeño momento de fuerza sobre la Tierra debido al Sol (y a la Luna), y $\mathbf{L}_{\text{giro}}$ no es muy constante. El lento cambio de $\mathbf{L}_{\text{giro}}$ es responsable del efecto conocido como la *precesión de los equinoccios*, la rotación del eje de la Tierra relativa a las estrellas a razón de unos 50 segundos de arco por año.

Hay una descomposición correspondiente (aunque no exactamente análoga) del momento angular en sus partes orbital y de giro (espín) en mecánica cuántica. Por ejemplo, el momento angular del electrón que orbita alrededor del protón en un átomo de hidrógeno está compuesto por dos términos como en (10.10), y por casi las mismas razones cada tipo separado de momento angular se conserva casi perfectamente. Aquí también, este útil resultado es sólo aproximadamente cierto: en este caso hay un momento de fuerza magnético débil sobre el electrón y ni el momento angular orbital ni el de espín se conservan exactamente (aunque el momento angular total sí que se conserva).

Energía cinética

La energía cinética total de N partículas es

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^{\,2}. \tag{10.13}$$

Como antes, podemos usar (10.4) para sustituir $\mathbf{r}_\alpha$ por $\mathbf{R} + \mathbf{r}'_\alpha$, lo que da

$$\dot{\mathbf{r}}_\alpha^{\,2} = (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_\alpha)^2 = \dot{\mathbf{R}}^2 + \dot{\mathbf{r}}_\alpha'^{\,2} + 2\dot{\mathbf{R}}\cdot\dot{\mathbf{r}}'_\alpha$$

y por tanto

$$T = \tfrac{1}{2}\sum m_\alpha \dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha'^{\,2} + \dot{\mathbf{R}}\cdot\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha. \tag{10.14}$$

La suma en el último término del segundo miembro es cero por (10.7) y llegamos a que

$$T = \tfrac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha'^{\,2} \tag{10.15}$$

o

$$T = T(\text{movimiento del CM}) + T(\text{movimiento relativo al CM}). \tag{10.16}$$

Para un cuerpo rígido, el único movimiento posible relativo al CM es la rotación. Por consiguiente podemos expresar de otro modo este resultado para decir que

$$T = T(\text{movimiento del CM}) + T(\text{rotación alrededor del CM}). \tag{10.17}$$

Este útil resultado dice, por ejemplo, que la energía cinética de una rueda que rueda camino abajo es la energía traslacional del CM más la energía de la rotación alrededor del eje.

De (10.14) podemos obtener una expresión alternativa y a veces útil para la energía cinética total. La derivación de (10.14) no dependía de que **R** fuera la posición del CM, y (10.14) es realmente válida para cualquier punto **R** fijo en el cuerpo. En particular, supongamos que elegimos **R** de manera que sea un punto del cuerpo que pueda ocurrir que esté en reposo (incluso sólo instantáneamente en reposo). En este caso los términos primero y tercero del segundo miembro de (10.14) son ambos cero, y encontramos que

$$T = \tfrac{1}{2}\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha'^2. \tag{10.18}$$

Esto dice que la energía cinética total de un cuerpo rígido es justo la energía rotacional del cuerpo relativa a cualquier punto del cuerpo que está instantáneamente en reposo. Por ejemplo la energía cinética de una rueda que gira se puede evaluar como la energía de rotación alrededor del punto de contacto con el camino, porque este punto está instantáneamente en reposo.

Energía potencial de un cuerpo rígido

Si todas las fuerzas exteriores e interiores en un cuerpo rígido de N partículas son conservativas, entonces, como vimos en la Sección 4.10, la energía potencial total se puede escribir como

$$U = U^{\text{ext}} + U^{\text{int}} \tag{10.19}$$

donde U^{ext} es la suma de todas las energías potenciales debidas a cualesquiera fuerzas externas. (Por ejemplo, si el cuerpo de interés es una pelota de béisbol, U^{ext} podría ser la energía gravitatoria de todas las partículas que componen la pelota en el campo exterior terrestre). La energía potencial interna U^{int} es la suma de las energías potenciales para todos los pares de partículas,

$$U^{\text{int}} = \sum_{\alpha<\beta} U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) \tag{10.20}$$

donde $r_{\alpha\beta}$ es la distancia[1] entre partículas α y β. Sin embargo, en un cuerpo rígido todas las distancias entre las partículas $r_{\alpha\beta}$ son fijas. Por tanto, la energía potencial interna es una constante y se puede también ignorar. En otras palabras, en la dis-

[1] A lo largo de este capítulo supondré que todas las fuerzas internas son centrales. Esto garantiza que $U_{\alpha\beta}$ dependa sólo de la magnitud de $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$, no de su dirección. También garantiza que las fuerzas internas nunca contribuyen a cambios en el momento angular total.

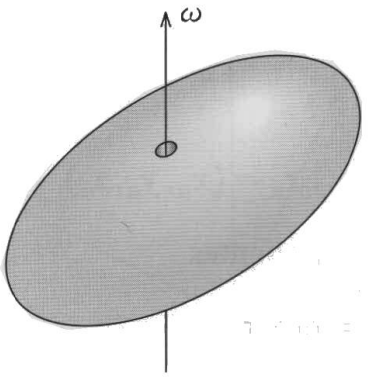


Figura 10.2. Bloque de madera en forma de huevo con una perforación a través de la cual está ensartado a una barra fija o eje z. El bloque está girando con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

cusión del movimiento de un cuerpo rígido tenemos que considerar sólo las fuerzas *externas* y sus correspondientes energías potenciales.

10.2 Rotación alrededor de un eje fijo

Los resultados de la sección anterior muestran la importancia del movimiento rotacional. Por ejemplo, la energía cinética de cualquier cuerpo extendido que vuela por el aire (se puede pensar en un bastón lanzado al aire) es la suma de dos términos: la energía traslacional del CM y la energía rotacional de su giro alrededor del CM. El primero lo entendemos casi completamente, pero necesitamos estudiar un poco más el último. En la mayor parte del resto de este capítulo, nos centraremos en el movimiento rotacional.

En esta sección comenzaremos con el caso especial de un cuerpo que está rotando alrededor de un eje fijo, tal como el trozo de madera mostrado en la Figura 10.2 que gira sobre una barra fija, y primero calcularemos su momento angular.

Como el eje de rotación está fijo, podemos acordar en llamarlo eje z, con el origen O en algún punto del eje de rotación. Como siempre nos imaginamos el cuerpo dividido en muchos trozos pequeños con masas m_α $(\alpha = 1,\ldots,N)$ y el momento angular está dado por la fórmula habitual

$$\mathbf{L} = \sum \boldsymbol{\ell}_\alpha = \sum \mathbf{r}_\alpha \times m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \tag{10.21}$$

donde las velocidades $\mathbf{v}_\alpha$ son las velocidades con que los trozos del cuerpo están siendo transportados en círculos a la velocidad rotacional del cuerpo $\boldsymbol{\omega}$. Vimos en (9.22) que éstas viene dadas por $\mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha$. Con nuestro eje z en la dirección de $\boldsymbol{\omega}$, las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ son

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$$

y

$$\mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha).$$

Por tanto $\mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha$ tiene componentes

$$\mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha = (-\omega y_\alpha, \omega x_\alpha, 0)$$

y finalmente

$$\boldsymbol{\ell}_\alpha = m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha = m_\alpha \omega(-z_\alpha x_\alpha, -z_\alpha y_\alpha, x_\alpha^2 + y_\alpha^2). \tag{10.22}$$

Por fin estamos preparados para calcular el momento angular total de nuestro cuerpo giratorio. Comenzaré con la componente z. Si introducimos la componente z de (10.22) en (10.21), encontramos que

$$L_z = \sum m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2)\omega. \tag{10.23}$$

Ahora bien, la cantidad $(x_\alpha^2 + y_\alpha^2)$ es la misma que ρ_α^2, donde, como es habitual, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ denota la distancia de cualquier punto (x, y, z) desde el eje z. Por lo tanto,

$$L_z = \sum m_\alpha \rho_\alpha^2 \omega = I_z \omega, \tag{10.24}$$

donde

$$I_z = \sum m_\alpha \rho_\alpha^2 \tag{10.25}$$

es el conocido **momento de inercia alrededor del eje** z, tal como se define en todo curso de introducción a la física; la suma de todas las masas constituyentes, cada una multiplicada por el cuadrado de la distancia que la separa del eje z.[2] Por consiguiente hemos probado el resultado conocido de que

(momento angular) = (momento de inercia) × (velocidad angular).

Observe, sin embargo, que el momento angular del primer miembro de (10.24) es realmente L_z, y el momento de inercia es, por supuesto, aquel para la rotación alrededor del eje z. Para reforzar este resultado satisfactorio, calculemos la energía cinética de nuestro cuerpo en rotación. Esta es

[2] Quizá recuerde que, cuando se calculan de hecho momentos de inercia, muchas veces se sustituye la suma en (10.25) por una integral. Por ahora, sin embargo, continuaré escribiendo momentos de inercia como sumas.

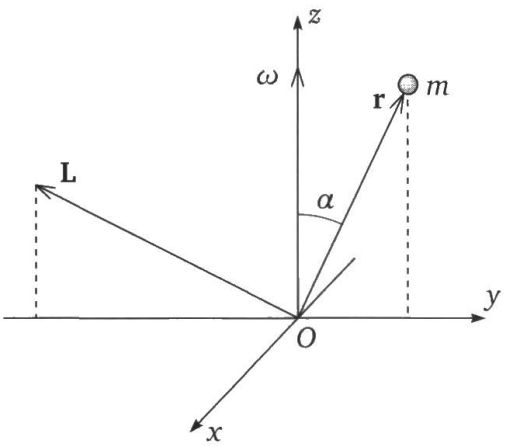


Figura 10.3. Cuerpo rígido en rotación compuesto por una única masa m anclada al eje z por una barra sin masa a un ángulo fijo α; se muestra en el momento en que m descansa sobre el plano yz. A medida que el cuerpo gira alrededor del eje z, m tiene velocidad, y por tanto momento, hacia la página (en la dirección x negativa) en el momento mostrado. Por lo tanto el momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ está dirigido como se muestra y no es ciertamente paralelo a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

$$T = \tfrac{1}{2}\sum m_\alpha v_\alpha^2,$$

o, como la velocidad de m_α mientras describe un círculo alrededor del eje z con velocidad angular ω es $v_\alpha = \rho_\alpha \omega$,

$$T = \tfrac{1}{2}\sum m_\alpha \rho_\alpha^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2} I_z \omega^2, \tag{10.26}$$

otro conocido resultado de introducción a la física.

Hasta ahora no hemos encontrado sorpresas, pero cuando calculamos las componentes x e y de $\mathbf{L}$ encontramos algo inesperado. Sustituyendo las componentes x e y de (10.22) en (10.21), encontramos para las componentes x e y de $\mathbf{L}$:

$$L_x = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha \omega \qquad \text{y} \qquad L_y = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha \omega. \tag{10.27}$$

Como veremos en un momento las sumas que aparecen son en general *distintas de* cero, y tenemos la siguiente sorprendente conclusión: la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ apunta en la dirección z (el cuerpo rota alrededor del eje z), pero, como L_x y L_y pueden ser distintos de cero, el momento angular $\mathbf{L}$ puede estar en una dirección *diferente*. Esto es, el momento angular puede no estar en la misma dirección que la velocidad angular, y tenemos la relación $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, ¡que quizá se haya aprendido en introducción a la física que en general no es cierto!

Para comprender mejor esta conclusión algo inesperada, consideremos un cuerpo rígido que consiste en una única masa m al final de una barra sin masa, que gira alrededor del eje z con un ángulo fijo α, como en la Figura 10.3. A medida que este cuerpo rota alrededor del eje z, es fácil ver que la masa m tiene una velocidad $\mathbf{v}$

hacia la página (dirección x negativa) y por tanto que $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ está en la dirección mostrada, a un ángulo $(90° - \alpha)$ con el eje z. Claramente L_y no es igual a cero, y además, incluso aunque el cuerpo está rotando alrededor del eje z, el momento angular no está en esa dirección. En otras palabras, $\mathbf{L}$ no es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$.

Merece la pena examinar este ejemplo con un poco más de detalle. Está claro, por la figura, que a medida que el cuerpo rota uniformemente alrededor del eje z, la dirección de $\mathbf{L}$ cambia (concretamente, $\mathbf{L}$ él mismo se desliza alrededor del eje z). Por tanto, $\dot{\mathbf{L}} \neq \mathbf{0}$, y es necesario un momento de fuerza simplemente para mantener el cuerpo girando uniformemente. Esta conclusión, al principio un poco sorprendente, es realmente fácil de entender: el momento de fuerza requerido está en la dirección de $\dot{\mathbf{L}}$, el cual está fuera de la página (dirección x positiva) en la Figura 10.3; es decir, el momento de fuerza debe ser en el sentido contrario a las agujas del reloj. La manera más fácil de entender esto es colocarse en un sistema de referencia que está rotando con el cuerpo. En este sistema, la masa m experimenta una fuerza centrífuga del eje z (a la derecha en al imagen). Por lo tanto se necesita un momento de fuerza en sentido contrario a las agujas del reloj para prevenir que la barra que sujeta m se doble o que se rompa su anclaje sobre el eje.

Cuando un cuerpo, tal como la rueda de un coche que va por una autopista, está rotando uniformemente alrededor de una dirección fija, normalmente no queremos tener que ejercer ningún momento de fuerza sobre ella. Esto significa que el cuerpo debe diseñarse de tal manera que su momento angular sea paralelo a su velocidad angular. En el caso de un coche, esto está garantizado por el proceso de equilibrado dinámico de las ruedas. Si las ruedas no están debidamente equilibradas, nos damos cuenta rápidamente de ello por una desagradable vibración del coche. Más generalmente, la cuestión de si $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\omega}$ son o no son paralelos es un tema importante en todo el estudio de cuerpos que rotan y nos lleva al importante concepto de *ejes principales*, que discutiremos en la Sección 10.4.

Los productos de inercia

Es necesario agrupar nuestros resultados para el momento angular de un cuerpo que rota alrededor del eje z y simplificar nuestra notación. Es claro de (10.27) que L_x y L_y son proporcionales a ω, y las constantes de proporcionalidad se denotan generalmente por I_{xz} y I_{yz}. Por consiguiente reescribiré (10.27) como

$$L_x = I_{xz}\omega \qquad \text{y} \qquad L_y = I_{yz}\omega \tag{10.28}$$

donde

$$I_{xz} = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha \qquad \text{y} \qquad I_{yz} = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha \,. \tag{10.29}$$

Los dos coeficientes I_{xz} y I_{yz} se llaman los **productos de inercia** del cuerpo. El razonamiento para esta nueva notación es que I_{xz} nos dice que la componente x de

L cuando $\boldsymbol{\omega}$ está en la dirección z (y lo mismo para I_{yz}). Para ajustarnos a esta notación, tenemos que renombrar I_z, el momento de inercia a la antigua usanza alrededor del eje z y llamarlo I_{zz},

$$I_{zz} = \sum m_\alpha \rho_\alpha^2 = \sum m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2). \tag{10.30}$$

Con esta notación podemos decir que, para un cuerpo que rota alrededor del eje z, el momento angular es

$$\mathbf{L} = (I_{xz}\omega, I_{yz}\omega, I_{zz}\omega). \tag{10.31}$$

Obviamente, es importante ser capaz de calcular los coeficientes I_{xz}, I_{yz} e I_{zz}, para cuerpos de diferentes formas. Discutiré varios ejemplos en el recordatorio de este capítulo y hay muchos más en los problemas. Daré tres ejemplos sencillos para comenzar.

Ejemplo 10.1 *Cálculo de algunos momentos y productos de inercia sencillos*

Calculemos el momento y productos de inercia para la rotación alrededor del eje z de los siguientes cuerpos rígidos: **(a)** Una única masa m localizada en la posición $(0, y_0, z_0)$ como se muestra en la Figura 10.3. **(b)** Lo mismo que en la parte (a) pero con una segunda masa igual colocada simétricamente por debajo del plano xy, como en la Figura 10.4(a). **(c)** Un anillo uniforme de masa M y radio ρ_0 centrado en el eje z y paralelo al plano xy, como en la Figura 10.4(b).

(a) Para la masa sola de la Figura 10.3, las sumas en (10.29) y (10.30) se reducen a un único término y encontramos que

$$I_{xz} = 0, \qquad I_{yz} = -my_0z_0 \qquad \text{e} \qquad I_{zz} = my_0^2.$$

Que I_{yz} sea distinto de cero confirma que **L** tiene componente y distinta de cero y por consiguiente que el momento angular **L** no está en la misma dirección que el eje de rotación. Las partes restantes (b) y (c) ilustran cómo los productos de inercia pueden hacerse cero cuando un cuerpo rígido tiene ciertas simetrías.

(b) Para las dos masas de la Figura 10.4(a) cada una de las sumas en (10.29) y (10.30) contiene dos términos y obtenemos que

$$I_{xz} = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha = 0 \tag{10.32}$$

porque ambas masas tienen $x_\alpha = 0$,

$$I_{yz} = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha = -m[y_0z_0 + y_0(-z_0)] = 0, \tag{10.33}$$

e

$$I_{zz} = \sum m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) = m(0 + y_0^2 + 0 + y_0^2) = 2my_0^2.$$

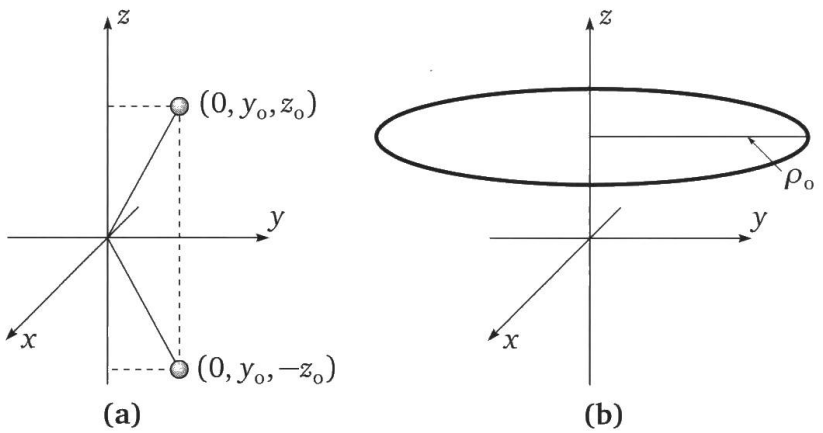


Figura 10.4. **(a)** Un cuerpo rígido, formado por dos masas iguales m mantenidas a distancias iguales por encima y por debajo del plano xy, está rotando alrededor del eje z (se muestra en un instante en que las dos masas están sobre el plano yz). **(b)** Anillo continuo uniforme de masa total M y radio ρ_0, centrado en el eje z y paralelo al plano xy. (Ejemplo 10.1).

El caso interesante aquí es el producto de inercia I_{yz}, que es cero porque la contribución de la primera masa se cancela exactamente con la de la segunda masa, en el punto «imagen especular» con el signo opuesto al de de z_α. Claramente esto sucederá para cualquier cuerpo que tenga simetría de reflexión[3] en el plano $z = 0$; ambos productos de inercia I_{xz} e I_{yz} serán cero porque cada término en cada una de las sumas de (10.32) y (10.33) será cancelado por otro término con el signo opuesto al de z_α. Con $I_{xz} = I_{yz} = 0$, vemos de (10.31) que cuando el cuerpo rota alrededor del eje z, el momento angular **L** está también sobre el eje z.

(c) Como el cuerpo en la Figura 10.4(b) es una masa distribuida uniformemente, deberíamos evaluar en general los productos y momento de inercia como integrales, pero en este caso podemos ver las respuestas sin hacer realmente las integrales. Consideremos, primero, el producto de inercia I_{xz} como el dado por la suma en (10.32). Observando la Figura 10.4(b), es fácil ver que esta suma es cero: cada contribución a la suma de una masa pequeña m_α en $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ se puede emparejar con la contribución de una masa igual situada en el punto diametralmente opuesto del círculo en $(-x_\alpha, -y_\alpha, z_\alpha)$. Esta segunda contribución, con el mismo valor de z pero el valor opuesto para x, cancela exactamente la primera, y concluimos que la suma completa I_{xz} es cero. Por el mismo argumento, $I_{yz} = 0$. El momento I_{zz} se evalúa más fácilmente en la forma de la primera suma en (10.30). Como todos los términos en la suma tienen el mismo valor de ρ_α (concretamente ρ_0), podemos factorizar ρ_α^2 fuera de la suma y resulta

[3] Decimos que un cuerpo tiene simetría de reflexión en el plano $z = 0$ si la densidad de masa es la misma en cualquier punto (x, y, z) que en el punto $(x, y, -z)$, la reflexión de (x, y, z) en un espejo situado en el plano $z = 0$.

$$I_{zz} = \left(\sum m_\alpha\right)\rho_o^2 = M\rho_o^2.$$

En este ejemplo, los dos productos de inercia eran cero porque el cuerpo tenía simetría axial respecto de su eje de rotación,[4] y es fácil ver que el mismo resultado se cumple de manera bastante general: si un cuerpo rígido tiene simetría axial respecto a cierto eje (como una rueda bien equilibrada alrededor de su eje o un cono circular alrededor de su línea central), entonces los dos productos de inercia para la rotación alrededor de ese eje son automáticamente cero, porque los términos de las sumas en (10.32) y (10.33) se cancelan a pares. En particular, si un cuerpo tiene simetría axial respecto a cierto eje y está rotando alrededor del eje de simetría, su momento angular estará en la misma dirección.

10.3 Rotación alrededor de un eje cualquiera; el tensor de inercia

Hasta aquí sólo hemos considerado un cuerpo que rota alrededor del eje z. En cierto sentido esto es bastante general: cualquier eje respecto al que esté rotando un cuerpo, podemos escoger llamarlo eje z. Desafortunadamente, aunque esta afirmación es cierta, no cuenta toda la historia. Primero, muchas veces estamos interesados en cuerpos que son libres de rotar alrededor de cualquier eje (los rodamientos de un giroscopio permiten que rote alrededor de cualquier eje, y un proyectil, tal como una pelota de béisbol o un bastón lanzados al aire, tienen la misma libertad). Cuando este es el caso, el eje alrededor del que rota el cuerpo puede *cambiar con el tiempo*. Si esto sucede, entonces podemos ciertamente elegir como nuestro eje z el eje de rotación en un instante, pero un instante después nuestro eje z escogido adecuadamente *no* será el eje de rotación. Por esta única razón, debemos examinar claramente la forma del momento angular cuando un cuerpo está girando alrededor de un eje arbitrario.

La segunda razón por la que necesitamos considerar la rotación alrededor de un eje arbitrario es más sutil, y volveré a ella más tarde, pero permítanme mencionarla brevemente aquí. Hemos visto que en general la dirección del momento angular de un cuerpo que gira no es la misma que la del eje de rotación. Por otro lado, a veces pasa que estas dos direcciones *son* la misma. (Por ejemplo, hemos visto que este es el caso para un cuerpo con simetría axial que rota alrededor de su eje de simetría).

[4] Decimos que un cuerpo es simétrico axialmente, o rotacionalmente, respecto a un eje si la densidad de masa es la misma en todos los puntos sobre cualquier círculo centrado sobre el eje, y perpendicular a él. En términos de coordenadas polares cilíndricas (ρ, ϕ, z) centrada sobre el eje en cuestión, la densidad de masa es independiente de ϕ. Alternativamente, la distribución de masa no cambia por cualquier rotación alrededor del eje de simetría.

Cuando esto es cierto, decimos que el eje en cuestión es un *eje principal*. Hallaremos que para cualquier cuerpo dado, que rota alrededor de cualquier punto dado, hay tres ejes principales mutuamente perpendiculares. Como mucha de nuestra discusión de las rotaciones es mucho más fácil cuando utilizamos estos ejes principales, a menudo queremos escoger los ejes principales como nuestros ejes coordenados. Si lo hacemos así, entonces ya no tenemos la libertad de elegir nuestro eje z para que coincida con un eje arbitrario de rotación. Dicho de otra manera, debemos permitir que *cualquier* eje sea el eje de rotación, y nuestra primera tarea es calcular el momento angular correspondiente a tal rotación.

Momento angular para una velocidad angular arbitraria

Consideremos un cuerpo rígido que rota alrededor de una eje arbitrario con velocidad angular

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z).$$

Antes de embarcarnos en el cálculo del momento angular, detengámonos un momento para analizar el tipo de situaciones en las que nuestros cálculos tendrán validez. De hecho existen dos casos importantes que se pueden tener en cuenta. Primero, sucede a veces que un cuerpo rígido tiene un punto fijo, de tal manera que un movimiento posible es la rotación alrededor de ese punto fijo. Por ejemplo, el péndulo de Foucault está fijo en su soporte situado en el techo, y su único movimiento posible es la rotación alrededor de ese punto fijo. En otros casos, la punta de una peonza que gira sobre una mesa puede quedar enganchada en una pequeña muesca de la mesa y, desde ese momento, únicamente puede rotar alrededor de la posición fija de su punta. En cualquier caso, la magnitud y la dirección de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ pueden cambiar, pero la rotación será siempre alrededor del punto fijo, que naturalmente resulta ser nuestro origen.

El segundo caso que uno tiene en la mente es el de un objeto que ha sido arrojado al aire. En este caso no hay ciertamente ningún punto fijo, pero hemos visto que podemos analizar el movimiento en términos del movimiento del CM y el movimiento rotacional relativo al CM. En este caso, el movimiento que estamos analizando ahora es el movimiento relativo al CM, que naturalmente tomaremos que sea el origen de coordenadas. Con estos ejemplos en mente, calculemos el momento angular del cuerpo,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha \\ &= \sum m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha). \end{aligned} \tag{10.34}$$

Podemos evaluar esto casi como hicimos en la sección anterior para el caso en que $\boldsymbol{\omega}$ estaba sobre el eje z: para cualquier posición $\mathbf{r}$ podemos escribir las componen-

tes de $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ y entonces $\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, con el desagradable resultado (hay varias maneras de hacelo; uno es la conocida regla *BAC − CAB*, vea el Problema 10.19)

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \big((y^2+z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z,\\ -yx\omega_x + (z^2+x^2)\omega_y - yz\omega_z,\\ -zx\omega_x - zy\omega_y + (x^2+y^2)\omega_z\big).\end{aligned} \tag{10.35}$$

Sustituyendo (10.35) en (10.34), podemos escribir las tres componentes de $\mathbf{L}$ como sigue:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}\right\} \tag{10.36}$$

donde los tres momentos de inercia, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, y los seis productos de inercia, $I_{xy}, \ldots$, están definidos en paralelismo exacto con las definiciones (10.29) y (10.30) de la sección anterior. Por ejemplo,

$$I_{xx} = \sum m_\alpha (y_\alpha^2 + z_\alpha^2) \tag{10.37}$$

y análogamente para I_{yy} e I_{zz}, e

$$I_{xy} = -\sum m_\alpha x_\alpha y_\alpha \tag{10.38}$$

y así sucesivamente.

El resultado poco sofisticado (10.36) se puede hacer más eficiente de dos maneras: si no nos molesta sustituir los subíndices x, y y z por $i = 1, 2, 3$, entonces (10.36) adopta la forma compacta

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j \,. \tag{10.39}$$

Esto sugiere otra manera de pensar sobre (10.36) porque, como se puede reconocer fácilmente, (10.39) es la regla para multiplicar matrices. Por consiguiente, (10.36) se puede reescribir en forma matricial. Primero, introducimos la matriz 3×3

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{10.40}$$

que se denomina **tensor momento de inercia**[5] o simplemente **tensor de inercia**. Además, consideremos temporalmente los vectores tridimensionales como columnas 3×1 constituidas por sus tres componentes; esto es, escribimos

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \tag{10.41}$$

(Advierta que estoy usando ahora negrita para dos tipos de matrices (cuadradas 3×3 como $\mathbf{I}$, y matrices columna 3×1 como $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\omega}$ que en realidad son sólo vectores. Aprenderemos rápidamente a distinguir ambos tipos de matrices por el contexto). Con estas notaciones, la ecuación (10.36) toma la forma matricial compacta

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \tag{10.42}$$

en la cual el producto del segundo miembro es el producto estándar de dos matrices, la primera una matriz cuadrada 3×3 y la segunda una matriz columna 3×1.

Este bonito resultado es nuestro primer ejemplo de la gran utilidad del álgebra matricial en mecánica. En muchas áreas de la física (quizá más especialmente en mecánica cuántica, pero también ciertamente en mecánica clásica) la formulación de muchos problemas en notación matricial es mucho más sencilla que de cualquier otra manera, por lo que es absolutamente esencial familiarizarse con las bases del álgebra matricial.[6]

Una propiedad importante del tensor momento de inercia (10.40) es que es una matriz *simétrica*; esto es, sus elementos cumplen

$$I_{ij} = I_{ji}. \tag{10.43}$$

---

[5] La definición completa de un tensor incluye las propiedades de transformación de sus elementos cuando rotamos nuestros ejes coordenados (vea la Sección 15.17), pero para nuestros propósitos actuales es suficiente decir que un tensor tridimensional es un conjunto de nueve números colocados como una matriz 3×3 como en (10.40).

[6] Las operaciones de matrices que supondré conocidas (suma de matrices, multiplicación, transposición, determinante y algunas más) se pueden encontrar en el Capítulo 3 de Mary Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (Wiley, 1983). Algunas de las ideas que desarrollaré en este y los siguientes capítulos se discuten más en detalle en el Capítulo 10 del mismo libro.

Otra manera de decirlo es que la matriz (10.40) no cambia si la reflejamos por la *diagonal principal* (la diagonal que va de la parte superior izquierda hasta la parte inferior derecha). Cada elemento encima de la diagonal (por ejemplo I_{xy}) es igual a su imagen especular (I_{yx}) debajo de la diagonal. Para probar esta propiedad, sólo hay que fijarse en la definición (10.38) para ver que I_{xy} es lo mismo que I_{yx} y análogamente con todos los elementos fuera de la diagonal I_{ij} (los elementos con $i \neq j$). Y otra forma de enunciar esta propiedad es definir la *transpuesta* de cualquier matriz **A** como la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ que se obtiene mediante la reflexión de **A** en su diagonal principal (el elemento ij de $\tilde{\mathbf{A}}$ es el elemento ji de **A**. Por tanto el resultado (10.43) significa que la matriz **I** es igual a su propia transpuesta,

$$\mathbf{I} = \tilde{\mathbf{I}}. \tag{10.44}$$

Esta propiedad (de que la matriz **I** es simétrica) juega un papel fundamental en la teoría matemática del tensor momento de inercia.

Ejemplo 10.2 *Tensor de inercia para un cubo sólido*

Hallemos el tensor momento de inercia para **(a)** un cubo sólido uniforme, de masa M y lado a, que rota alrededor de una de sus esquinas (Figura 10.5) y **(b)** el mismo cubo que rota alrededor de su centro. Usemos ejes paralelos a los bordes del cubo. Para ambos casos, encontremos el momento angular cuando el eje de rotación es paralelo a $\hat{\mathbf{x}}$ [esto es, $\boldsymbol{\omega} = (\omega, 0, 0)$] y también cuando $\boldsymbol{\omega}$ está sobre la diagonal del cuerpo en la dirección $(1, 1, 1)$.

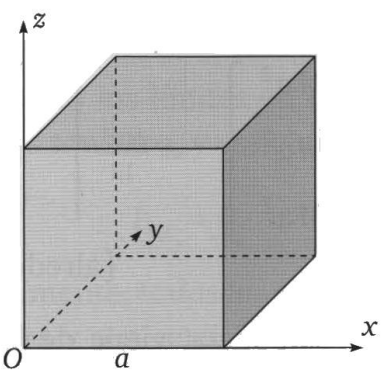


Figura 10.5. Cubo sólido uniforme de lado a que se dispone a rotar alrededor del punto O.

(a) Puesto que la masa está distribuida uniformemente, tenemos que sustituir las sumas en las definiciones (10.37) y (10.38) por integrales. Por consiguiente (10.37) se convierte en

$$I_{xx} = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz\, \varrho\,(y^2 + z^2) \tag{10.45}$$

donde $\varrho = M/a^3$ denota la densidad de masa del cubo. Esta es la suma de dos integrales triples, cada una de las cuales se puede factorizar en tres integrales. Por ejemplo,

$$\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz\, \varrho\, y^2 = \varrho \left(\int_0^a dx \right) \left(\int_0^a y^2\, dy \right) \left(\int_0^a dz \right)$$
$$= \tfrac{1}{3} \varrho a^5 = \tfrac{1}{3} M a^2. \tag{10.46}$$

El segundo término en (10.45) tiene el mismo valor, y concluimos que

$$I_{xx} = \tfrac{2}{3} M a^2 \tag{10.47}$$

con (por simetría) los mismos valores para I_{yy} e I_{zz}.

La forma integral de (10.38) para los elementos de fuera de la diagonal de **I** es

$$\begin{aligned} I_{xy} &= -\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz\, \varrho\, xy \\ &= -\varrho \left(\int_0^a x\, dx \right) \left(\int_0^a y\, dy \right) \left(\int_0^a dz \right) \\ &= -\tfrac{1}{4} \varrho a^5 = -\tfrac{1}{4} M a^2 \end{aligned} \tag{10.48}$$

con la misma respuesta para todos los otros elementos fuera de la diagonal (otra vez por la simetría).

Poniendo todos estos resultados juntos, encontramos que el tensor momento de inercia de un cubo que rota en torno a una de sus esquinas es

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{12} \begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

[alrededor de una esquina] (10.49)

donde la segunda forma, más compacta, viene de las reglas para multiplicar una matriz por un número. (Advierta que, como se esperaba, **I** es una matriz simétrica).

Según (10.42) el momento angular **L** correspondiente a una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ está dado por el producto de matrices $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$, donde los vectores **L** y $\boldsymbol{\omega}$ se entienden como columnas 3×1 constituidas por las tres componentes de los vectores involucrados. Por tanto, si el cubo está rotando alrededor del eje x,

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \frac{Ma^2}{12} \begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{12} \begin{bmatrix} 8\omega \\ -3\omega \\ -3\omega \end{bmatrix} \tag{10.50}$$

o, volviendo a una notación más común para vectores,

$$\mathbf{L} = Ma^2\omega\left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}\right). \tag{10.51}$$

Tal y como avanzamos como posible, vemos que en este caso $\mathbf{L}$ no está en la misma dirección que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = (\omega, 0, 0)$.

Si el cubo está rotando alrededor de su diagonal principal, entonces el vector unitario en la dirección de rotación es $\mathbf{u} = (1/\sqrt{3})(1,1,1)$ y el vector velocidad angular es $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{u} = (\omega/\sqrt{3})(1,1,1)$. Por consiguiente, de acuerdo con (10.42), el momento angular para este caso es

$$\begin{aligned}\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} &= \frac{Ma^2}{12}\frac{\omega}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{Ma^2}{12}\frac{\omega}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{6}\boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \tag{10.52}$$

En este caso, el de la rotación alrededor de la diagonal principal del cubo, vemos que el momento angular está en la misma dirección que la velocidad angular.

(b) Si el cubo está rotando alrededor de su centro, entonces en la Figura 10.5 debemos mover el origen O al centro del cubo. Esto significa que todas las integrales en (10.45) y (10.48) van desde $-a/2$ hasta $a/2$ en lugar de ir de 0 hasta a. Evaluando (10.45) para I_{xx} [como en (10.46)] encontramos que

$$I_{xx} = \tfrac{1}{6}Ma^2 \tag{10.53}$$

y lo mismo para I_{yy} e I_{zz}. Cuando los límites en (10.48) se sustituyen por $-a/2$ y $a/2$, las dos primeras integrales son cero, y concluimos que

$$I_{xy} = 0.$$

Como se puede comprobar fácilmente, todos los elementos de fuera de la diagonal de $\mathbf{I}$ funcionan de la misma manera y son cero. Podríamos realmente haber anticipado esta desaparición de los elementos de fuera de la diagonal de $\mathbf{I}$ basada en el Ejemplo 10.1. Vimos allí que si el plano $z = 0$ es un plano de simetría de reflexión, entonces tanto I_{xz} como I_{yz} son cero automáticamente. (Cada contribución por encima del plano $z = 0$ se cancelaba con la contribución de los puntos correspondiente por debajo del plano). Por tanto, si dos de estos tres planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ son planos de simetría de reflexión, esto garantiza que *todos* los productos de inercia son cero. Para el cubo (con O en su centro) todos los planos del plano de coordenadas son planos de simetría de reflexión, así que era inevitable que los elementos de fuera de la diagonal de $\mathbf{I}$ resultasen ser cero.

Recopilando resultados, concluimos que para un cubo que rota alrededor de su centro, el tensor momento de inercia es

$$\mathbf{I} = \tfrac{1}{6}Ma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{6}Ma^2\mathbf{1} \qquad \text{[alrededor del CM]}, \tag{10.54}$$

donde $\mathbf{1}$ denota la **matriz unitaria** 3×3,

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{10.55}$$

Como el tensor momento de inercia para la rotación alrededor del centro de un cubo es un múltiplo de la matriz unitaria, veremos que las rotaciones alrededor del centro de un cubo son especialmente fáciles de analizar. En particular, el momento angular del cubo (que rota alrededor de su centro) es

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{6}Ma^2\mathbf{1}\boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{6}Ma^2\boldsymbol{\omega}, \tag{10.56}$$

que implica que el momento angular $\mathbf{L}$ está en la misma dirección que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, *cualquiera que sea la dirección de* $\boldsymbol{\omega}$. Este resultado sencillo es una consecuencia del alto grado de simetría del cubo relativo a su centro.

Nos daremos cuenta de que (10.56) para la rotación alrededor de cualquier eje que pase por el centro del cubo concuerda con (10.52) para rotaciones alrededor de la diagonal principal que pasa por la esquina del cubo. Esto no es una casualidad: la diagonal principal que pasa por el centro del cubo es exactamente la misma que la diagonal que pasa por la esquina. Por tanto los momentos angulares para rotaciones alrededor de estos dos ejes *tienen* que coincidir.

Este ejemplo ilustra muchas de las características de un cálculo típico del tensor momento de inercia $\mathbf{I}$, y el lector debería intentar resolver algunos de los problemas de final de capítulo para acostumbrarse a hacer tales cálculos por uno mismo. Mientras tanto, veamos ahora un ejemplo más para ilustrar las características especiales de un cuerpo que tiene simetría axial.

Ejemplo 10.3 *Tensor de inercia para un cono sólido*

Hallemos el tensor momento de inercia $\mathbf{I}$ para una peonza dada por un cono sólido uniforme (masa M, altura h y radio de la base R) que gira alrededor de su punta. Escojamos el eje z como eje de simetría del cono, como se muestra en la Figura 10.6. Para una velocidad angular arbitraria $\boldsymbol{\omega}$, analicemos cuál es el momento angular $\mathbf{L}$ de la peonza.

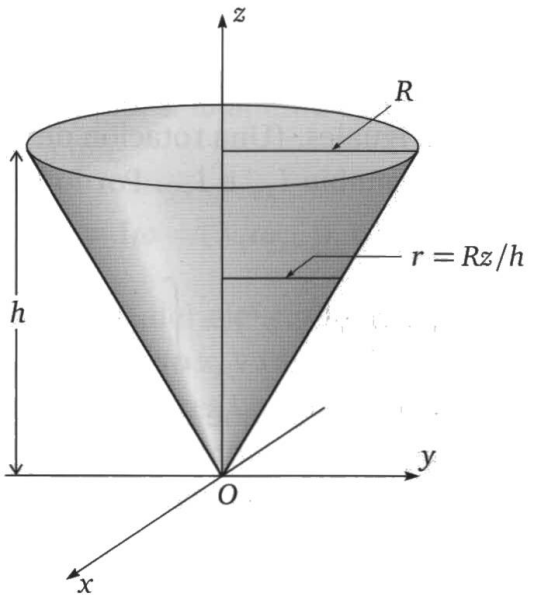


Figura 10.6. Peonza constituida por un cono sólido uniforme, de masa M, altura h y radio de la base R, que gira sobre su punta. El radio del cono a una altura z es $r = Rz/h$. (La peonza no estará necesariamente en posición vertical, pero, sea cual sea su orientación, elegimos el eje z como su eje de simetría).

El momento de inercia alrededor del eje z, I_{zz}, está dado por la integral

$$I_{zz} = \int_V dV \varrho(x^2 + y^2) \tag{10.57}$$

donde el subíndice V de la integral indica que la integral recorre el volumen del cuerpo, dV es un elemento de volumen, y ϱ es la densidad de masa constante $\varrho = M/V = 3M/(\pi R^2 h)$. Esta integral se evalúa fácilmente en coordenadas polares cilíndricas (ρ, ϕ, z) porque $x^2 + y^2 = \rho^2$. Por consiguiente la integral se puede escribir como[7]

$$I_{zz} = \varrho \int_V dV\, \rho^2 = \varrho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r \rho\, d\rho\, \rho^2 \tag{10.58}$$

donde el límite superior r de la integral de ρ es el radio del cono a la altura z, como se muestra en la Figura 10.6. Estas integrales se realizan fácilmente y conducen a (Problema 10.26)

[7] He aquí unos de esos horribles momentos en los que el uso tradicional de la letra griega «ro» para la densidad choca con su uso para la coordenada cilíndrica igual a la distancia desde el eje z. Advierta que estoy usando dos versiones diferentes de la letra, ϱ para densidad y ρ para la coordenada. Por fortuna, esta coincidencia desafortunada sucede muy ocasionalmente. Si se necesita refrescar la memoria sobre integrales de volumen en coordenadas cilíndricas, vea el Problema 10.26.

$$I_{zz} = \tfrac{3}{10}MR^2. \tag{10.59}$$

Debido a la simetría rotacional de la peonza alrededor del eje z, los otros momentos de inercia, I_{xx} e I_{yy}, son iguales. (Una rotación de 90° alrededor del eje z deja al cuerpo invariable pero intercambia I_{xx} e I_{yy}. Por lo tanto, $I_{xx} = I_{yy}$). Para evaluar I_{xx} escribimos

$$I_{xx} = \int_V dV\varrho(y^2+z^2) = \int_V dV\varrho y^2 + \int_V dV\varrho z^2. \tag{10.60}$$

La primera integral aquí es la misma que el segundo término de (10.57), y, por la simetría rotacional, los dos términos en (10.57) son iguales. Por lo tanto, el primer término de (10.60) es justo $I_{zz}/2$ o $\frac{3}{20}MR^2$. La segunda integral en (10.60) se puede evaluar usando coordenadas polares cilíndricas, como en (10.58), y da $\frac{3}{5}Mh^2$. Por lo tanto

$$I_{xx} = I_{yy} = \tfrac{3}{20}M\,(R^2+4h^2) \tag{10.61}$$

Quedan por tanto por calcular los productos de inercia de fuera de la diagonal, $I_{xy}, \ldots$, pero podemos ver fácilmente que todos ellos son cero. La idea es que por la simetría axial respecto al eje z, ambos planos $x = 0$ e $y = 0$ son planos de simetría de reflexión. (Vea la Figura 10.6). Por el argumento dado en el Ejemplo 10.1, la simetría respecto al plano $x = 0$ implica que $I_{xy} = I_{xz} = 0$. Análogamente, la simetría respecto a $y = 0$ implica que $I_{yz} = I_{yx} = 0$. Por consiguiente, la simetría respecto a cualesquiera dos planos coordenados garantiza que *todos* los productos de inercia son cero.

Recopilando resultados, vemos que el tensor momento de inercia de un cono uniforme (relativo a su punta) es

$$\mathbf{I} = \tfrac{3}{20}M\begin{bmatrix} R^2+4h^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2+4h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \tag{10.62}$$

donde la última forma es sólo por la conveniencia de la exposición (y en el caso que nos ocupa, sucede que $\lambda_1 = \lambda_2$). Lo más asombroso de esta matriz es que sus elementos de fuera de la diagonal son todos cero. Una matriz con esta propiedad se denomina **matriz diagonal**. [El tensor de inercia (10.54) de un cubo respecto a su centro era también diagonal, pero como todos los elementos de su diagonal eran iguales, era realmente un múltiplo de la matriz unidad **1**, haciéndolo un caso todavía más especial]. La consecuencia importante de que **I** sea diagonal surge cuando evaluamos el momento angular **L** para una velocidad angular arbitraria $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = (\lambda_1\omega_x,\ \lambda_2\omega_y,\ \lambda_3\omega_z). \tag{10.63}$$

Aunque esto puede no parecer reseñable, advierta que si la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ apunta en la dirección de uno de los ejes coordenados, entonces lo mismo es cierto del momento angular $\mathbf{L}$. Por ejemplo, si $\boldsymbol{\omega}$ apunta en la dirección del eje x, entonces $\omega_y = \omega_z = 0$ y (10.63) implica que

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = (\lambda_1 \omega_x, 0, 0) \tag{10.64}$$

y $\mathbf{L}$ también apunta en la dirección del eje x. Obviamente, lo mismo sucede si $\boldsymbol{\omega}$ apunta en las direcciones de los ejes y o z, y vemos de forma bastante general que si el tensor de inercia $\mathbf{I}$ es diagonal, entonces $\mathbf{L}$ será paralelo a $\boldsymbol{\omega}$ siempre que $\boldsymbol{\omega}$ apunte en la dirección de uno de los tres ejes de coordenadas.

10.4 Ejes principales de inercia

Hemos visto que en general el momento angular de un cuerpo que gira en torno a un punto O no está en la misma dirección que el eje de rotación; esto es, $\mathbf{L}$ no es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$. Hemos visto también que, al menos para ciertos cuerpos, puede haber ciertos ejes para los cuales $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\omega}$ *son* paralelos. Cuando esto sucede, decimos que el eje en cuestión es un **eje principal**. Para expresar esta definición matemáticamente, advierta que los dos vectores distintos de cero $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ para algún número real λ. Por ello podemos definir un eje principal de un cuerpo (respecto a un origen O) como cualquier eje que pase por O con la propiedad de que si $\boldsymbol{\omega}$ apunta en la dirección del eje, entonces

$$\mathbf{L} = \lambda\boldsymbol{\omega} \tag{10.65}$$

para algún número real λ. Para ver el significado del número λ en esta ecuación, podemos elegir temporalmente la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ que sea la dirección z, en cuyo caso $\mathbf{L}$ está dado por (10.31) porque $\mathbf{L} = (I_{xz}\omega, I_{yz}\omega, I_{zz}\omega)$. Como $\mathbf{L}$ es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$, las primeras dos componentes son cero, y concluimos que $\mathbf{L} = (0, 0, I_{zz}\omega) = I_{zz}\boldsymbol{\omega}$. Comparando con (10.65), vemos que el número λ en (10.65) es justo el momento de inercia del cuerpo respecto al eje en cuestión. Para resumir, si la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ apunta en la dirección de un eje principal, entonces $\mathbf{L} = \lambda\boldsymbol{\omega}$, donde λ es el momento de inercia respecto al eje en cuestión.

Vamos a repasar lo que ya sabemos sobre la existencia de los ejes principales. Vimos al final de la última sección que si el tensor de inercia $\mathbf{I}$, con respecto a un conjunto elegido de ejes, resulta ser diagonal,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \tag{10.66}$$

entonces los ejes elegidos x, y y z son ejes principales. Recíprocamente, si los ejes x, y y z son ejes principales, entonces es fácil ver (Problema 10.29) que $\mathbf{I}$ debe ser diagonal, como en (10.66). Los tres números que he denotado por λ_1, λ_2 y λ_3 son los momentos de inercia respecto a los tres ejes principales y se denominan **momentos principales**.

Si un cuerpo tiene un eje de simetría que pasa por O (como la peonza del Ejemplo 10.3), entonces ese eje es un eje principal. Más todavía, cualesquiera dos ejes perpendiculares al eje de simetría (como los ejes x e y en el Ejemplo 10.3) son también ejes principales, porque el tensor de inercia respecto a estos ejes es diagonal. De nuevo, si un cuerpo tiene dos planos perpendiculares de simetría de reflexión a través de O (como el cubo que gira en torno a su centro[8] en el Ejemplo 10.2), entonces los tres ejes perpendiculares definidos por estos dos planos y O son ejes principales.

Hasta aquí todos nuestros ejemplos de ejes principales han incluido cuerpos con simetrías especiales, y se puede estar pensando muy razonablemente que la existencia de ejes principales está condicionada de alguna manera a que el cuerpo tenga algún tipo de simetría. Sin embargo, lo cierto es que, rotundamente, esto no es así. Aunque las simetrías de un cuerpo hacen mucho más fácil encontrar los ejes principales, resulta que *cualquier cuerpo rígido que rota alrededor de cualquier punto tiene tres ejes principales:*

Existencia de los ejes principales

Para cualquier cuerpo rígido y cualquier punto O existen tres ejes principales perpendiculares que pasan por O. Esto es, hay tres ejes perpendiculares que pasan por O con respecto a los cuales el tensor de inercia $\mathbf{I}$ es diagonal y, por consiguiente, con la propiedad de que cuando la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ apunta en la dirección de cualquiera de estos ejes lo mismo es cierto del momento angular $\mathbf{L}$.

Este sorprendente resultado es la consecuencia de un importante teorema matemático que establece que si $\mathbf{I}$ es cualquier matriz real simétrica (tal como el tensor de inercia de algún cuerpo con respecto a cualquier conjunto escogido de ejes ortogona-

[8] Por supuesto el cubo tiene *tres* planos de simetría de reflexión, pero dos son suficientes para garantizar lo que se pide aquí. Por ejemplo, si el cono de la Figura 10.6 fuera un cono elíptico, el eje z no sería ya un eje de simetría rotacional, pero los planos $x = 0$ e $y = 0$ proporcionarían todavía dos planos de simetría de reflexión, y los tres ejes coordenados serían todavía ejes principales.

les) entonces existe otro conjunto de ejes ortogonales (con el mismo origen) tal que la matriz correspondiente (llamémosla $\mathbf{I}'$), evaluada con respecto a los nuevos ejes, tiene la forma diagonal (10.66). Este resultado, que se demuestra en el Apéndice B, es extremadamente útil, porque la discusión del movimiento rotacional es mucho más sencilla si se puede referir a un conjunto de ejes principales, y el resultado garantiza que esto siempre se puede hacer. (Puede merecer la pena mencionar inmediatamente, que los ejes principales de un cuerpo rígido están naturalmente asociados al cuerpo. Por consiguiente cuando elegimos los ejes principales como nuestros ejes de coordenadas, estamos obligándonos a usar un conjunto concreto de ejes en rotación).

Aunque no es esencial ver ahora la prueba de la existencia de los ejes principales, ciertamente necesitamos saber cómo *encontrar* los ejes principales, y esto es lo que abordaremos en la siguiente sección.

Energía cinética de un cuerpo en rotación

Naturalmente, ser capaz de escribir la energía cinética de un cuerpo en rotación es importante. Lo dejaré como un ejercicio interesante (Problema 10.33) para demostrar que

$$T = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L}. \tag{10.67}$$

En particular, si usamos un conjunto de ejes principales para nuestro sistema de coordenadas, entonces $\mathbf{L} = (\lambda_1\omega_1, \lambda_2\omega_2, \lambda_3\omega_3)$ y

$$T = \tfrac{1}{2}(\lambda_1\omega_1^2 + \lambda_2\omega_2^2 + \lambda_3\omega_3^2). \tag{10.68}$$

Este importante resultado es una generalización natural de la ecuación (10.26), $T = \frac{1}{2}I_{zz}\omega^2$, para la rotación en torno a un eje z fijo. Utilizaremos el resultado en la Sección 10.9 al escribir el lagrangiano para un cuerpo que gira.

10.5 Cálculo de los ejes principales; ecuaciones de autovalores

Supongamos que queremos encontrar los ejes principales de un cuerpo rígido que rota alrededor de un punto O. Supongamos incluso más, que usando algún conjunto dado de ejes, hemos calculado el tensor de inercia $\mathbf{I}$ para el cuerpo. Si $\mathbf{I}$ es diagonal, entonces nuestros ejes ya son los ejes principales del cuerpo, y no hay nada más que hacer. Supongamos, sin embargo, que $\mathbf{I}$ *no* es diagonal. ¿Cómo podemos encontrar los ejes principales? La pista esencial es la ecuación (10.65): si $\boldsymbol{\omega}$ apunta en la dirección de un eje principal, entonces $\mathbf{L}$ debe igualar a $\lambda\boldsymbol{\omega}$ (para algún número λ). Como

$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$, se sigue que $\boldsymbol{\omega}$ debe cumplir la ecuación

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\omega} \tag{10.69}$$

para algún número (todavía desconocido) λ. La ecuación (10.69) tiene la forma

$$\text{(matriz)} \times \text{(vector)} = \text{(número)} \times \text{(el mismo vector)}$$

y se denomina **ecuación de autovalores**. Las ecuaciones de autovalores están entre las ecuaciones importantes de la física moderna y aparecen en muchas áreas diferentes. Siempre expresan la misma idea, de que alguna operación matemática realizada sobre un vector ($\boldsymbol{\omega}$ en nuestro caso) produce un segundo vector ($\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ aquí) que tiene la misma dirección que el primero. Un vector $\boldsymbol{\omega}$ que cumple (10.69) se denomina **autovector** y el número correspondiente λ, el **autovalor** correspondiente.

Existen realmente dos partes para resolver el problema de autovalores de (10.69). Normalmente queremos conocer las direcciones de $\boldsymbol{\omega}$ para las cuales (10.69) se cumple (a saber, las direcciones de los ejes principales), y en la mayoría de los casos también queremos conocer los autovalores correspondientes λ (a saber, los momentos de inercia respecto a los ejes principales). En la práctica, normalmente resolvemos estas dos partes del problema en el orden opuesto (primero encontramos los posibles autovalores λ y después las direcciones correspondientes de $\boldsymbol{\omega}$.

El primer paso para resolver la ecuación matricial (10.69) es reescribirla. Como $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{1}\boldsymbol{\omega}$ (donde $\mathbf{1}$ es la matriz unitaria 3×3), la ecuación (10.69) es la misma que $\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \lambda\mathbf{1}\boldsymbol{\omega}$, o, pasando el segundo miembro al primero,

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1})\boldsymbol{\omega} = 0. \tag{10.70}$$

Esta es una ecuación matricial de la forma $\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} = 0$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz 3×3 y $\boldsymbol{\omega}$ es un vector, esto es, una columna 3×1 de números ω_x, ω_y y ω_z. La ecuación matricial $\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} = 0$ representa realmente tres ecuaciones simultáneas para los tres números ω_x, ω_y y ω_z, y tiene la bien conocida propiedad de tales ecuaciones de que tienen una solución distinta de cero si y sólo si el determinante, $\det(\mathbf{A})$, es cero.[9] Por tanto, la ecuación de autovalores (10.70) tiene una solución distinta de cero si y sólo si

$$\det(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1}) = 0. \tag{10.71}$$

Esta ecuación se denomina **ecuación característica** (o *ecuación secular*) para la matriz $\mathbf{I}$. El determinante involucra una potencia cúbica del número λ. Por tanto, la ecuación es una ecuación cúbica para los autovalores λ y tendrá, en general, tres soluciones, λ_1, λ_2 y λ_3, los tres momentos principales. Para cada uno de estos valores de λ, la ecuación (10.70) se puede resolver para obtener el vector correspondiente

[9] Vea, por ejemplo, Mary Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (Wiley, 1983), página 133.

$\boldsymbol{\omega}$, cuya dirección nos dice la dirección de uno de los tres ejes principales del cuerpo rígido bajo consideración.

Si nunca se ha visto este procedimiento para encontrar los ejes principales (o, más generalmente, para resolver problemas de autovalores), ciertamente se querrá ver un ejemplo y hacer algunos uno mismo. He aquí uno como comienzo.

Ejemplo 10.4 *Ejes principales de un cubo respecto de una esquina*

Hallemos los ejes principales y los momentos correspondientes para el cubo del Ejemplo 10.2, que rota en torno a su esquina. Veamos cuál es la forma del tensor de inercia evaluada con respecto a los ejes principales. Usando ejes paralelos a los bordes del cubo, encontramos que el tensor de inercia es [Ecuación (10.49)]

$$\mathbf{I} = \mu \begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix} \tag{10.72}$$

donde he introducido la abreviatura μ para la constante $\mu = Ma^2/12$, que tiene dimensiones de momento de inercia. Como $\mathbf{I}$ no es diagonal, es claro que los ejes que hemos elegido originariamente (paralelos a los bordes del cubo) no son los ejes principales. Para encontrar dichos ejes, debemos hallar las direcciones de $\boldsymbol{\omega}$ que cumplen la ecuación de autovalores $\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\omega}$.

El primer paso es encontrar los valores de λ (los autovalores) que cumplen la ecuación característica $\det(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1}) = \mathbf{0}$. Sustituyendo (10.72) para $\mathbf{I}$, vemos que

$$\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 8\mu & -3\mu & -3\mu \\ -3\mu & 8\mu & -3\mu \\ -3\mu & -3\mu & 8\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8\mu - \lambda & -3\mu & -3\mu \\ -3\mu & 8\mu - \lambda & -3\mu \\ -3\mu & -3\mu & 8\mu - \lambda \end{bmatrix}.$$

El determinante de esta matriz se evalúa directamente y es

$$\det(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1}) = (2\mu - \lambda)(11\mu - \lambda)^2. \tag{10.73}$$

Por consiguiente las tres raíces de la ecuación $\det(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1}) = 0$ (los autovalores) son

$$\lambda_1 = 2\mu \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 11\mu. \tag{10.74}$$

Advierta que en este caso dos de las tres raíces de la cúbica (10.73) resultan ser iguales.

Armados con los autovalores, podemos ahora hallar los autovectores, esto es, las direcciones de los tres ejes principales de nuestro cubo que rota sobre su esquina. Éstas están determinadas por la ecuación (10.70), que debemos examinar para cada uno de los autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 (aunque en este caso los dos últimos son iguales). Comencemos con λ_1. Con $\lambda = \lambda_1 = 2\mu$, la ecuación (10.70) se convierte en

$$(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{1})\boldsymbol{\omega} = \mu \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{10.75}$$

Esto da tres ecuaciones para las componentes de $\boldsymbol{\omega}$,

$$\begin{aligned} 2\omega_x - \omega_y - \omega_z &= 0 \\ -\omega_x + 2\omega_y - \omega_z &= 0 \\ -\omega_x - \omega_y + 2\omega_z &= 0. \end{aligned} \tag{10.76}$$

Restando la segunda ecuación de la primera vemos que $\omega_x = \omega_y$, y la primera nos dice entonces que $\omega_x = \omega_z$. Por lo tanto, $\omega_x = \omega_y = \omega_z$, y concluimos que el primer eje principal está en la dirección $(1, 1, 1)$ sobre la diagonal principal del cubo. Si definimos un vector unitario $\mathbf{e}_1$ en esta dirección,

$$\mathbf{e}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \tag{10.77}$$

entonces $\mathbf{e}_1$ especifica la dirección de nuestro primer eje principal. Si $\boldsymbol{\omega}$ apunta en la dirección de $\mathbf{e}_1$, entonces $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \lambda_1 \boldsymbol{\omega}$. Esto dice simplemente que el momento de inercia respecto a este eje principal es $\lambda_1 = 2\mu = \frac{1}{6}Ma^2$. Por consiguiente nuestro análisis del primer autovalor ha producido esta conclusión: uno de los ejes principales del cubo, que rota sobre su esquina O, es la diagonal principal a través de O (dirección $\mathbf{e}_1$), y el momento de inercia para ese eje es el autovalor correspondiente $\frac{1}{6}Ma^2$.

Los otros dos autovalores son iguales ($\lambda_2 = \lambda_3 = 11\mu$), así que sólo hay un caso más a considerar. Con $\lambda = 11\mu$, la ecuación de autovalores (10.70) resulta ser

$$(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{1})\boldsymbol{\omega} = \mu \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Esto da tres ecuaciones para las componentes de $\boldsymbol{\omega}$, pero todas ellas son realmente la misma ecuación, a saber

$$\omega_x + \omega_y + \omega_z = 0. \tag{10.78}$$

Esta ecuación no determina exclusivamente la dirección de $\boldsymbol{\omega}$. Para ver lo que implica, observe que $\omega_x + \omega_y + \omega_z$ se puede ver como el producto escalar de $\boldsymbol{\omega}$ con

el vector $(1,1,1)$. Por consiguiente la ecuación (10.78) quiere decir simplemente que $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$; esto es, $\boldsymbol{\omega}$ sólo necesita ser ortogonal a nuestro eje principal $\mathbf{e}_1$. En otras palabras, cualesquiera dos direcciones $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ que sean perpendiculares a $\mathbf{e}_1$ servirán como los otros dos ejes principales, ambas con momento de inercia $\lambda_2 = \lambda_3 = 11\mu = \frac{11}{12}Ma^2$. Esta libertad en elegir los dos últimos ejes principales está directamente relacionada con la circunstancia de que los dos últimos autovalores λ_2 y λ_3 son iguales; cuando los tres autovalores son diferentes, cada uno conduce a una única dirección para el eje principal correspondiente.

Finalmente, si volviéramos a evaluar el tensor de inercia con respecto a los nuevos ejes en las direcciones $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, y $\mathbf{e}_3$, entonces la nueva matriz $\mathbf{I}'$ sería diagonal, con los momentos principales en la diagonal,

$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{12}Ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

Por esta razón el proceso de encontrar los ejes principales de un cuerpo se describe como la **diagonalización del tensor de inercia**.

El último párrafo de este ejemplo ilustra un punto útil: cuando hayamos encontrado los ejes principales de un cuerpo con los momentos principales correspondientes no hay necesidad de volver a evaluar el tensor de inercia con respecto a los nuevos ejes. *Sabemos* que con respecto a los ejes principales está obligado a ser diagonal,

$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \tag{10.79}$$

con los momentos principales λ_1, λ_2 y λ_3 debajo de la diagonal. En general los tres momentos principales serán todos diferentes, en cuyo caso las direcciones de los tres ejes principales están determinadas de manera única y son automáticamente ortogonales (vea el Problema 10.38). Como vimos en el Ejemplo 10.4, puede suceder que dos de los momentos principales sean iguales, en cuyo caso los dos ejes principales correspondientes pueden tener cualquier dirección que sea ortogonal al tercer eje. (Esto es lo que sucedió en el Ejemplo 10.4, y también lo que sucede con cualquier cuerpo que tenga simetría rotacional respecto a un eje que pase por O). Si los tres momentos principales son iguales (como sucede con un cubo o una esfera respecto a su centro) entonces, de hecho, *cualquier* eje es un eje principal. Para ver pruebas de estas afirmaciones sobre la unicidad u otra propiedad de los ejes principales, vea el Problema 10.38.

10.6 Precesión de una peonza sometida a un momento de fuerza débil

Sabemos ya lo suficiente sobre el momento angular de un cuerpo rígido como para comenzar a resolver algunos problemas interesantes. Empezaremos con el fenómeno de la precesión de una peonza que gira sometida a un momento de fuerza débil.

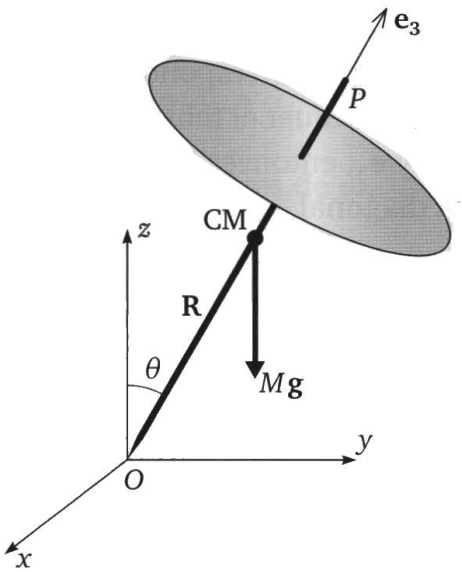


Figura 10.7. Peonza construida con una barra OP que se fija perpendicularmente por el centro de un disco uniforme. La peonza pivota libremente en O. La masa total es M, y $\mathbf{R}$ denota la posición del CM relativa a O. Los ejes principales de la peonza están en las direcciones del vector unitario $\mathbf{e}_3$ en la dirección del eje de simetría de la peonza, y cualesquiera dos vectores unitarios $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ perpendiculares a $\mathbf{e}_3$. La altura de la peonza $M\mathbf{g}$ produce un momento de fuerza, que hace que el momento angular $\mathbf{L}$ cambie.

Consideremos una peonza simétrica como la que se muestra en la Figura 10.7. Los ejes denotados por x, y y z están fijos al suelo con el eje z verticalmente hacia arriba. La peonza está pivotada libremente en su punta O, y forma un ángulo θ con la vertical. Debido a la simetría axial de la peonza, su tensor de inercia es diagonal, con la forma

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \tag{10.80}$$

relativa a los ejes principales de la peonza (a saber, un eje en la dirección de $\mathbf{e}_3$, el eje de simetría, y cualesquiera dos ejes perpendiculares a $\mathbf{e}_3$).

Supongamos primero que se ha despreciado la gravedad y que la peonza está girando en torno a su eje de simetría, con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_3$ y momento angular

$$\mathbf{L} = \lambda_3\boldsymbol{\omega} = \lambda_3\omega\mathbf{e}_3. \tag{10.81}$$

Como no hay momento de fuerza neto sobre la peonza, $\mathbf{L}$ es constante. Por lo tanto, la peonza continuará girando indefinidamente alrededor del mismo eje con la misma velocidad angular.[10]

Supongamos ahora que la gravedad es importante y que origina un momento de fuerza $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{R} \times M\mathbf{g}$, de magnitud $RMg \operatorname{sen}\theta$ y una dirección que es perpendicular al eje z vertical y al eje de la peonza. Supongamos incluso que este momento de fuerza es pequeño. (Podemos asegurar esto estableciendo que cualquiera de los parámetros R, M y g, o todos, son pequeños comparados con los otros parámetros relevantes del sistema). La existencia de un momento de fuerza implica que el momento angular comienza a cambiar, porque $\boldsymbol{\Gamma} = \dot{\mathbf{L}}$.

El cambio de $\mathbf{L}$ implica que $\boldsymbol{\omega}$ comienza a cambiar y que las componentes ω_1 y ω_2 dejan de ser cero. Sin embargo, teniendo en cuenta que el momento angular es pequeño, podemos esperar que ω_1 y ω_2 permanezcan pequeños.[11] Esto significa que la ecuación (10.81) sigue siendo una buena aproximación. (Esto es, la contribución principal a $\mathbf{L}$ continúa siendo el giro en torno a $\mathbf{e}_3$). En este enfoque, el momento de fuerza $\boldsymbol{\Gamma}$ es perpendicular a $\mathbf{L}$ (porque $\boldsymbol{\Gamma}$ es perpendicular a $\mathbf{e}_3$), lo cual significa que $\mathbf{L}$ cambia de dirección pero no de magnitud. De (10.81) vemos que $\mathbf{e}_3$ comienza a cambiar de dirección, mientras que ω permanece constante. Específicamente, la ecuación $\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\Gamma}$ se convierte en

$$\lambda_3 \omega \dot{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{R} \times M\mathbf{g}$$

o, sustituyendo $\mathbf{R} = R\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$ (donde $\hat{\mathbf{z}}$ es el vector unitario que apunta verticalmente hacia arriba),

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \frac{MgR}{\lambda_3 \omega} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_3 \tag{10.82}$$

donde

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{MgR}{\lambda_3 \omega} \hat{\mathbf{z}}. \tag{10.83}$$

Podemos entender que (10.82) expresa que el eje de la peonza, $\mathbf{e}_3$, rota con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ en torno a la dirección vertical $\hat{\mathbf{z}}$.

Nuestra conclusión es que el momento de fuerza ejercido por la gravedad hace que el eje de la peonza tenga una *precesión*, esto es, que se mueva lentamente alrede-

---

[10] En realidad, que la velocidad angular permanezca constante no es completamente obvio. Sin embargo, lo probaremos más tarde; así que, por favor, por ahora acéptelo como una afirmación razonable.

[11] Una vez más, este enunciado plausible debería ser (y será) probado, pero aceptémoslo por el momento.

dor de un cono vertical, con ángulo fijo θ y con frecuencia angular $\Omega = RMg/\lambda_3\omega$.[12] Esta precesión, aunque sorprendente a primera vista, puede entenderse en términos elementales: a partir de la Figura 10.7, el momento de fuerza gravitatorio se produce en el sentido de las agujas del reloj, y el vector momento de fuerza $\boldsymbol{\Gamma}$ está dirigido hacia la página. Como $\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\Gamma}$, es necesario que el cambio en $\mathbf{L}$ sea hacia la página, la cual es exactamente la dirección de la precesión predicha.

Esta precesión del eje de un cuerpo que gira es un efecto que seguramente se haya observado si de niño se ha jugado con una peonza. El mismo efecto aparece en varias otras situaciones. Por ejemplo, la Tierra gira sobre su eje, de manera muy parecida a como lo hace una peonza, y el eje de giro está inclinado un ángulo $\theta = 23°$ con respecto a la normal a la órbita de la Tierra alrededor del Sol. Debido al ensanchamiento ecuatorial de la Tierra, el Sol y la Luna ejercen un pequeño momento de fuerza sobre la Tierra y estos momentos hacen que el eje de la Tierra tenga una lenta precesión (un giro completo en 26 000 años), trazando un cono de ángulo-mitad 23° alrededor de la normal al plano de la órbita (un fenómeno conocido como la **precesión de los equinoccios**). Esto significa que en otros 13 000 años la estrella polar estará unos 46° alejada del norte.

10.7 Ecuaciones de Euler

Ya estamos preparados para establecer las ecuaciones de movimiento (o al menos una forma de las ecuaciones de movimiento) para un cuerpo rígido que rota. Las dos situaciones a las que aplicará principalmente nuestra discusión son estas: (1) un cuerpo que está pivotando sobre un punto fijo, como la peonza de la Sección 10.6, y (2) un cuerpo sin ningún punto fijo, como un bastón lanzado al aire, cuyo movimiento rotacional alrededor del CM queremos examinar. Las ecuaciones que deduciré se denominan ecuaciones de Euler (llamadas así por el mismo matemático nombrado en las ecuaciones de Euler-Lagrange del Capítulo 6) y se pueden concebir como la versión rotacional de la segunda ley de Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Como veremos, hay algunos problemas que pueden resolverse fácilmente usando las ecuaciones de Euler. Sin embargo, muchos problemas se resuelven más fácilmente usando el método lagrangiano, que abordaremos en la Sección 10.10.

Antes de embarcarnos en la deducción de las ecuaciones de Euler, hay una complicación a la que debemos enfrentarnos ahora. Para aprovecharnos de nuestra com-

[12] Debería enfatizar quizás otra vez más que esta discusión es una aproximación, siendo el criterio para su validez que se cumpla $\Omega \ll \omega$. Un análisis exacto muestra que si se lanza la peonza como se describe aquí también realizará pequeñas oscilaciones denominadas nutaciones en la dirección θ, aunque en la práctica éstas se amortiguan rápidamente por el rozamiento.

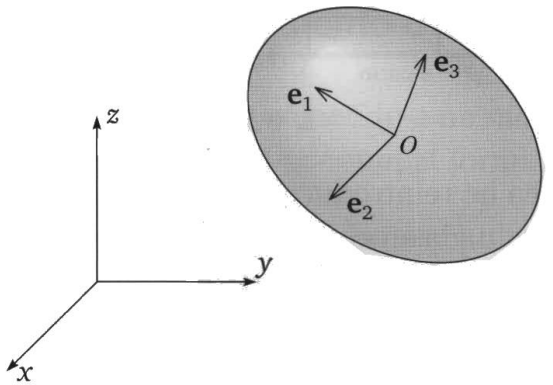


Figura 10.8. Ejes usados para deducir las ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido que rota (mostrado aquí como un huevo). Los ejes denotados por x, y y z definen un sistema inercial, muchas veces llamado *sistema del espacio*. Los vectores unitarios, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ apuntan en las direcciones de los ejes principales del cuerpo y definen el *sistema del cuerpo* en rotación, no inercial. Si el cuerpo no tiene punto fijo (como un huevo lanzado al aire) entonces normalmente se elige que O sea el CM del cuerpo. Si el cuerpo tiene un punto de pivotación fijo, entonces O es ese punto fijo, y elegiríamos generalmente O como el origen de ambos sistemas de referencia.

prensión del tensor de inercia, y particularmente de los ejes principales, querremos usar naturalmente los ejes principales del cuerpo como ejes de coordenadas. Sin embargo, como los ejes principales están asociados al cuerpo que rota, esto nos hará usar inevitablemente esos ejes para la rotción. Necesitaremos usar, por tanto, las herramientas del Capítulo 9 para manejar sistemas de referencia en rotación. La notación que utilizaré se ilustra en la Figura 10.8. Para un sistema inercial, relativo al cual las leyes de Newton se cumplen en su forma simple, usaremos los ejes etiquetados con x, y y z. Este sistema se denomina tradicionalmente **sistema del espacio**, presumiblemente porque está fijo en el espacio; esto es, es inercial. El sistema en rotación está definido por los tres vectores unitarios $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$, fijos en el cuerpo y que apuntan en las direcciones de los ejes principales del cuerpo. Este sistema, fijo en el cuerpo, se denomina **sistema del cuerpo**.

Si la velocidad angular del cuerpo es $\boldsymbol{\omega}$, y los momentos principales del cuerpo son λ_1, λ_2 y λ_3, entonces el momento angular, medido en el sistema del cuerpo, es

$$\mathbf{L} = (\lambda_1\omega_1, \lambda_2\omega_2, \lambda_3\omega_3), \qquad \text{[en el sistema del cuerpo]}. \tag{10.84}$$

Ahora bien, si $\boldsymbol{\Gamma}$ es el momento de fuerza que actúa sobre el cuerpo, sabemos que *visto en el sistema del espacio*

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{espacio}} = \boldsymbol{\Gamma}. \tag{10.85}$$

Vimos en el Capítulo 9 que el ritmo de cambio de cualquier vector visto en los dos sistemas de referencia están relacionados por (9.30)

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{espacio}} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{cuerpo}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$
$$= \dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \tag{10.86}$$

donde en la segunda línea he reintroducido el convenio de que un punto representa una derivada temporal evaluada en el sistema de referencia del cuerpo que rota (cuya velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}$, la velocidad angular del propio cuerpo. Sustituyendo (10.86) en (10.85), llegamos a la ecuación del movimiento para el sistema de referencia del cuerpo en rotación:

$$\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\Gamma}. \tag{10.87}$$

Esta ecuación se denomina **ecuación de Euler**. Usando (10.84), podemos resolver la ecuación de Euler en las tres componentes:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\dot{\omega}_1(\lambda_2-\lambda_3)\omega_2\omega_3 &= \Gamma_1 \\ \lambda_2\dot{\omega}_2-(\lambda_3-\lambda_1)\omega_3\omega_1 &= \Gamma_2 \\ \lambda_3\dot{\omega}_3-(\lambda_1-\lambda_2)\omega_1\omega_2 &= \Gamma_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{[Ecuaciones de Euler]} \tag{10.88}$$

que con frecuencia se denominan ecuaciones de Euler.

Las tres ecuaciones de Euler determinan el movimiento de un cuerpo que gira visto en un sistema fijo al cuerpo. En general, son difíciles de usar porque las componentes Γ_1, Γ_2 y Γ_3 del momento de fuerza aplicado visto en el sistema del cuerpo en rotación son funciones complicadas (y desconocidas) del tiempo. De hecho, la utilidad principal de las ecuaciones de Euler corresponde al caso en el que el momento de fuerza aplicado es cero, como discutiré en la siguiente sección. Sin embargo, existen algunos otros casos donde el momento de fuerza es suficientemente simple y se puede obtener información útil de las ecuaciones de Euler. Por ejemplo, consideremos una vez más la peonza de la Sección 10.6. Como vimos allí, el momento de fuerza gravitatorio sobre la peonza es siempre perpendicular el eje $\mathbf{e}_3$, así que Γ_3 es siempre cero. Aún más, debido a la simetría axial de la peonza, los dos momentos de inercia λ_1 y λ_2 son iguales. Por tanto la tercera de las ecuaciones de Euler (10.88) se reduce a

$$\lambda_3\dot{\omega}_3 = 0.$$

Esto es, la componente de $\boldsymbol{\omega}$ en la dirección del eje de simetría es constante, un resultado que enuncié como razonable, pero que no demostré, en la discusión de la Sección 10.6 anterior.[13]

[13] La otra afirmación no demostrada de aquella discusión (que las componentes ω_1 y ω_2 permanecen pequeñas para todo instante de tiempo) se puede también entender usando las ecua-

10.8 Ecuaciones de Euler con momento de fuerza cero

Consideremos ahora un cuerpo que rota sometido a un momento de fuerza cero. En ese caso, las ecuaciones de Euler (10.88) adoptan la forma simple

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\dot{\omega}_1 &= (\lambda_2-\lambda_3)\omega_2\omega_3 \\ \lambda_2\dot{\omega}_2 &= (\lambda_3-\lambda_1)\omega_3\omega_1 \\ \lambda_3\dot{\omega}_3 &= (\lambda_1-\lambda_2)\omega_1\omega_2 \end{aligned}\right\}. \tag{10.89}$$

Discutiré estas ecuaciones, primero para el caso en que los tres momentos principales λ_1, λ_2 y λ_3 son diferentes, y después para el caso en que $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ (como en una peonza).

Un cuerpo con tres momentos principales diferentes

Supongamos primero que los momentos principales del cuerpo bajo consideración son todos diferentes. Si en un instante $t = 0$ el cuerpo está rotando alrededor de uno de sus ejes principales (pongamos $\mathbf{e}_3$), entonces $\omega_1 = \omega_2 = 0$ en $t = 0$. Ahora bien, con $\omega_1 = \omega_2 = 0$, los segundos miembros de las tres ecuaciones de Euler (10.89) son cero. Esto muestra que siempre que ω_1 y ω_2 son cero, las tres componentes de $\boldsymbol{\omega}$ permanecen constantes. Esto es, ω_1 y ω_2 permanecen cero y ω_3 es constante. En otras palabras, si el cuerpo comienza a rotar en torno a uno de sus ejes principales, continuará haciéndolo, con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Este enunciado se cumple, en primera instancia, para la velocidad angular medida en el sistema del cuerpo en rotación. Sin embargo, con $\boldsymbol{\omega}$ en la dirección de $\mathbf{e}_3$, el momento angular es $\mathbf{L} = \lambda_3\boldsymbol{\omega}$, y sabemos que $\mathbf{L}$ es constante vista en cualquier sistema inercial. Por tanto nuestro resultado sirve de la misma manera para cualquier sistema inercial: si un cuerpo que no está sometido a ningún momento de fuerza está girando en torno a cualquier eje principal, lo continuará haciendo indefinidamente con velocidad angular constante.

El recíproco de este resultado es también cierto. Si en $t = 0$, la velocidad angular *no* tiene la dirección de un eje principal, entonces $\boldsymbol{\omega}$ no es constante. Para ver esto, advierta primero que si $\boldsymbol{\omega}$ no está en la dirección de un eje principal, entonces al menos dos de sus componentes son distintas de cero. Si observamos las ecuaciones de Euler (10.89) veremos que, con dos componentes de $\boldsymbol{\omega}$ distintas de cero, al menos una componente de $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ debe ser distinta de cero. (Por ejemplo, si ω_1 y ω_2 son

---

ciones de Euler. Las componentes Γ_1 y Γ_2 del momento de fuerza son distintas de cero, que es lo que conduce a ω_1 y ω_2. No obstante, son ambas pequeñas y *oscilan rápidamente* cuando la peonza gira. Es razonablemente fácil de ver que, en estas condiciones, las dos primeras ecuaciones de Euler (10.88) implican que ω_1 y ω_2 también oscilan rápidamente y con *amplitud pequeña*. Ese es el resultado requerido.

distintas de cero, entonces $\dot{\omega}_3 \neq 0$). Por tanto, con dos de sus componentes distintas de cero, $\boldsymbol{\omega}$ no puede ser constante.

Concluimos que la única manera en la que un cuerpo con tres momentos principales diferentes puede rotar libremente con velocidad angular constante es rotando en torno a uno de sus ejes principales. Es interesante conocer si este tipo de rotación es estable. Es decir, si un cuerpo está rotando en torno a uno de sus ejes principales y se le da un pequeño empujón, ¿continuará rotando cerca de su eje original, o cambiará su movimiento completamente? Supongamos que el cuerpo está rotando sobre el eje $\mathbf{e}_3$, con $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Si ahora le damos un toque diminuto, entonces ω_1 y ω_2 tomarán valores distintos de cero que son, al menos inicialmente, pequeños. La cuestión es si los valores de ω_1 y ω_2 permanecerán pequeños o comenzarán a crecer. Para resolverla observamos que por la tercera de las ecuaciones de Euler (10.89) siempre que ω_1 y ω_2 sean pequeños, $\dot{\omega}_3$ permanece muy pequeño («pequeño × pequeño»). Por consiguiente inicialmente, al menos, es una buena aproximación tomar ω_3 como constante. En este caso, las dos primeras ecuaciones de Euler serían

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\dot{\omega}_1 &= [(\lambda_2-\lambda_3)\omega_3]\,\omega_2 \\ \lambda_2\dot{\omega}_2 &= [(\lambda_3-\lambda_1)\omega_3]\,\omega_1 \end{aligned}\right\} \tag{10.90}$$

donde los coeficientes entre corchetes son (aproximadamente) constantes. Estas ecuaciones acopladas de primer orden para ω_1 y ω_2 se resuelven fácilmente. Quizá el método más sencillo es derivar la primera ecuación una vez y después sustituir en la segunda, para obtener

$$\ddot{\omega}_1 = -\left[\frac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2}\omega_3^2\right]\omega_1\,. \tag{10.91}$$

Si el coeficiente entre corchetes es positivo, la solución para ω_1 es una función seno o coseno del tiempo, y ω_1 realiza pequeñas oscilaciones, volviendo una y otra vez a cero. Según la primera ecuación de (10.90), ω_2 es proporcional a $\dot{\omega}_1$, así que, bajo las mismas condiciones, ω_2 realiza oscilaciones pequeñas similares. Para ver lo que implican estas condiciones, advierta que el coeficiente en (10.91) es positivo si λ_3 es mayor que ambos λ_1 y λ_2 o menor que ambos λ_1 y λ_2. Por tanto, hemos mostrado que si el cuerpo está girando en torno cualquiera de los ejes principales, aquel con momento más grande o aquel con momento más pequeño, el movimiento es estable frente a pequeñas perturbaciones.

Por otro lado, si λ_3 está entre λ_1 y λ_2, el coeficiente entre paréntesis en (10.91) es negativo, y la solución para ω_1 es una exponencial real, que se aleja rápidamente de cero.[14] Como $\omega_2 \propto \dot{\omega}_1$, lo mismo es cierto de ω_2, y llegamos a la siguiente con-

[14] Hay una pequeña sutileza que merece la pena mencionar: la solución para ω_1 es una combinación de dos exponenciales, $e^{\pm\alpha t}$, y quizá se pueda pensar que el caso especial de una exponencial

clusión: para un cuerpo que gira libremente, la rotación en torno al eje principal con el momento intermedio (λ_3 menor que λ_1 pero mayor que λ_2 o viceversa) es inestable. Se puede probar esta interesante afirmación con un libro que se mantiene cerrado con una cinta de goma. Si lo lanzamos hacia arriba dándole un giro en torno a su eje mayor o su eje menor, continuará girando de manera estable en torno a ese eje. Si le damos un giro en torno al eje intermedio, bamboleará ampliamente (y será mucho más difícil de volver a agarrarlo en el aire).

Movimiento de un cuerpo con dos momentos iguales: precesión libre

La solución completa de las ecuaciones de Euler (10.89) para un cuerpo que rota libremente con tres momentos principales diferentes es posible, pero complicada y no muy esclarecedora. Si dos de los tres momentos principales son iguales (como el caso de una peonza), el problema correspondiente es mucho más fácil y bastante interesante. Consideremos, entonces, este caso, y supongamos que los dos primeros momentos son iguales, $\lambda_1 = \lambda_2$. La característica simplificadora crucial de este caso es que la tercera de las ecuaciones de Euler (10.89) se convierte en

$$\dot{\omega}_3 = 0.$$

Esto es, ω_3, la tercera componente de la velocidad angular (medida en el sistema del cuerpo), es constante,

$$\omega_3 = \text{constante}.$$

Sabiendo que ω_3 es constante, podemos reescribir las dos primeras ecuaciones de Euler de otra manera:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)\omega_3}{\lambda_1}\omega_2 = \Omega_b \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= -\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)\omega_3}{\lambda_1}\omega_1 = -\Omega_b \omega_1 \end{aligned}\right\} \tag{10.92}$$

donde he definido la frecuencia constante

$$\Omega_c = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1}\omega_3. \tag{10.93}$$

(El subíndice «c» es por «cuerpo» por razones que veremos en un momento). Las ecuaciones acopladas (10.92) para ω_1 y ω_2 se resuelven fácilmente mediante el

---

decreciente pura, e^{-at}, era una excepción a mi afirmación. Sin embargo, esta solución está excluida por las condiciones iniciales: si al cuerpo se le da un pequeño empujón desde $\omega_1 = 0$, entonces ω_1 y $\dot{\omega}_1$ deben tener el mismo signo, mientras que para la exponencial decreciente pura tienen signos opuestos.

truco ahora familiar de hacer $\omega_1 + i\omega_2 = \eta$, que reduce (10.92) a

$$\dot{\eta} = -i\Omega_c \eta,$$

de donde

$$\eta = \eta_o e^{-i\Omega_c t}.$$

Si elegimos nuestros ejes de tal manera que $\omega_1 = \omega_o$ y $\omega_2 = 0$ en $t = 0$, entonces $\eta_o = \omega_o$ y, tomando las partes real e imaginaria de η, encontramos para la solución completa

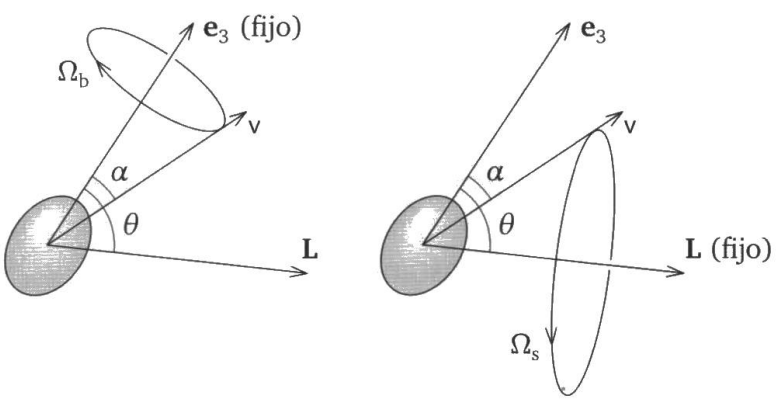
$$\boldsymbol{\omega} = \left(\omega_o \cos \Omega_c t, -\omega_o \operatorname{sen} \Omega_c t, \omega_3\right) \tag{10.94}$$

con ω_o y ω_3 ambos constantes. Las dos componentes ω_1 y ω_2 rotan con velocidad angular Ω_c, mientras que ω_3 permanece constante. Como ω_o y ω_3 son constantes, también lo es el ángulo α entre $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{e}_3$. Por tanto, vista en el sistema del cuerpo, $\boldsymbol{\omega}$ se mueve continuamente alrededor de un cono, denominado **cono cuerpo** con frecuencia angular Ω_c dada por (10.93), indicada en la Figura 10.9(a).

El momento angular $\mathbf{L}$ está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\lambda_1 \omega_1, \lambda_1 \omega_2, \lambda_3 \omega_3) \\ &= (\lambda_1 \omega_o \cos \Omega t, -\lambda_1 \omega_o \operatorname{sen} \Omega t, \lambda_3 \omega_3). \end{aligned} \tag{10.95}$$

La comparación de (10.94) y (10.95) debería convencernos de que los tres vectores, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{L}$ y $\mathbf{e}_3$ pertenecen a un único plano, con los ángulos entre cualesquiera dos de ellos



(a) Sistema del cuerpo **(b)** Sistema del espacio

Figura 10.9. Un cuerpo con simetría axial (mostrado aquí como un esferoide sólido oblongo o «con forma de huevo») está rotando con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ que difiere en dirección con los ejes principales. **(a)** Vistos en el sistema del cuerpo, ambos $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{L}$ tienen una precesión alrededor del eje de simetría, $\mathbf{e}_3$, con frecuencia angular Ω_b dada por (10.93). **(b)** Visto en el sistema del espacio, $\mathbf{L}$ es fijo, y ambas $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{e}_3$ tienen una precesión alrededor de $\mathbf{L}$ con frecuencia Ω_s dada por (10.96).

siendo constantes en el tiempo. (Hemos mostrado esto en el sistema del cuerpo, pero esto significa que es cierto en cualquier sistema). Por consiguiente, vistos en el sistema del cuerpo, ambos $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{L}$ tienen una precesión alrededor de $\mathbf{e}_3$ al mismo ritmo Ω_c.

Para ver lo que pasa visto en el sistema del espacio, advierta que en cualquier sistema inercial el vector $\mathbf{L}$ es constante. Por lo tanto, visto en el sistema del espacio el plano que contiene a $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{L}$ y $\mathbf{e}_3$ debe rotar alrededor $\mathbf{L}$, y los dos vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{e}_3$ precesan alrededor de $\mathbf{L}$, como se muestra en la Figura 10.9(b). En particular, en el sistema del espacio, $\boldsymbol{\omega}$ traza un cono, denominado **cono espacio**, alrededor del cual rueda el cono cuerpo. Dejo como un ejercicio bastante difícil (Problema 10.46) mostrar que el ritmo de precesión de $\boldsymbol{\omega}$ alrededor del cono espacio se puede expresar de varias maneras, de las cuales la más simple es esta:

$$\Omega_e = \frac{L}{\lambda_1}. \tag{10.96}$$

Observe que la **precesión libre** deducida aquí no tiene nada que ver con ningún momento de fuerza externo sobre el cuerpo que gira. Por el contrario, la hemos deducido para un cuerpo *no* sometido a ningún momento de fuerza externo. Un ejemplo interesante de esta precesión lo proporciona la Tierra. Ya he mencionado que el Sol y la Luna producen un pequeño momento de fuerza sobre el ensanchamiento ecuatorial, y que este momento de fuerza ocasiona la precesión de los equinocios, la precesión del eje polar con un período de 26 000 años. Pero el ensanchamiento ecuatorial también significa que el momento de inercia de la Tierra en torno al eje polar es mayor que los otros momentos principales en aproximadamente una parte entre 300. De acuerdo con (10.93) esto debería implicar una precesión (a menos que la rotación de la Tierra esté *perfectamente* alineada con el eje principal) con frecuencia $\Omega_c = \omega_3/300$. Como ω_3 representa una revolución por día, Ω_c debería corresponder a una revolución cada 300 días. Un diminuto bamboleo del eje polar (de menos de un segundo de arco) fue descubierto por el astrónomo amateur americano Seth Chandler (1846-1913). Este **bamboleo de Chandler** se debe aparentemente a la precesión de cuerpo libre discutida aquí, aunque su período es más parecido a 400 días, supuestamente porque la Tierra no es un cuerpo rígido perfecto.

10.9 Ángulos de Euler*

* *Las secciones marcadas con un asterisco contienen material que es normalmente algo más avanzado y pueden ser omitidas si se va mal de tiempo.*

El problema con las ecuaciones de Euler (10.88) es que se refieren a ejes fijos en el cuerpo, y, excepto en unos pocos problemas muy simples, tales ejes son un poco in-

cómodos para trabajar. Necesitamos encontrar ecuaciones de movimiento relativas a un sistema del espacio que no esté en rotación, pero antes necesitamos un conjunto de coordenadas que especifique la orientación de nuestro cuerpo relativa a tal sistema. Existen varias maneras de hacerlo, todas ellas sorprendentemente pesadas, pero, con mucho, la más popular y útil es una debida a Euler (¡una vez más!), la cual especifica la orientación de un cuerpo rígido mediante los tres *ángulos de Euler*. En muchas aplicaciones, el cuerpo de interés rota alrededor de un punto fijo, y en este caso (el único caso que consideraremos en detalle) naturalmente elegimos el punto fijo en el origen O de ambos ejes, el del espacio y el del cuerpo. Como antes, los vectores de la base del sistema del espacio se llamarán $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$. Para el sistema del cuerpo, usaremos los ejes principales del cuerpo, con direcciones $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$. Si dos de los principales momentos son iguales, los tomaremos como los números 1 y 2, así que $\lambda_1 = \lambda_2$, y nos referiremos a la tercera dirección $\mathbf{e}_3$ como el eje de simetría. Imaginemos el cuerpo orientado inicialmente con sus tres ejes en las direcciones de los ejes del espacio correspondientes ($\mathbf{e}_1$ en la dirección de $\hat{\mathbf{x}}$ y así sucesivamente). Vamos a ver que mediante una secuencia de tres rotaciones, de ángulos θ, ϕ y ψ alrededor de tres ejes diferentes, podemos colocar el cuerpo en cualquier orientación asignada y que los ángulos (θ, ϕ, ψ) especifican una única orientación del cuerpo. En particular, los ángulos θ y ϕ serán justo los ángulos polares del eje $\mathbf{e}_3$ relativos al sistema del espacio.

Paso (a). Comenzando con los ejes del cuerpo alineados con los ejes del espacio, primero rotamos el cuerpo un ángulo ϕ en torno al eje $\hat{\mathbf{z}}$, como se ilustra en el primer sistema de la Figura 10.10. Esto rota los ejes primero y segundo en el plano xy. En particular, el segundo eje del cuerpo apunta ahora en la dirección denotada por $\mathbf{e}_2'$.

Paso (b). Después rotamos el cuerpo un ángulo θ alrededor del nuevo eje $\mathbf{e}_2'$. Esto mueve el eje del cuerpo $\mathbf{e}_3$ a la dirección cuyos ángulos polares son θ y ϕ. Evidentemente nuestros primeros dos pasos pueden traer los ejes del cuerpo $\mathbf{e}_3$ a

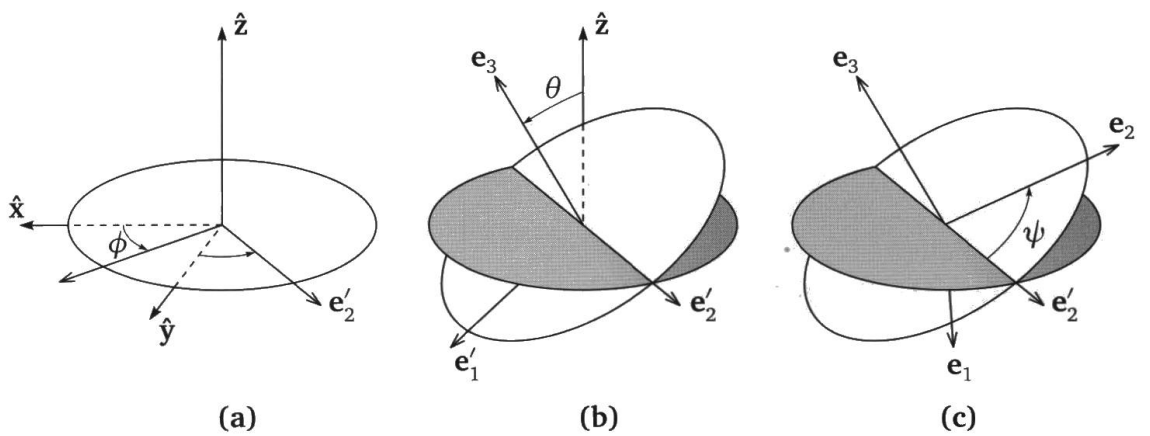


Figura 10.10. Definición de los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ. Comenzando con los ejes del cuerpo $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ y los ejes del espacio $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ alineados, las tres rotaciones sucesivas llevan los ejes del cuerpo a cualquier orientación predeterminada.

cualquier orientación asignada, y, con $\mathbf{e}_3$ en posición, la única libertad que queda es la rotación alrededor de $\mathbf{e}_3$.

Paso (c). Finalmente, rotaremos el cuerpo alrededor de $\mathbf{e}_3$ el ángulo ψ que sea necesario para traer los ejes del cuerpo $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_1$ a sus direcciones asignadas, como se muestra en el tercer sistema de la Figura 10.10.

Los tres ángulos (θ, ϕ, ψ) son los **ángulos de Euler**[15] que especifican la orientación del cuerpo. Antes de que podamos usarlos, debemos calcular unos pocos parámetros en función de ellos, comenzando con la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Para hallar $\boldsymbol{\omega}$, advierta que podemos tratar los pasos de la Figura 10.10 como si definieran una secuencia de cuatro sistemas de referencia, empezando con los ejes del espacio definidos por $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$, y moviéndose a través de dos sistemas intermedios para acabar con los ejes del cuerpo definidos por $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$. Para hallar la velocidad angular de los ejes del cuerpo relativa a los ejes del espacio, sólo tenemos que encontrar la velocidad de cada uno de esos sistemas relativa a su predecesor y formar su suma vectorial. [Recuerde que las velocidades angulares relativas se suman, como observamos en (9.25)]. Cuando ϕ varía, el sistema definido por el paso (a) rota con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_a = \dot{\phi}\hat{\mathbf{z}}$ relativa a los ejes del espacio. Análogamente la velocidad angular del sistema definido por el paso (b) relativa a su predecesor es $\boldsymbol{\omega}_b = \dot{\theta}\mathbf{e}_2'$, y aquella del sistema del cuerpo en el paso (c) es $\boldsymbol{\omega}_c = \dot{\psi}\mathbf{e}_3$. Por tanto, la velocidad angular requerida del cuerpo relativa al sistema del espacio es

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_a + \boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{\omega}_c = \dot{\phi}\hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta}\mathbf{e}_2' + \dot{\psi}\mathbf{e}_3. \tag{10.97}$$

Esto expresa $\boldsymbol{\omega}$ en términos de una mezcla de vectores unitarios un poco desordenada, pero es una tarea sencilla reescribirlos en términos de los vectores unitarios de cualquier sistema (Problema 10.48).

Para hallar el momento angular o la energía cinética, necesitamos en general encontrar las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ relativas a los ejes principales $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$. No obstante, si nos basta con considerar el caso simétrico en que $\lambda_1 = \lambda_2$, ni siquiera tenemos que hacer esto. La idea es que con $\lambda_1 = \lambda_2$ cualesquiera dos ejes perpendiculares en el plano de $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son también ejes principales. Por consiguiente, en lugar de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ podemos usar los ejes $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$ y $\mathbf{e}_3$ donde $\mathbf{e}_1'$ y $\mathbf{e}_2'$ se muestran ambos en el segundo sistema de la Figura 10.10. Esta elección tiene la ventaja de que los dos últimos términos en (10.97) no necesitan conversión y, como (tal y como se debería comprobar)

$$\hat{\mathbf{z}} = (\cos\theta)\mathbf{e}_3 - (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{e}_1', \tag{10.98}$$

---

[15] Es necesario estar alerta sobre las muchas convenciones diferentes usadas para definir los ángulos de Euler. La convención seguida aquí es la más popular en mecánica cuántica pero no tanto entre los autores de mecánica clásica. Tiene la gran ventaja de que θ y ϕ son precisamente los ángulos polares del eje del cuerpo $\mathbf{e}_3$.

llegamos a que

$$\boldsymbol{\omega} = (-\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta)\mathbf{e}_1' + \dot{\theta}\mathbf{e}_2' + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\mathbf{e}_3. \tag{10.99}$$

Conociendo la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a un conjunto de ejes principales, podemos escribir inmediatamente el momento angular $\mathbf{L}$ y la energía cinética T. El momento angular es $\mathbf{L} = (\lambda_1\omega_1, \lambda_2\omega_2, \lambda_3\omega_3)$ (respecto a cualquier conjunto de ejes principales). Por consiguiente en nuestro caso

$$\mathbf{L} = (-\lambda_1\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta)\mathbf{e}_1' + \lambda_1\dot{\theta}\mathbf{e}_2' + \lambda_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\mathbf{e}_3. \tag{10.100}$$

Para futuras referencias, advierta que la componente de $\mathbf{L}$ en la dirección del eje del cuerpo $\mathbf{e}_3$ es justo

$$L_3 = \lambda_3\omega_3 = \lambda_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta). \tag{10.101}$$

También, como se puede comprobar (Problema 10.49), la componente en la dirección del eje del espacio $\hat{\mathbf{z}}$ es

$$L_z = \lambda_1\dot{\phi}\,\mathrm{sen}^2\,\theta + \lambda_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta \tag{10.102}$$

$$= \lambda_1\dot{\phi}\,\mathrm{sen}^2\,\theta + L_3\cos\theta \tag{10.103}$$

donde en la segunda línea he usado (10.101). También para referencia futura, advierta que podemos resolver (10.103) para $\dot{\phi}$ en términos de θ, L_z y L_3:

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - L_3\cos\theta}{\lambda_1\,\mathrm{sen}^2\,\theta}. \tag{10.104}$$

Vimos en (10.68) que la energía cinética es $T = \frac{1}{2}(\lambda_1\omega_1^2 + \lambda_2\omega_2^2 + \lambda_3\omega_3^2)$. Por tanto, para un cuerpo cuyos dos primeros momentos principales son iguales, (10.99) da

$$T = \tfrac{1}{2}\lambda_1(\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2}\lambda_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2. \tag{10.105}$$

Usaremos este resultado a continuación para escribir el lagrangiano para un peonza.

10.10 Movimiento de una peonza*

Ecuaciones de Lagrange

Para ilustrar el uso de los ángulos de Euler, volvamos a la peonza simétrica discutida en la Sección 10.6, como se muestra en la Figura 10.7. La manera más fácil de resolver el movimiento de este sistema es usar el enfoque lagrangiano, así que comenzaremos por escribir el lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$. La energía cinética está dada por (10.105), mientras que la energía potencial es $U = MgR\cos\theta$. Por tanto el lagrangiano de la peonza es

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\lambda_1(\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2}\lambda_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - MgR\cos\theta. \tag{10.106}$$

Con tres coordenadas generalizadas, hay tres ecuaciones de Lagrange. La ecuación de θ es

$$\lambda_1\ddot{\theta} = \lambda_1\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - \lambda_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + MgR\,\mathrm{sen}\,\theta. \qquad [\text{ecuación } \theta]. \tag{10.107}$$

Las ecuaciones de ϕ y ψ son más fáciles porque ni ϕ ni ψ aparece en $\mathcal{L}$, de tal manera que ϕ y ψ son ambos ignorables, y los momentos generalizados correspondientes son constantes. Para p_ϕ esto da

$$p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \lambda_1\dot{\phi}\,\mathrm{sen}^2\,\theta + \lambda_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta = \text{constante}. \qquad [\text{ecuación } \phi]. \tag{10.108}$$

Comparando con (10.102), vemos que el momento generalizado p_ϕ es justo la componente z, L_z del momento angular, y la constancia de p_ϕ es justo un enunciado de que L_z se conserva (un resultado que podíamos haber anticipado porque no hay ningún momento de fuerza alrededor del eje z. Análogamente, para p_ψ obtenemos

$$p_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = \lambda_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = \text{constante}. \qquad [\text{ecuación } \psi]. \tag{10.109}$$

Comparando esto con (10.101), vemos que p_ψ es la componente de $\mathbf{L}$ en la dirección del eje de simetría del cuerpo $\mathbf{e}_3$, y la constancia de p_ψ nos dice que L_3 se conserva. Una consecuencia importante es que, como $L_3 = \lambda_3\omega_3$, la componente ω_3 de la velocidad angular es también constante (un resultado que ya probamos al final de la Sección 10.7 usando las ecuaciones de Euler).

Precesión continua

Como una primera aplicación de las ecuaciones de Lagrange, investiguemos si la peonza puede exhibir una precesión en la cual el eje de la peonza se mueva alrededor

del eje z describiendo un cono con ángulo constante θ. De (10.104) vemos que si θ es constante, entonces también lo es $\dot{\phi}$. Esto es, si el eje de la peonza se mueve alrededor de un cono de ángulo fijo θ, lo tiene que hacer a una velocidad angular constante, digamos $\dot{\phi} = \Omega$. Observando después la ecuación de ψ (10.109), vemos que, con $\dot{\phi}$ y θ fijos, $\dot{\psi}$ debe ser también constante.

El ritmo Ω al que precesa la peonza está determinado por la ecuación de θ (10.107). Si θ es constante, el primer miembro es cero, y sustituyendo $\dot{\phi}$ por Ω, y $(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)$ por la ω_3, vemos que Ω debe cumplir

$$\lambda_1 \Omega^2 \cos\theta - \lambda_3 \omega_3 \Omega + MgR = 0. \tag{10.110}$$

Esta es una ecuación cuadrática para Ω. Por consiguiente, siempre que las raíces sean reales, existen dos diferentes ritmos Ω a los cuales la peonza puede tener una precesión, para una pequeña inclinación θ y un ritmo dado de giro ω_3. Podemos escribir estos dos valores de Ω para cualesquiera valores de los otros parámetros, pero el caso más interesante es cuando la peonza está girando rápidamente y ω_3 es grande. En este caso, es fácil ver que las dos raíces *son* reales y que una raíz es mucho más pequeña que la otra. La raíz pequeña es (Problema 10.53)

$$\Omega \approx \frac{MgR}{\lambda_3 \omega_3}. \tag{10.111}$$

Esta pequeña precesión es precisamente el movimiento predicho en la Sección 10.6 con Ω dado por (10.83).[16]

La segunda raíz, más grande, de (10.110) (una vez más, suponiendo que ω_3 es muy grande) es

$$\Omega \approx \frac{\lambda_3 \omega_3}{\lambda_1 \cos\theta}. \tag{10.112}$$

(Vea el Problema 10.53). Advierta que esta precesión más rápida no depende de g, así que esperaríamos observarla incluso en ausencia de gravedad. De hecho, esta precesión es precisamente la precesión libre predicha en la Sección 10.8 para un cuerpo simétrico que se mueve en ausencia de ningún momento de fuerza. Como se puede comprobar fácilmente, el valor de Ω predicho aquí es exactamente el mismo que lo que se denominó Ω_s en (10.96). (Vea el Problema 10.52).

Nutación

En general, cuando una peonza tiene una precesión alrededor del eje vertical (ϕ cambiando), el ángulo θ varía también. Por consiguiente, cuando el eje oscila alre-

[16] Aquí el denominador tiene un factor ω_3 donde (10.83) tiene ω, pero esta diferencia es irrelevante porque ambas discusiones suponen que ω_3 es muy grande, de tal manera que $\omega_3 \approx \omega$.

dedor de la vertical también se mece arriba y abajo en un movimiento denominado **nutación**, de la palabra latina *nutare* que significa cabecear u oscilar. Podemos investigar la variación de θ usando la ecuación de θ (10.107). El primer paso es usar las ecuaciones de ϕ y de ψ para eliminar las variables $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ en favor de las constantes $p_\phi = L_z$ y $p_\psi = L_3$. Esto proporciona una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para θ, la cual, al menos en principio, se puede resolver para obtener la dependencia temporal de θ.

Para tener una imagen cualitativa del movimiento, un procedimiento más sencillo consiste en observar la energía total, $E = T + U$, con T dado por (10.105) y $U = MgR\cos\theta$. En T, podemos sustituir las variables $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ en favor de las constantes L_z y L_3, y obtenemos (Problema 10.51)

$$E = \tfrac{1}{2}\lambda_1\dot{\theta}^2 + U_{\text{ef}}(\theta) \tag{10.113}$$

donde la energía potencial efectiva $U_{\text{ef}}(\theta)$ es

$$U_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2\lambda_1\,\text{sen}^2\,\theta} + \frac{L_3^2}{2\lambda_3} + MgR\cos\theta. \tag{10.114}$$

La ecuación (10.113) sirve para poner de manifiesto que nuestro problema se ha reducido a un problema unidimensional, involucrando sólo la coordenada θ. Podemos predecir el comportamiento cualitativo de θ observando una gráfica de $U_{\text{ef}}(\theta)$. La coordenada θ va desde 0 hasta π, y, debido al factor de $\text{sen}^2\,\theta$ en el denominador del primer término, $U_{\text{ef}}(\theta)$ tiende a $+\infty$ por los dos lados, $\theta = 0$ y π. No es difícil convencerse a uno mismo de que la gráfica de $U_{\text{ef}}(\theta)$ tiene la forma de «U» mostrada en la Figura 10.11. De (10.113), está claro que $E \geq U_{\text{ef}}(\theta)$, así que θ está confinado entre dos puntos de retorno, θ_1 y θ_2, donde $E = U_{\text{ef}}(\theta)$ como se muestra en la figura. Evidentemente, θ oscila periódicamente, o «nuta» entre θ_1 y θ_2 al mismo tiempo que el eje de la peonza tiene una precesión alrededor de la vertical.

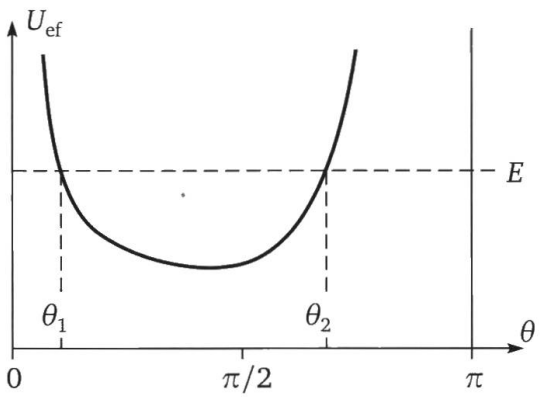


Figura 10.11. Energía potencial efectiva (10.114) que determina la dependencia temporal de θ para la peonza simétrica. Como E no puede ser menor que $U_{\text{ef}}(\theta)$, el movimiento está confinado en el intervalo $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.

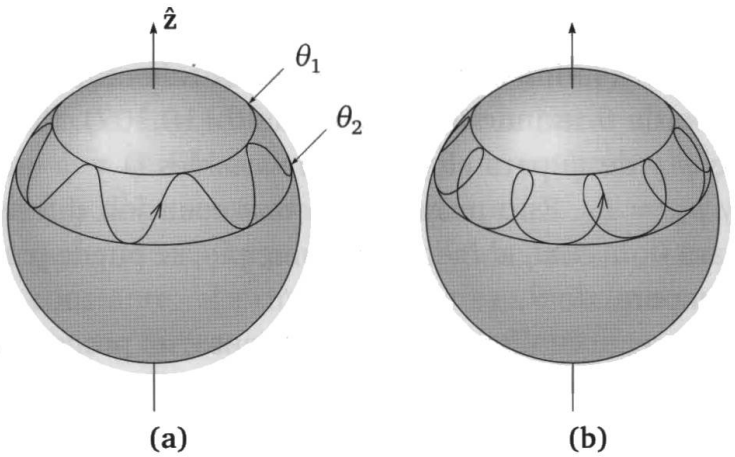


Figura 10.12. Nutación de una peonza. La parte de arriba de una peonza se mueve sobre una esfera centrada en el pivote en la parte de abajo. **(a)** Aquí $\dot{\phi}$ nunca desaparece, y ϕ siempre se mueve a un ritmo constante en una dirección mientras que θ oscila entre θ_1 y θ_2. **(b)** Si $\dot{\phi}$ cambia de signo, entonces ϕ se mueve primero hacia adelante y después hacia atrás mientras θ oscila.

Los detalles del movimiento dependen de cómo varíe ϕ. De acuerdo con (10.104),

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - L_3 \cos\theta}{\lambda_1 \operatorname{sen}^2\theta}, \tag{10.115}$$

que muestra que existen dos posibilidades principales. Si L_z es mayor que L_3 (en magnitud), entonces $\dot{\phi}$ no puede desaparecer. Por consiguiente, aunque $\dot{\phi}$ puede variar, nunca puede cambiar de signo, así que ϕ cambia en la misma dirección todo el tiempo (siempre aumentando o siempre disminuyendo). Por tanto, la peonza tiene una precesión en una única dirección, mientras su ángulo de inclinación θ oscila entre θ_1 y θ_2, produciendo el movimiento esbozado en la Figura 10.12(a). Si L_z es menor que L_3, entonces $\dot{\phi}$ desaparecería a un ángulo θ_0, tal que $L_z - L_3 \cos\theta_0 = 0$. Si este ángulo está fuera del recorrido entre θ_1 y θ_2 para el que el movimiento está confinado, entonces $\dot{\phi}$ todavía no puede desaparecer y el movimiento es todavía como el esbozado en la Figura 10.12(a). Por otro lado, si el ángulo θ_0 está entre θ_1 y θ_2, entonces $\dot{\phi}$ cambiará de signo dos veces en cada oscilación de θ. En este caso, la precesión se mueve primero en una dirección, después en la otra, y el movimiento total es como el esbozado en la Figura 10.12(b).

Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 10

CM y movimientos relativos

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(\text{movimiento del CM}) + \mathbf{L}\ \text{movimiento relativo al CM}). \qquad \text{[Ec. (10.9)]}$$

y

$$T = T\,(\text{movimiento del CM}) + T\,(\text{movimiento relativo al CM}). \qquad \text{[Ec. (10.16)]}$$

El tensor momento de inercia

El momento angular **L** y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de un cuerpo rígido están relacionadas por

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \qquad \text{[Ec.(10.42)]}$$

donde **L** y $\boldsymbol{\omega}$ deben verse como 3×1 columnas e **I** es el 3×3 **tensor momento de inercia**, cuyos elementos de la diagonal y de fuera de la diagonal están definidos como

$$I_{xx} = \sum_\alpha m_\alpha (y_\alpha^2 + z_\alpha^2), \text{etc.} \quad \text{e} \quad I_{xy} = -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha, \text{etc.} \qquad \text{[Ecs. (10.37) y (10.38)]}$$

Ejes principales

Un **eje principal** de un cuerpo (alrededor de un punto O) es cualquier eje que pase por O con la propiedad de que si $\boldsymbol{\omega}$ apunta en la dirección del eje, entonces **L** es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$; esto es,

$$\mathbf{L} = \lambda\boldsymbol{\omega} \qquad \text{[Ec. (10.65)]}$$

para algún número real λ. Para cualquier cuerpo y cualquier punto O, existen tres ejes principales a través de O. [Sección 10.4 y Apéndice]

El tensor de inercia evaluado respecto a sus ejes principales tiene la **forma diagonal**

$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \qquad \text{[Ec. (10.79)]}$$

Ecuaciones de Euler

Si $\dot{\mathbf{L}}$ denota el ritmo de cambio del momento angular de un cuerpo vistos en un sistema fijo en el cuerpo (sistema del cuerpo), entonces cumple **ecuaciones de Euler**

$$\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times L = \Gamma. \qquad \text{[Ecs. (10.87) y (10.88)]}$$

Ángulos de Euler

La orientación de un cuerpo rígido puede ser especificada por los tres **ángulos de Euler** θ, ϕ, ψ definidos en la Figura 10.10. [Secciones 10.9 y 10.10]

El lagrangiano para un cuerpo rígido que gira alrededor de un punto fijo es

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\lambda_1(\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2}\lambda_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - MgR\cos\theta. \qquad \text{[Ec. (10.106)]}$$

Problemas para el Capítulo 10

Los asteriscos indican el nivel aproximado de dificultad, desde los más fáciles (⋆) hasta los más difíciles (⋆ ⋆ ⋆).

Sección 10.1 Propiedades del centro de masa

10.1 ⋆ El resultado (10.7), de que $\sum m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha = 0$, se puede parafrasear diciendo que el vector de posición del CM relativo al CM es cero, y, en esta forma, es casi obvio. Sin embargo, para estar

seguros de entender el resultado, pruébelo despejando $\mathbf{r}'_\alpha$ de (10.4) y sustituyendo en la suma involucrada.

10.2 ⋆ Para ilustrar el resultado (10.18), de que la EC total de un cuerpo es justo el rotacional EC relativo a cualquier punto que está instantáneamente en reposo, hacer lo siguiente: escribir el EC de una rueda uniforme (masa M) que rueda con velocidad v por un camino plano, como la suma de las energías del movimiento del CM y la rotación alrededor del CM. Después escribirla como la energía de la rotación alrededor del punto instantáneo de contacto con el camino y mostrar que se obtiene la misma respuesta. (La energía de la rotación es $\frac{1}{2}I\omega^2$. El momento de inercia de una rueda uniforme en torno a su centro es $I = \frac{1}{2}MR^2$. Que en un punto cerca del borde es $I' = \frac{3}{2}MR^2$).

10.3 ⋆ Cinco masas puntuales iguales están colocadas en las cinco esquinas de una pirámide cuadrada cuya base está centrada en el origen en el plano xy, con lado L, y cuyo vértice está sobre el eje z a una altura H por encima del origen. Encontrar el CM del sistema de cinco masas.

10.4 ⋆⋆ El cálculo de centros de masa o momentos de inercia normalmente implica hacer una integral, más frecuentemente una integral de volumen, y tales integrales se suelen evaluar en coordenadas polares esféricas (que fueron definidas en la Figura 4.16). Probar que

$$\int dV f(\mathbf{r}) = \int r^2 dr \int \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int d\phi\, f(r,\theta,\phi).$$

[Piense sobre el pequeño volumen encerrado entre r y $r+dr$, θ y $\theta+d\theta$, y ϕ y $\phi+d\phi$]. Si la integral de volumen de la izquierda se evalúa sobre todo el espacio, ¿cuáles son los límites de las integrales de la derecha?

10.5 ⋆⋆ Un hemisferio sólido uniforme de radio R tiene su base en el plano xy, con su centro en el origen. Usar el resultado del Problema 10.4 para encontrar el centro de masa. [Comentario: este y los siguientes dos problemas están pensados para reactivar las habilidades del lector a la hora de encontrar centros de masa mediante integración. En todos los casos, se necesitará usar la forma integral de la definición (10.1) del CM. Si la masa está distribuida por el volumen (como aquí), la integral será una integral de volumen $dm = \varrho\, dV$].

10.6 ⋆⋆ **(a)** Encontrar el CM de una concha hemisférica uniforme de radios interior y exterior a y b y masa M. [Ver el comentario al Problema 10.5 y usar el resultado del Problema 10.5]. **(b)** ¿En qué se convierte la respuesta cuando $a = 0$? **(c)** ¿Qué pasa si $b \to a$?

10.7 ⋆⋆ Un cono redondeado se construye cortando de una esfera uniforme de radio R el volumen con $\theta \le \theta_0$, donde θ es el ángulo usual medido desde el eje polar y θ_0 es una constante entre 0 y π. **(a)** Describir este cono y usar el resultado del Problema 10.4 para hallar su volumen. **(b)** Encontrar su CM y comentar los resultados para los casos en que $\theta_0 = \pi$ y $\theta_0 \to 0$.

10.8 ⋆⋆ Una rueda delgada uniforme está apoyada sobre el eje y entre $y = \pm L/2$. Se dobla ahora un arco de un círculo con radio R, dejando el punto central en el origen y tangente al eje y. Hallar el CM. [Ver el comentario al Problema 10.4. En este caso la integral es una integral unidimensional]. Comentar la respuesta para los casos en que $R \to \infty$ y en que $2\pi R = L$.

Sección 10.2 Rotación alrededor de un eje fijo

10.9 ⋆ El momento de inercia de una distribución de masa continua con densidad ϱ se obtiene convirtiendo la suma de (10.25) en la integral de volumen $\int \rho^2\, dm = \int \rho^2 \varrho\, dV$. (Observar las dos formas de la letra griega «rho»: ρ = distancia desde el eje z, ϱ = densidad de masa). Hallar el momento de inercia de un cilindro circular uniforme de radio R y masa M para la rotación alrededor de su eje. Explicar por qué los productos de inercia son cero.

10.10 ⋆ **(a)** Una barra uniforme de masa M y longitud L está apoyada sobre el eje x con un extremo en el origen. Encontrar su momento de inercia para la rotación alrededor del eje z. [Aquí la suma de (10.25) se debe sustituir por una integral de la forma $\int x^2 \mu\, dx$ donde μ es la densidad lineal de masa, masa/longitud]. **(b)** ¿Qué pasa si el centro de la barra está en el origen?

10.11 ⋆⋆ **(a)** Usar el resultado del Problema 10.4 para hallar el momento de inercia de una esfera sólida uniforme (masa M, radio R) para la rotación alrededor de un diámetro. **(b)** Hacer lo mismo para una esfera hueca cuyos radios interior y exterior son a y b. [Una manera ingeniosa de hacer esto es pensar en la esfera hueca como en una esfera sólida de radio b de la cual hemos extraído una esfera de la misma densidad pero de radio a].

10.12 ⋆⋆ Un prisma triangular de masa M, cuyos dos extremos son triángulos equiláteros paralelos al plano xy con lado $2a$, está centrado en el origen con su eje en la dirección del eje z. Hallar su momento de inercia para la rotación alrededor del eje z. Sin hacer ninguna integral, escribir y explicar sus dos productos de inercia para la rotación alrededor del eje z.

10.13 ⋆⋆ Una barra delgada (espesor cero, pero no necesariamente uniforme) está pivotada libremente en un extremo sobre el eje horizontal z, pudiendo oscilar libremente en el plano xy (x horizontal, y verticalmente hacia abajo). Su masa es m, su CM está a una distancia a por debajo del pivote, y su momento de inercia (alrededor del eje z) es I. **(a)** Escribir la ecuación de movimiento $\dot{L}_z = \Gamma_z$ y, suponiendo que el movimiento está confinado a ángulos pequeños (medidos desde la vertical hacia abajo), hallar el período de este péndulo compuesto. («Péndulo compuesto» se utiliza tradicionalmente para designar cualquier péndulo cuya masa está distribuida; en contraste con «péndulo simple», cuya masa está concentrada en un único punto sobre un brazo sin masa). **(b)** ¿Cuál es la longitud del péndulo simple «equivalente», esto es, del péndulo simple con el mismo período?

10.14 ⋆⋆ Una estación espacial estacionaria se puede aproximar como una concha esférica hueca de masa 6 toneladas y radios interior y exterior de 5 m y 6 m. Para cambiar su orientación, una rueda voladora uniforme (radio 10 cm, masa 10 kg) en el centro se acelera rápidamente desde el reposo hasta 1000 rpm. **(a)** ¿Cuánto tiempo tardará la estación en rotar 10 grados? **(b)** ¿Qué energía fue necesaria para realizar toda la operación? [Para hallar el momento de inercia necesario, se puede hacer el Problema 10.11].

10.15 ⋆⋆ **(a)** Escribir la integral (como en el Problema 10.9) para el momento de inercia de un cubo uniforme de lado a y masa M, que rota alrededor de un borde, y mostrar que es igual a $\frac{2}{3}Ma^2$. **(b)** Si balanceo el cubo sobre un borde en equilibrio inestable sobre una mesa rugosa, finalmente perderá el equilibrio y rotará hasta golpear con la mesa. Considerando la energía del cubo, encontrar su velocidad angular justo antes de golpear la mesa. (Suponer que el borde no desliza sobre la mesa).

10.16 ⋆⋆ Hallar el momento de inercia para un cubo uniforme de masa M y borde a como en el Problema 10.15 y después hacer lo siguiente: el cubo está deslizando con velocidad $\mathbf{v}$ a través de una mesa horizontal plana sin rozamiento cuando se da con un escalón recto muy bajo perpendicular a $\mathbf{v}$, y después el borde más bajo de delante queda abruptamente en reposo. **(a)** Considerando las cantidades que se conservan antes, durante y después de la breve colisión, encontrar la velocidad angular del cubo justo después de la colisión. **(b)** Hallar la velocidad mínima v para la cual el cubo rueda por encima después de darse en el escalón.

10.17 ⋆⋆ Escribir la integral para el momento de inercia de un elipsoide uniforme con superficie $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ para la rotación alrededor del eje z. Una manera sencilla de hacer la integral es mediante un cambio de variables a $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ y $\zeta = z/c$. Cada una de las integrales resultantes se puede relacionar con las integrales correspondientes para una esfera (como en el Problema 10.11). Hacer esto. Comprobar la respuesta para el caso $a = b = c$.

10.18 ⋆⋆⋆ Considerar la barra del Problema 10.13. Se golpea la barra bruscamente con una fuerza horizontal F que lleva un impulso $F\,\Delta t = \xi$ una distancia b por debajo del pivote. **(a)** Hallar el momento angular de la barra, es decir, el momento justo después del impulso. **(b)** Hallar el impulso η transmitido al pivote. **(c)** ¿Para qué valor de b (denotado por b_0) es $\eta = 0$? (La distancia b_0 define el llamado «punto suave». Si la barra fuera una raqueta de tenis y el pivote la mano, entonces si la pelota diera en el punto suave, la mano no experimentaría impulso alguno).

Sección 10.3 Rotación alrededor de un eje cualquiera; el tensor de inercia

10.19 ⋆ Verificar que las componentes del vector $\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ están dadas correctamente por la ecuación (10.35). Hacer esto de las dos maneras siguientes: trabajando con componentes y usando la famosa regla $BAC - CAB$, esto es $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$.

10.20 ⋆ Mostrar que el tensor de inercia es aditivo, en este sentido: supongamos que un cuerpo A está compuesto por dos partes B y C. (Por ejemplo, un martillo está hecho de un mango de madera metido en una cabeza de metal). Entonces $\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C$. Análogamente, si A se puede entender como el resultado de separar C de B (como una concha esférica hueca es el resultado de separar una pequeña esfera de dentro de una esfera más grande), entonces $\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_B - \mathbf{I}_C$.

10.21 ⋆⋆ La definición del tensor de inercia en las ecuaciones (10.37) y (10.38) tiene la característica más bien fea de que los elementos de la diagonal y los de fuera de la diagonal están definidos por ecuaciones completamente diferentes. Mostrar que las dos definiciones se pueden combinar en una única ecuación (que está bastante menos desordenada en forma integral)

$$I_{ij} = \int \varrho(r^2\delta_{ij} - r_i r_j)dV$$

donde δ_{ij} es el **símbolo de la delta de Kronecker**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \tag{10.116}$$

10.22 ⋆⋆ Un cuerpo rígido se compone de 8 masas iguales m en las esquinas de un cubo de lado a, sujetas por varillas sin masa. **(a)** Usar las definiciones (10.37) y (10.38) para hallar el tensor momento de inercia $\mathbf{I}$ para la rotación alrededor de una esquina O del cubo. (Usar ejes en las direcciones de los tres bordes que pasan por O). **(b)** Encontrar el tensor de inercia del mismo cuerpo pero para la rotación en torno al centro del cubo. (Usar otra vez ejes paralelos a los bordes). Explicar por qué en este caso se puede esperar que ciertos elementos de $\mathbf{I}$ sean cero.

10.23 ⋆⋆ Consideremos un cuerpo plano rígido o lámina, tal como un trozo plano de plancha de metal, que rota en torno un punto O en el cuerpo. Elegimos los ejes de tal manera que la lámina se apoye sobre el plano xy, cuyos elementos del tensor de inercia $\mathbf{I}$ son automáticamente cero. Probar que $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$.

10.24 ⋆⋆ **(a)** Si $\mathbf{I}^{\text{cm}}$ denota el tensor momento de inercia de un cuerpo rígido (masa M) alrededor de su CM, e $\mathbf{I}$ el tensor correspondiente alrededor de un punto P desplazado del CM por $\boldsymbol{\Delta} = (\xi, \eta, \zeta)$, probar que

$$I_{xx} = I^{\text{cm}}_{xx} + M(\eta^2 + \zeta^2) \qquad \text{e} \qquad I_{yz} = I^{\text{cm}}_{yz} - M\eta\zeta, \tag{10.117}$$

y así sucesivamente. (Estos resultados, que generalizan el teorema del eje paralelo que probablemente se aprendió en una introducción a la física, significan que calcularlo para cualquier otro origen es trivialmente fácil una vez que se conoce el tensor de inercia alrededor del CM). **(b)** Confirmar que los resultados del Ejemplo 10.2 (página 419) cumplen las identidades (10.117) [de tal manera que los cálculos de la parte (a) del ejemplo eran realmente innecesarios].

10.25 ⋆⋆ **(a)** Hallar los nueve elementos del tensor momento de inercia con respecto al CM de un cuboide uniforme (una forma de ladrillo rectangular) cuyos lados son $2a$, $2b$ y $2c$ en las direcciones x, y y z y cuya masa es M. Explicar claramente por qué se podrían escribir los elementos de fuera de la diagonal sin hacer ninguna integración. **(b)** Combinar los resultados de la parte (a) y del Problema 10.24 para hallar el tensor momento de inercia del mismo cuboide con respecto a la esquina A en (a, b, c). **(c)** ¿Cuál es el momento angular alrededor de A si el cuboide está girando con velocidad angular ω alrededor del borde que pasa por A y es paralelo al eje x?

10.26 ⋆⋆ **(a)** Probar que en coordenadas polares cilíndricas una integral de volumen toma la forma

$$\int dV\, f(\mathbf{r}) = \int \rho\, d\rho \int d\phi \int dz\, f(\rho,\phi,z).$$

(b) Mostrar que el momento de inercia de un cono sólido uniforme pivotado en su punta y que rota alrededor de su eje está dado por la integral (10.58); explicar claramente los límites de integración. Mostrar que la integral se evalúa para dar $\frac{3}{10}MR^2$. **(c)** Probar también que $I_{xx} = \frac{3}{20}(R^2+4h^2)$ como en la Ecuación (10.61).

10.27 ⋆⋆⋆ Hallar el tensor de inercia para un cono delgado hueco uniforme, tal como un cono de helado, de masa M, altura h y radio de la base R, que gira alrededor de su extremo en punta.

10.28 ⋆⋆⋆ Encontrar el tensor momento de inercia **I** para el prisma triangular del Problema 10.12. (Si hizo el Problema 10.12, ya se ha hecho la mitad del trabajo). El resultado debería mostrarnos que **I** tiene la forma que encontramos para un cuerpo con simetría axial. Esto sugiere algo que es cierto, que la simetría triple respecto a un eje (simetría bajo rotaciones de 120 grados) es suficiente para asegurar esta forma.

Sección 10.4 Ejes principales de inercia

10.29 ⋆ Probar que si los ejes Ox, Oy y Oz son ejes principales de cierto cuerpo rígido, entonces el tensor de inercia (con respecto a estos ejes) es diagonal con los momentos principales debajo de la diagonal como en (10.66).

10.30 ⋆ Consideremos una lámina, tal como un trozo plano de plancha de metal, que rota alrededor de un punto O en el cuerpo. Probar que el eje a través de O y perpendicular al plano es un eje principal. [*Ayuda*: Ver el Problema 10.23].

10.31 ⋆⋆ Consideremos un cuerpo rígido arbitrario con un eje de simetría rotacional, al que llamaremos $\hat{\mathbf{z}}$. **(a)** Probar que el eje de simetría es un eje principal. **(b)** Probar que cualesquiera dos direcciones $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ perpendiculares a $\hat{\mathbf{z}}$ y entre ellas son también ejes principales. **(c)** Probar que los momentos principales correspondientes a estos dos ejes son iguales: $\lambda_1 = \lambda_2$.

10.32 ⋆⋆ Mostrar que los momentos principales de cualquier cuerpo rígido cumplen $\lambda_3 \le \lambda_1+\lambda_2$. [*Ayuda*: Observar las integrales que definen estos momentos]. En particular, si $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces $\lambda_3 \le 2\lambda_1$. **(b)** ¿Para qué forma de cuerpo es $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$?

10.33 ⋆⋆⋆ He aquí un buen ejercicio de identidades vectoriales y matrices, que conduce a algunos resultados generales importantes: **(a)** Para un cuerpo rígido formado por partículas de masa m_α, que gira alrededor de un eje que pasa por el origen con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, probar que su energía cinética total se puede escribir como

$$T = \tfrac{1}{2}\sum m_\alpha[(\omega r_\alpha)^2 - (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}_\alpha)^2].$$

Recordar que $\mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_\alpha$. Quizá la siguiente identidad vectorial pueda ser útil: para dos vectores cualesquiera **a** y **b**,

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 = a^2b^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2.$$

(Si se usa la identidad, por favor, pruébelo). **(b)** Probar que el momento angular **L** del cuerpo se puede escribir como

$$\mathbf{L} = \sum m_\alpha[\boldsymbol{\omega} {r_\alpha}^2 - \mathbf{r}_\alpha(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}_\alpha)].$$

Para ello se necesitará la famosa regla $BAC - CAB$, que $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$. **(c)** Combinar los resultados de las partes (a) y (b) para demostrar que

$$T = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L} = \tfrac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}.$$

Probar ambas igualdades. La última expresión es un producto matricial; $\boldsymbol{\omega}$ denota la columna 3×1 de números ω_x, ω_y,ω_z, la tilde sobre $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ denota la transpuesta de la matriz (en este caso una fila),

e **I** es el tensor momento de inercia. Este resultado es realmente bastante importante; corresponde al resultado mucho más obvio de que para una partícula, $T = \frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}$. **(d)** Mostrar que respecto a los ejes principales, $T = \frac{1}{2}(\lambda_1\omega_1^2 + \lambda_2\omega_2^2 + \lambda_3\omega_3^2)$, como en la ecuación (10.68)

Sección 10.5 Encontrar los ejes principales; ecuaciones de autovalores

10.34 ⋆ El tensor de inercia **I** para un cubo sólido está dado por (10.72). Verificar que el $\det(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1})$ es como el dado en (10.73).

10.35 ⋆⋆ Un cuerpo rígido consiste en tres masas enganchadas como sigue: m en $(a, 0, 0)$, $2m$ en $(0, a, a)$ y $3m$ en $(0, a, -a)$. **(a)** Encontrar el tensor de inercia **I**. **(b)** Encontrar los momentos principales y un conjunto de ejes principales ortogonales.

10.36 ⋆⋆ Un cuerpo rígido consiste en tres masas iguales (m) fijas en las posiciones $(a, 0, 0)$, $(0, a, 2a)$ y $(0, 2a, a)$. **(a)** Encontrar el tensor de inercia **I**. **(b)** Encontrar los momentos principales y un conjunto de ejes principales ortogonales.

10.37 ⋆⋆⋆ Un triángulo de metal uniforme, delgado y plano, está apoyado sobre el plano xy con sus esquinas en $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, y el origen. Su densidad superficial (masa/área) es $\sigma = 24$. (Distancias y masas están medidas en unidades sin especificar, y el número 24 se ha escogido para hacer que la respuesta aparezca sin mucha dificultad). **(a)** Encontrar el tensor de inercia del triángulo **I**. **(b)** ¿Cuáles son sus momentos principales y los correspondientes ejes?

10.38 ⋆⋆⋆ Supongamos que hemos encontrado tres ejes principales independientes (direcciones $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) y los momentos principales correspondientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de un cuerpo rígido cuyo tensor momento de inercia **I** (no diagonal) hemos calculado. (Se puede suponer, lo cual es realmente bastante fácil de probar, que todas las cantidades involucradas son reales). **(a)** Probar que si $\lambda_i \neq \lambda_j$ entonces sucede automáticamente que $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$. (Puede ayudar introducir una notación que distinga entre vectores y matrices. Por ejemplo, se podría usar un subrayado para indicar una matriz, de tal manera que $\underline{\mathbf{a}}$ es la matriz 3×1 que representa el vector **a**, y el producto escalar vectorial $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ es lo mismo que el producto matricial $\underline{\tilde{\mathbf{a}}}\,\underline{b}$ o $\underline{\tilde{\mathbf{b}}}\,\underline{a}$. Entonces consideremos el número $\underline{\tilde{\mathbf{e}}}_i\underline{\mathbf{I}}\underline{\mathbf{e}}_j$, que puede ser evaluado de dos maneras usando el hecho de que tanto $\mathbf{e}_i$ como $\mathbf{e}_j$ son autovectores de **I**). **(b)** Usar el resultado de la parte (a) para mostrar que si los tres momentos principales son todos diferentes, entonces las direcciones de los tres ejes principales están unívocamente determinadas. **(c)** Probar que si dos de los momentos principales son iguales, $\lambda_1 = \lambda_2$ por ejemplo, entonces cualquier dirección en el plano de $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ es también un eje principal con el mismo momento principal. En otras palabras, cuando $\lambda_1 = \lambda_2$ los ejes principales correspondientes no están determinados unívocamente. **(d)** Probar que si los tres momentos principales son iguales, entonces *cualquier* eje es un eje principal con el mismo momento principal.

Sección 10.6 Precesión de una peonza sometida a un momento de fuerza débil

10.39 ⋆ Consideremos una peonza consistente en un cono uniforme que gira libremente sobre su punta a 1800 rpm. Si su altura es 10 cm y el radio de su base es 2.5 cm, ¿a qué velocidad angular precesará?

Sección 10.7 Ecuaciones de Euler

10.40 ⋆⋆ Un cuerpo rígido está rotando libremente, sometido a un momento de fuerza nulo. Utilizar las ecuaciones de Euler (10.88) para demostrar que la magnitud del momento angular **L** es constante. (Multiplicar la ecuación i-ésima por $L_i = \lambda_i\omega_i$ y sumar las tres ecuaciones). De manera parecida, mostrar que la energía cinética de rotación $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}(\lambda_1\omega_1^2 + \lambda_2\omega_2^2 + \lambda_3\omega_3^2$, como en (10.68), es constante.

10.41 ⋆⋆ Consideremos una lámina que rota en torno a un punto O de la lámina. Usar las ecuaciones de Euler para mostrar que la componente de $\boldsymbol{\omega}$ en el plano de la lámina tiene magnitud constante. [*Ayuda*: Usar los resultados de los Problemas 10.23 y 10.30. De acuerdo con el Problema 10.30, si se elige la dirección $\mathbf{e}_3$ normal al plano de la lámina, $\mathbf{e}_3$ apunta en la dirección de un eje principal. Entonces lo que hay que probar es que la derivada temporal de $\omega_1^2 + \omega_2^2$ es cero].

Sección 10.8 Ecuaciones de Euler con momento de fuerza cero

10.42 ⋆ Tomo un libro de 30 cm × 20 cm × 3 cm y lo mantengo cerrado con una cinta de goma; lo arrojo al aire girando sobre un eje que está cerca del eje de simetría más pequeño a 180 rpm. ¿Cuál es la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones de su eje de rotación? ¿Qué pasa si lo hago girar en torno a un eje cercano al eje de simetría más largo?

10.43 ⋆⋆ Lanzo un disco circular uniforme (piense en un «frisbee») al aire de tal manera que gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ sobre un eje que forma un ángulo α con el eje del disco. **(a)** Mostrar que el módulo de $\boldsymbol{\omega}$ es constante. [Observar la ecuación (10.94)]. **(b)** Mostrar que visto por mi, el eje del disco precesa alrededor de la dirección fija del momento angular con velocidad angular $\Omega_s = \omega\sqrt{4-3\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}$. (Los resultados de los Problemas 10.23 y 10.46 serán útiles).

10.44 ⋆⋆ Una estación espacial axialmente simétrica (ejes principales $\mathbf{e}_3$, y $\lambda_1 = \lambda_2$) está flotando en el espacio libre. Tiene cohetes montados simétricamente sobre ambos lados que están encendidos y ejercen un momento de fuerza constante Γ alrededor del eje de simetría. Resolver las ecuaciones de Euler exactamente para $\boldsymbol{\omega}$ (relativo al eje del cuerpo) y describir el movimiento. En $t = 0$ tomar $\boldsymbol{\omega} = (\omega_{10}, 0, \omega_{30})$.

10.45 ⋆⋆ Debido a la protuberancia ecuatorial de la Tierra, su momento alrededor del eje polar es ligeramente mayor que los otros dos momentos, $\lambda_3 = 1{,}00327\lambda_1$ (pero $\lambda_1 = \lambda_2$). **(a)** Mostrar que la precesión libre descrita en la Sección 10.8 debería tener un período de 305 días. (Como se describe en el texto, el período de este «bamboleo de Chandler» está realmente más cerca de 400 días). **(b)** El ángulo entre el eje polar y $\boldsymbol{\omega}$ está en torno a 0,2 segundo de arco. Usar la Ecuación (10.118) del Problema 10.46 para mostrar que visto desde el sistema del espacio el período de este bamboleo debería ser de un día.

10.46 ⋆⋆⋆ Vimos en la Sección 10.8 que en la precesión libre de un cuerpo con simetría axial los tres vectores $\mathbf{e}_3$ (el eje del cuerpo), $\boldsymbol{\omega}$, y $\mathbf{L}$ están en un plano. Visto en el sistema del cuerpo, $\mathbf{e}_3$ está fijo, y $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{L}$ precesan alrededor de $\mathbf{e}_3$ con velocidad angular $\Omega_c = \omega_3(\lambda_1 - \lambda_3)/\lambda_1$. Visto en el sistema del espacio $\mathbf{L}$ está fijo y $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{e}_3$ precesan alrededor de $\mathbf{L}$ con velocidad angular Ω_e. En este problema se encontrarán tres expresiones equivalentes para Ω_e. **(a)** Argumentar que $\boldsymbol{\Omega}_e = \boldsymbol{\Omega}_c + \boldsymbol{\omega}$. [Recordar que las velocidades angulares relativas se suman como los vectores]. **(b)** Teniendo en mente que $\boldsymbol{\Omega}_c$ es paralelo a $\mathbf{e}_3$ probar que $\Omega_e = \omega\,\mathrm{sen}\,\alpha/\mathrm{sen}\,\theta$ donde α es al ángulo entre $\mathbf{e}_3$ y ω y θ es aquél entre $\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{L}$ (ver la Figura 10.9). **(c)** Después probar que

$$\Omega_e = \omega\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{L}{\lambda_1} = \omega\frac{\sqrt{\lambda_3^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_3^2)\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}}{\lambda_1}. \tag{10.118}$$

10.47 ⋆⋆⋆ Imaginemos que este mundo es perfectamente rígido, uniforme y esférico, y está girando sobre su eje habitual a su ritmo habitual. Una enorme montaña de masa 10^{-8} veces la masa terrestre se añade ahora a colatitud 60°, provocando que la Tierra comience la precesión libre descrita en la Sección 10.8. ¿Cuánto tiempo tardará el Polo Norte (definido como el extremo más al norte del diámetro que está en la dirección $\boldsymbol{\omega}$) en moverse 100 millas desde su posición actual? [Considerar que el radio de la Tierra es de 4000 millas].

Sección 10.9 Ángulos de Euler

10.48 ⋆⋆ La Ecuación (10.97) da la velocidad angular de un cuerpo en términos de una mezcla de vectores unitarios. **(a)** Encontrar $\boldsymbol{\omega}$ en términos de $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$.**(b)** Hacer lo mismo en términos de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$.

10.49 ⋆⋆ Comenzando desde la ecuación (10.100) para $\mathbf{L}$, verificar que L_z está dada correctamente por las ecuaciones (10.102) y (10.103).

10.50 ⋆⋆ La ecuación (10.105) proporciona la energía cinética en términos de los ángulos de Euler para un cuerpo con $\lambda_1 = \lambda_2$. Encontrar la expresión correspondiente para un cuerpo cuyos tres momentos principales son todos diferentes.

Sección 10.10 Movimiento de una peonza

10.51 ⋆ Verificar que la energía de una peonza simétrica se puede escribir como $E = \frac{1}{2}\lambda_1\dot{\theta}^2 + U_{\text{ef}}(\theta)$, donde la energía potencial efectiva es como la dada en (10.114).

10.52 ⋆⋆ Verificar que el ritmo de precesión Ω hallado en (10.112) usando los ángulos de Euler es el mismo que la precesión libre Ω_e hallada en (10.96) usando las ecuaciones de Euler.

10.53 ⋆⋆ En la discusión de la precesión estacionaria de una peonza en la Sección 10.10, los ritmos Ω a los que puede ocurrir la precesión estacionaria estaban determinados por la ecuación cuadrática (10.110). En particular, examinamos esta ecuación para el caso en que ω_3 es muy grande. En este caso se puede escribir la ecuación como $a\Omega^2 + b\Omega + c = 0$ donde b es muy grande. **(a)** Verificar que cuando b es muy grande, las dos soluciones de esta ecuación son aproximadamente $-c/b$ (que es pequeña) y $-b/a$ (que es grande). ¿Qué es lo que conlleva exactamente la condición «b es muy grande»? **(b)** Verificar que éstas proporcionan las dos soluciones requeridas en (10.111) y (10.112).

10.54 ⋆⋆⋆ [Ordenador] La nutación de una peonza está controlada por la energía potencial efectiva (10.114). Hacer una gráfica de $U_{\text{ef}}(\theta)$ como sigue: **(a)** Primero, como el segundo término de $U_{\text{ef}}(\theta)$ es una constante, se puede ignorar. Después, escogiendo adecuadamente las unidades, se puede tomar $MgR = 1 = \lambda_1$. Los parámetros que quedan, L_z y L_3, son genuinamente parámetros independientes. Para concretar, fijar $L_z = 10$ y $L_3 = 8$ y representar $U_{\text{ef}}(\theta)$ como una función de θ. **(b)** Explicar claramente cómo se podría usar la gráfica para determinar el ángulo θ_0 al que la peonza podría tener una precesión estacionaria con θ = constante. Encontrar θ_0 para tres cifras significativas. **(c)** Hallar el ritmo de esta precesión estacionaria, $\Omega = \dot{\phi}$. Como dado por (10.115). Comparar con el valor aproximado de Ω dado por (10.112).

10.55 ⋆⋆⋆ El análisis de la precesión libre de un cuerpo simétrico en la Sección 10.8 estaba basado en las ecuaciones de Euler. Obtener los mismo resultados usando los ángulos de Euler como sigue: como $\mathbf{L}$ es constante se puede también elegir el eje del espacio $\hat{\mathbf{z}}$ de tal manera que $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{z}}$. **(a)** Usar la Ecuación (10.98) para $\hat{\mathbf{z}}$ para escribir $\mathbf{L}$ en términos de los vectores unitarios $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ y $\mathbf{e}_3$. **(b)** Comparando esta expresión con (10.100), obtener tres ecuaciones para $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$. **(c)** Y después mostrar que θ y $\dot{\phi}$ son constantes, y que el ritmo de precesión del eje del cuerpo alrededor del eje del espacio $\hat{\mathbf{z}}$ es $\Omega_s = L/\lambda_1$ como en (10.96). **(d)** Usando (10.99) mostrar que el ángulo entre $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{e}_3$ es constante y que los tres vectores $\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{e}_3$ son siempre coplanares.

10.56 ⋆⋆⋆ Un caso especial importante del movimiento de una peonza simétrica sucede cuando gira alrededor de un eje vertical. Analizar este movimiento como sigue: **(a)** Mediante la inspección de la EP efectiva (10.114), mostrar que si en cualquier instante $\theta = 0$, entonces L_3 y L_z deben ser iguales. **(b)** Hacer $L_z = L_3 = \lambda_3\omega_3$ y después un desarrollo de Taylor de $U_{\text{ef}}(\theta)$ alrededor de $\theta = 0$ hasta términos de orden θ^2. **(c)** Mostrar que se $\omega_3 > \omega_{\min} = 2\sqrt{MgR\lambda_1/\lambda_3^2}$, entonces la posición $\theta = 0$ es estable, pero si $\omega_3 < \omega_{\min}$ es inestable. (En la práctica, el rozamiento frena el giro de la peonza. Por consiguiente con ω_3 suficientemente rápido, la peonza vertical es estable, pero a medida que se frena la peonza finalmente se alejará de la vertical cuando ω_3 alcance a $\omega_{\min}$).

10.57 ⋆⋆⋆ **(a)** Encontrar el lagrangiano para una peonza simétrica cuya punta es libre de deslizarse sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Para coordenadas generalizadas usar los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) más X e Y, donde (X, Y, Z) es la posición del CM relativa a un punto fijo sobre la mesa. (Advertir que la posición vertical Z no es una coordenada independiente, porque $Z = R\cos\theta$). **(b)** Mostrar que el movimiento del CM de (X, Y) se separa completamente del movimiento rotacional. **(c)** Considerar los dos ritmos posibles de precesión estacionaria (10.111) y (10.112) (para θ y ω_3 dados). ¿Cuánto se diferencian en este caso de sus valores correspondientes cuando la punta está sujeta a un pivote fijo?

CAPÍTULO 11

Osciladores acoplados y modos normales

En el Capítulo 5 hemos discutido las oscilaciones de un único cuerpo, tal como una masa sujeta al extremo de un muelle fijo. Me gustaría ahora estudiar las oscilaciones de varios cuerpos, como los átomos que conforman una molécula de, por ejemplo, CO_2, la cual podemos imaginar como un sistema de masas conectadas unas a otras por muelles. Si cada masa estuviera enganchada a un muelle fijo separado, sin conexiones entre ellas, entonces cada una oscilaría independientemente, como se describe en el Capítulo 5, y no habría nada más que decir. Por tanto nuestro interés aquí es un sistema de masas que puedan oscilar y que están conectadas unas con otras de alguna manera: un sistema de **osciladores acoplados**. Un único oscilador tiene una única frecuencia natural, con la que (en ausencia de amortiguamiento o fuerzas exteriores) oscilará para siempre. Veremos que dos o más osciladores acoplados tienen varias frecuencias naturales (o «normales») y que el movimiento general es una combinación de vibraciones para todas las frecuencias naturales diferentes.

Igual que en la teoría de cuerpos en rotación del Capítulo 10, en la teoría de osciladores acoplados es esencial el uso de matrices, y muchas de las ideas que se presentaron en el Capítulo 10 juegan un papel importante aquí. Las aplicaciones más obvias de las ideas de este capítulo tienen que ver con el estudio de moléculas, pero hay muchas otras, entre ellas la acústica, las vibraciones de estructuras como puentes y edificios, y los circuitos electrónicos acoplados.

A lo largo de este capítulo supondré que todas las fuerzas en las que estaremos interesados cumplen la ley de Hooke y por tanto las ecuaciones del movimiento son todas lineales. Este es un caso especial muy importante, con muchas aplicaciones en mecánica y en el resto de la física. Sin embargo, se debe tener en mente que los sistemas discutidos aquí son casos especiales; en el Capítulo 12 veremos cómo el movimiento de osciladores no lineales puede ser bastante más complicado.

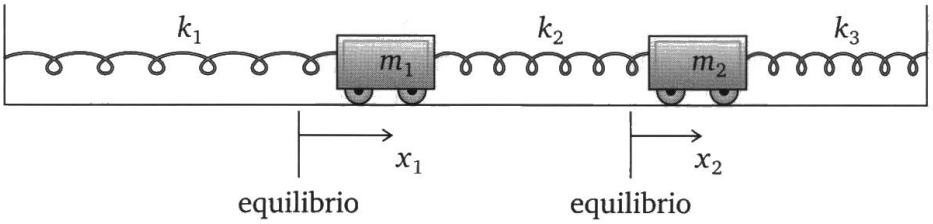


Figura 11.1. Dos vagonetas enganchadas a paredes fijas por los muelles etiquetados k_1 y k_3, y entre ellas por el muelle k_2. Las posiciones de las vagonetas x_1 y x_2 se miden desde sus respectivas posiciones de equilibrio.

11.1 Dos masas y tres muelles

Como primer ejemplo sencillo de osciladores acoplados, consideremos las dos vagonetas mostrados en la Figura 11.1. Las vagonetas se mueven sin rozamiento sobre una pista horizontal, entre dos paredes fijas. Cada una está enganchada a su pared adyacente por un muelle (constantes de fuerza k_1 y k_3), y las vagonetas están enganchadas una a la otra por otro muelle con constante de fuerza k_2. En ausencia del muelle 2, las dos vagonetas oscilarían independientemente una de la otra. Por consiguiente es el muelle 2 el que «acopla» los dos osciladores. De hecho, el muelle 2 hace imposible que ninguna de las dos vagonetas se mueva sin que se mueva también la otra: por ejemplo, si la vagoneta 1 está estacionaria y la vagoneta 2 se mueve, la longitud del muelle cambiará, lo que producirá una fuerza cambiante sobre la vagoneta 1, causando que se mueva también.[1]

Es fácil encontrar las ecuaciones del movimiento para las dos vagonetas, usando o bien la segunda ley de Newton o bien las ecuaciones de Lagrange. En general, las ecuaciones de Lagrange son más fáciles de escribir, pero en el presente caso sencillo, la ley de Newton puede ser un poco más instructiva. Supongamos que las dos vagonetas se han movido las distancias x_1 y x_2 (medidas hacia la derecha) de sus posiciones de equilibrio. El muelle 1 se estira ahora una cantidad x_1 y así ejerce una fuerza k_1x_1 hacia la izquierda sobre la vagoneta 1. El muelle 2 es más complicado porque se ve afectado por las posiciones de ambas vagonetas, pero uno se puede convencer a sí mismo fácilmente de que está estirado una cantidad $x_2 - x_1$ y ejerce una fuerza $k_2(x_2 - x_1)$ hacia la derecha sobre la vagoneta 1. Por consiguiente la fuerza

[1] En la siguiente discusión es más sencillo suponer que cuando las dos vagonetas están en sus posiciones de equilibrio los tres muelles no están ni estirados ni comprimidos. (Sus longitudes son iguales a sus longitudes naturales, sin estirar). No obstante, dependiendo de la distancia entre las dos paredes, podría ser que los tres muelles estén comprimidos o que estén estirados. Afortunadamente, como se puede comprobar fácilmente (Problema 11.1), ninguno de los resultados de las siguientes tres secciones se ve afectado por estas posibilidades.

neta sobre la vagoneta 1 es

$$\begin{aligned}(\text{fuerza neta sobre la vagoneta 1}) &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)\\ &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 \end{aligned} \tag{11.1}$$

donde la segunda línea es sólo para mostrar más claramente la dependencia en las dos variables x_1 y x_2. Se puede hallar la fuerza neta sobre la vagoneta 2 de la misma manera, y las dos ecuaciones del movimiento son

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2\\ m_2\ddot{x}_2 &= k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2. \end{aligned}\right\} \tag{11.2}$$

Antes de intentar resolver estas dos ecuaciones acopladas, advierta que se pueden escribir en forma matricial compacta

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{x}. \tag{11.3}$$

Aquí he introducido la columna matricial (2 × 1) (o «vector columna»)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{11.4}$$

que denota la configuración de nuestro sistema. (Tiene dos elementos porque el sistema tiene dos grados de libertad; para un sistema con n grados de libertad tendría n elementos). También he definido dos matrices cuadradas,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}. \tag{11.5}$$

La «matriz de masa» **M** es (al menos en este caso sencillo) una matriz diagonal, con las masas m_1 y m_2 en la diagonal. La «matriz de las constantes de los muelles» **K** tiene elementos fuera de la diagonal distintos de cero, reflejando que los segundos miembros de las dos ecuaciones (11.2) acoplan x_1 y x_2. Observe que la ecuación matricial (11.3) es una generalización muy natural de la ecuación del movimiento de una única vagoneta sobre un único muelle: con sólo un grado de libertad, las tres matrices **x**, **M** y **K** son sólo matrices (1 × 1), esto es, números ordinarios. La configuración **x** es la posición de la vagoneta x, la matriz de masa **M** es la masa de la vagoneta m, y **K** es la constante del muelle k. Y la ecuación del movimiento (11.3) es justo la familiar $m\ddot{x} = -kx$. Advierta también que ambas matrices **M** y **K** son simétricas, lo cual será cierto de todas las matrices correspondientes en este capítulo. Aunque la simetría de **M** y **K** no juega un papel muy claro en esta discusión, es de hecho una propiedad clave de las matemáticas subyacentes, como veremos en el Apéndice.

Al tratar de resolver la ecuación del movimiento (11.3) podemos razonablemente adivinar que podría haber soluciones en las cuales ambas vagonetas oscilen con la misma frecuencia angular ω; esto es,

$$x_1(t) = \alpha_1 \cos(\omega t - \delta_1) \tag{11.6}$$

y

$$x_2(t) = \alpha_2 \cos(\omega t - \delta_2). \tag{11.7}$$

En cualquier caso, no hay nada que nos impida *intentar* encontrar soluciones de esta forma. (¡Y, de hecho, tendremos éxito!) Si existe una solución de esta forma, entonces ciertamente también habrá una solución de la misma forma pero con los cosenos reemplazados por senos:

$$y_1(t) = \alpha_1 \operatorname{sen}(\omega t - \delta_1)$$

e

$$y_2(t) = \alpha_2 \operatorname{sen}(\omega t - \delta_2)$$

y no hay nada que me impida combinar estas dos soluciones en una única solución compleja

$$z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t) = \alpha_1 e^{i(\omega t - \delta_1)} = \alpha_1 e^{-i\delta_1} e^{i\omega t} = a_1 e^{i\omega t}, \tag{11.8}$$

donde $a_1 = \alpha_1 e^{-i\delta_1}$, y, asimismo,

$$z_2(t) = x_2(t) + iy_2(t) = \alpha_2 e^{i(\omega t - \delta_2)} = \alpha_2 e^{-i\delta_2} e^{i\omega t} = a_2 e^{i\omega t}. \tag{11.9}$$

Este truco de introducir una solución compleja «ficticia» a la ecuación del movimiento es el mismo truco introducido en la Sección 5.5. No estoy, por supuesto, diciendo que estos números complejos representen el movimiento real de las dos vagonetas. El movimiento real está dado por los dos números reales (11.6) y (11.7). Sin embargo, para las elecciones correctas de a_1,a_2 y ω, los dos números complejos (11.8) y (11.9) son (como veremos) soluciones de la ecuación de movimiento, y sus partes reales describen el movimiento real de nuestro sistema. La gran ventaja de los números complejos es que, como se puede ver de los lados derechos de (11.8) y (11.9), ambos tienen la misma dependencia temporal, dada por el factor común $e^{i\omega t}$. Esto nos permite combinar las dos soluciones complejas en una única solución matriz (2×1) de la forma

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \mathbf{a} e^{i\omega t} \tag{11.10}$$

donde la columna **a** es una constante, formada por dos números complejos,

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{-i\delta_1} \\ \alpha_2 e^{-i\delta_2} \end{bmatrix}.$$

Para buscar soluciones de la ecuación del movimiento (11.3), tendremos consecuentemente que intentar buscar soluciones $\mathbf{z}(t)$ de la forma compleja (11.10), teniendo en mente que cuando encontremos tales soluciones el movimiento real $\mathbf{x}(t)$ es igual a la parte real de $\mathbf{z}(t)$,

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{Re}\,\mathbf{z}(t).$$

Cuando sustituimos la forma (11.10) en la Ecuación (11.3), $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, obtenemos la ecuación

$$-\omega^2 \mathbf{M}\mathbf{a}\, e^{i\omega t} = -\mathbf{K}\mathbf{a}\, e^{i\omega t},$$

o, cancelando el factor común exponencial y reordenando,

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{a} = 0. \tag{11.11}$$

Esta ecuación es una generalización de la ecuación de autovalores estudiada en la Sección 10.5. (En la ecuación de autovalores usual, lo que llamamos ω^2 es el autovalor, y donde tenemos la matriz **M** la ecuación de autovalores ordinaria tiene la matriz unitaria **1**). Se puede resolver casi de la misma manera. Si la matriz $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})$ tiene determinante distinto de cero, entonces la única solución de (11.11) es la solución trivial $\mathbf{a} = 0$, que no corresponde con movimiento alguno. Por otro lado, si

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0, \tag{11.12}$$

entonces existe ciertamente una solución no trivial de (11.11) y por consiguiente una solución de las ecuaciones del movimiento con nuestra supuesta forma sinusoidal (11.10). En este caso, las matrices **K** y **M** son matrices (2 × 2), así que la ecuación (11.12) es una ecuación cuadrática para ω^2 y tiene (en general) dos soluciones para ω^2. Esto implica que hay dos frecuencias ω con las que pueden oscilar las vagonetas en movimiento sinusoidal puro como en (11.10) [o, en lugar de eso, (11.6) y (11.7) para el movimiento real mismo].[2]

[2] Como hay dos soluciones para ω^2, se puede pensar que esto daría cuatro soluciones para $\omega = \pm\sqrt{\omega^2}$. Sin embargo, un vistazo a las ecuaciones (11.6) y (11.7) nos convencerá de que $+\omega$ y $-\omega$ constituyen la *misma* frecuencia para el movimiento real.

Las dos frecuencias a las que nuestro sistema puede oscilar sinusoidalmente (estas famosas **frecuencias normales**) están determinadas por la ecuación cuadrática (11.12) para ω^2. Los detalles de esta ecuación dependen de los valores de las tres constantes de los muelles y las dos masas. Mientras que el caso general es totalmente automático, no es especialmente revelador, y discutiré en su lugar dos casos especiales en los que uno puede entender más fácilmente lo que sucede. Comenzaré con el caso en que los muelles son idénticos, y también las dos masas.

11.2 Muelles idénticos y masas iguales

Continuemos examinando las dos vagonetas de la Figura 11.1, pero supongamos ahora que las dos masas son iguales, $m_1 = m_2 = m$, y análogamente las tres constantes de los muelles, $k_1 = k_2 = k_3 = k$. En este caso, las matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{K}$ definidas en (11.5) se reducen a

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}. \tag{11.13}$$

La matriz $(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})$ de la ecuación de autovalores generalizada[3] (11.11) se convierte en

$$(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & 2k-m\omega^2 \end{bmatrix} \tag{11.14}$$

y su determinante es

$$\det(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}) = (2k-m\omega^2)^2 - k^2 = (k-m\omega^2)(3k-m\omega^2).$$

Las dos frecuencias normales están determinadas por la condición de que este determinante sea cero y por lo tanto

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_1 \quad \text{y} \quad \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}} = \omega_2. \tag{11.15}$$

Estas dos frecuencias normales son las frecuencias a las que nuestras dos vagonetas pueden oscilar en movimiento puramente sinusoidal. Advierta que la primera de ellas, ω_1, es precisamente la frecuencia de una única masa m en un único muelle k. Veremos la razón de esta aparente coincidencia en un momento.

[3] De ahora en adelante me referiré a (11.11) como la ecuación de autovalores, omitiendo «generalizada».

La ecuación (11.15) nos dice las dos posibles frecuencias de nuestro sistema, pero no hemos descrito todavía los movimientos correspondientes. Recuerde que el movimiento real está dado por la columna de números reales $\mathbf{x}(t) = \mathrm{Re}\,\mathbf{z}(t)$ donde la columna compleja $\mathbf{z}(t) = \mathbf{a}e^{i\omega t}$, y $\mathbf{a}$ está formada por dos números fijos,

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1, \\ a_2 \end{bmatrix},$$

que deben cumplir la ecuación de autovalores

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{a} = 0. \tag{11.16}$$

Ahora que sabemos las posibles frecuencias normales, debemos resolver esta ecuación para el vector $\mathbf{a}$ para cada frecuencia normal otra vez. El movimiento sinusoidal con cualquiera de las frecuencias normales se denomina **modo normal**. Comenzaré con el primer modo normal.

El primer modo normal

Si elegimos ω igual a la primera frecuencia normal, $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, entonces la matriz $(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})$ de (11.14) se convierte en

$$(\mathbf{K} - \omega_1^2\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}. \tag{11.17}$$

(Advierta que esta matriz tiene determinante 0, como debería). Por lo tanto, para este caso, la ecuación de autovalores (11.16) sería

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

que es equivalente a las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= 0 \\ -a_1 + a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Observe que estas dos ecuaciones son en realidad la misma ecuación, y cualquiera de ellas implica que $a_1 = a_2 = Ae^{-i\delta}$, por ejemplo. La columna compleja $\mathbf{z}(t)$ es por lo tanto

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i\omega_1 t} = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} e^{i(\omega_1 t - \delta)}$$

y el movimiento real correspondiente está dado por la columna real $\mathbf{x}(t) = \mathrm{Re}\,\mathbf{z}(t)$ o

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta).$$

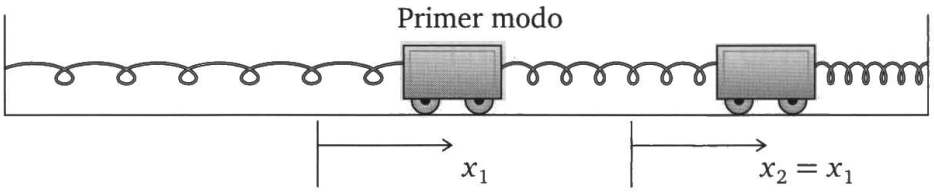


Figura 11.2. El primer modo normal para dos vagonetas de igual masa con tres muelles idénticos. Las dos vagonetas oscilan atrás y adelante con amplitudes iguales y exactamente en fase, de tal manera que $x_1(t) = x_2(t)$, y el muelle central se mantiene en su longitud de equilibrio todo el tiempo.

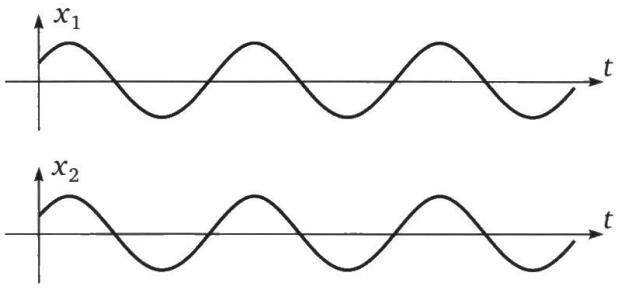


Figura 11.3. En el primer modo, las dos posiciones oscilan sinusoidalmente, con amplitudes iguales y en fase.

Esto es,

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= A\cos(\omega_1 t - \delta) \\ x_2(t) &= A\cos(\omega_1 t - \delta) \end{aligned}\right\} \quad \text{[primer modo normal]}. \tag{11.18}$$

Vemos que en el primer modo normal las dos vagonetas oscilan en fase y con la misma amplitud A, como se muestra en la Figura 11.2.

Una característica importante de la Figura 11.2 es que, como $x_1(t) = x_2(t)$, el muelle central no está ni estirado ni comprimido durante las oscilaciones. Esto significa que, para el primer modo normal, el muelle central es realmente irrelevante, y cada vagoneta oscila justo como si estuviera enganchada a un único muelle. Esto explica por qué la primera frecuencia normal $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ es la misma que para una única vagoneta unida a un único muelle.

Otra manera de ilustrar el movimiento en el primer modo normal es simplemente representar las dos posiciones x_1 y x_2 como funciones de t. Esto se muestra en la Figura 11.3.

El segundo modo normal

La segunda frecuencia normal a la que nuestro sistema puede oscilar sinusoidalmente está dada por (11.15) como $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$, la cual, cuando se sustituye en (11.14), produce

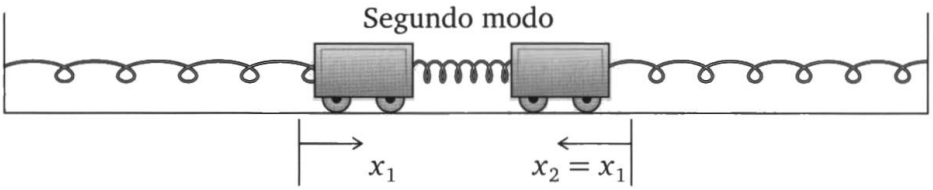


Figura 11.4. El segundo modo normal para dos vagonetas de igual masa con tres muelles idénticos. Las dos vagonetas oscilan atrás y adelante con amplitudes iguales pero exactamente en fase opuesta, así que $x_2(t) = -x_1(t)$ para todos los instantes.

$$(\mathbf{K} - \omega_2^2 \mathbf{M}) = \begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix}. \tag{11.19}$$

Por tanto, para este modo normal, la ecuación de autovalores $(\mathbf{K} - \omega_2^2 \mathbf{M})\mathbf{a} = 0$ implica que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

lo que implica que $a_1 + a_2 = 0$, o $a_1 = -a_2 = Ae^{-i\delta}$, por ejemplo. La columna compleja $\mathbf{z}(t)$ es por ello

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i\omega_2 t} = \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} e^{i(\omega_2 t - \delta)}$$

y el movimiento real correspondiente está dado por la columna real $\mathbf{x}(t) = \text{Re}\,\mathbf{z}(t)$ o

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta).$$

Esto es,

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= A\cos(\omega_2 t - \delta) \\ x_2(t) &= -A\cos(\omega_2 t - \delta) \end{aligned}\right\} \quad \text{[segundo modo normal]}. \tag{11.20}$$

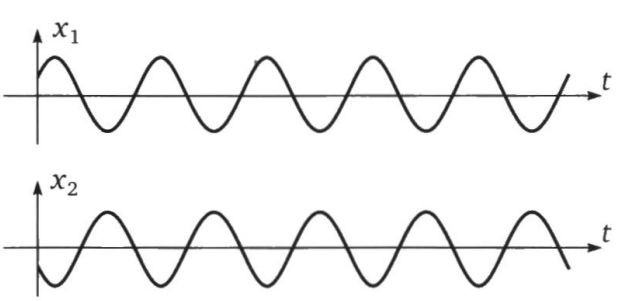


Figura 11.5. En el segundo modo, las dos posiciones oscilan sinusoidalmente, con amplitudes iguales pero exactamente en fase opuesta.

Vemos que en el segundo modo normal las dos vagonetas oscilan con la misma amplitud A pero exactamente en fase opuesta, como se muestra en la imagen de la Figura 11.4 y las gráficas de la Figura 11.5.

Advierta que en el segundo modo normal, cuando la vagoneta 1 es desplazada hacia la derecha, la vagoneta 2 es desplazada una distancia igual hacia la izquierda, y al revés. Esto significa que cuando los dos muelles exteriores se estiran (como en la Figura 11.4), el muelle central se comprime el doble. Por consiguiente, por ejemplo, cuado el muelle de la izquierda está empujando la vagoneta 1 hacia la izquierda, el muelle central está empujando la vagoneta 1, también hacia la izquierda con una fuerza que es el doble de grande. Esto significa que cada vagoneta se mueve como si estuviera enganchada a un único muelle con constante de fuerza $3k$. En particular, la segunda frecuencia normal es $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$.

Solución general

Acabamos de encontrar dos soluciones de modos normales, que podemos reescribir como

$$\mathbf{x}(t) = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{x}(t) = A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2)$$

donde ω_1 y ω_2 son las frecuencias normales (11.15). Estas dos soluciones cumplen la ecuación del movimiento $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ para cualesquiera valores de las cuatro constantes reales A_1, δ_1, A_2 y δ_2. Como la ecuación del movimiento es lineal y homogénea, la suma de estas dos soluciones es también una solución:

$$\mathbf{x}(t) = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2). \tag{11.21}$$

Debido a que la ecuación del movimiento supone en realidad dos ecuaciones diferenciales de segundo orden para las dos variables $x_1(t)$ y $x_2(t)$, su solución general tiene cuatro constantes de integración. Por tanto la solución (11.21), con sus cuatro constates arbitrarias, es de hecho la solución general. *Cualquier* solución se puede escribir en la forma (11.21), con las constantes A_1, A_2, δ_1 y δ_2 determinadas por las condiciones iniciales.

La solución general (11.21) es difícil de visualizar y describir. El movimiento de cada vagoneta es una mezcla de las dos frecuencias, ω_1 y ω_2. Como $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_1$ el movimiento se repite a sí mismo, excepto en el caso especial en que una de las constantes A_1 o A_2 es cero (lo cual da de nuevo uno de los modos normales). La Figura 11.6 muestra gráficas de las dos posiciones en modo normal típico (con $A_1 = 1$, $A_2 = 0{,}7$, $\delta_1 = 0$ y $\delta_2 = \pi/2$). ¡Casi, la única cosa sencilla que uno puede decir sobre estas gráficas es que ciertamente no son muy sencillas!

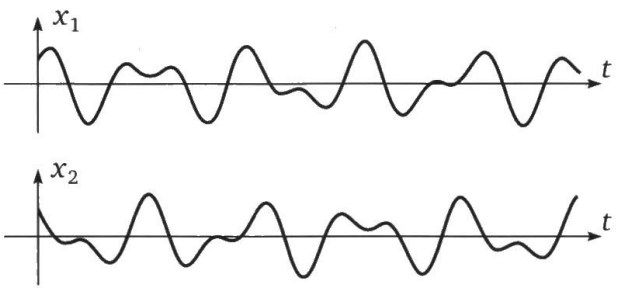


Figura 11.6. En la solución general, tanto $x_1(t)$ como $x_2(t)$ oscilan con *ambas* frecuencias normales, produciendo un movimiento complicado no periódico.

Coordenadas normales

Hemos visto que en cualquier posible movimiento de nuestro sistema de dos vagonetas, ambas coordenadas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ varían con el tiempo. En los modos normales, su dependencia temporal es simple (sinusoidal), pero es también cierto que ambas varían, reflejando que los dos vagonetas están acopladas y que una vagoneta no se puede mover sin la otra. Es posible introducir las llamadas **coordenadas normales** alternativas que, aunque menos transparentes físicamente, tienen la conveniente propiedad de que cada una varía independientemente de la otra. Este enunciado es cierto para cualquier sistema de osciladores acoplados, pero es especialmente fácil de ver en este caso de dos masas iguales unidas por tres muelles idénticos.

En lugar de las coordenadas x_1 y x_2, podemos caracterizar las posiciones de las dos vagonetas por las dos *coordenadas normales*

$$\xi_1 = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \tag{11.22}$$

y

$$\xi_2 = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2) \tag{11.23}$$

El significado físico de las variables originales x_1 y x_2 (como las posiciones de las dos vagonetas) es obviamente más transparente, pero ξ_1 y ξ_2 son mejores para denotar la configuración del sistema. Además, si nos remitimos otra vez a (11.18) para el primer modo normal, veremos que en el primer modo las nuevas variables están dadas por

$$\left.\begin{aligned} \xi_1(t) &= A\cos(\omega_1 t - \delta) \\ \xi_2(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{[primer modo normal]}, \tag{11.24}$$

mientras que en el segundo modo, vemos de (11.20) que

$$\left.\begin{aligned} \xi_1(t) &= 0 \\ \xi_2(t) &= A\cos(\omega_2 t - \delta) \end{aligned}\right\} \quad \text{[segundo modo normal]}. \tag{11.25}$$

En el primer modo normal la nueva variable ξ_1 oscila, pero ξ_2 sigue siendo cero. En el segundo modo sucede justo todo lo contrario. En este sentido, las nuevas coordenadas son independientes (cualquiera de ellas puede oscilar sin necesidad de la otra). El movimiento general de nuestro sistema es una superposición de ambos modos, y en este caso tanto ξ_1 como ξ_2 oscilan, pero ξ_1 oscila a la frecuencia ω_1 solamente, y ξ_2 a la frecuencia ω_2 solamente. En algunos problemas más complicados, estas nuevas coordenadas normales representan una simplificación considerable. (Vea los Problemas 11.9, 11.10 y 11.11 como algunos ejemplos y la Sección 11.7 para una discusión más amplia).

11.3 Dos osciladores débilmente acoplados

En la última sección discutimos las oscilaciones de dos masas iguales unidas por tres muelles iguales. Para este sistema, los dos modos normales eran fáciles de entender y visualizar, pero las oscilaciones no normales no lo eran en absoluto. Un sistema en el que algunas de las oscilaciones no normales se visualizan inmediatamente es un par de osciladores que tienen la misma frecuencia natural y que están *débilmente acoplados*. Como ejemplo de tal sistema, consideremos las dos vagonetas idénticas mostradas en la Figura 11.7, que están enganchadas a sus paredes adyacentes por muelles idénticos (constantes de fuerza k) y entre ellos por un muelle mucho más débil (constante de fuerza $k_2 \ll k$).

Podemos resolver rápidamente para los modos normales de este sistema. La matriz de masa $\mathbf{M}$ es la misma que antes. La matriz del muelle $\mathbf{K}$ y la combinación crucial $(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})$ que determina el problema de autovalores se escriben fácilmente [comenzando con (11.5)para $\mathbf{K}$]:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k+k_2 \end{bmatrix}$$

y

$$(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} k+k_2-m\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k+k_2-m\omega^2 \end{bmatrix}. \tag{11.26}$$

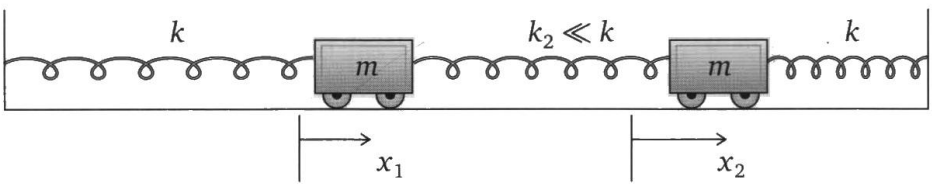


Figura 11.7. Dos vagonetas débilmente acopladas. El muelle central que acopla las dos vagonetas es mucho más débil que los dos muelles exteriores.

El determinante de $(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})$ es $(k-m\omega^2)(k+2k_2-m\omega^2)$, y concluimos que las dos frecuencias normales son

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{y} \qquad \omega_2=\sqrt{\frac{k+2k_2}{m}}. \tag{11.27}$$

La primera frecuencia es exactamente la misma que en el ejemplo anterior, y podemos ver fácilmente el porqué. El movimiento en este primer modo es, como se puede comprobar, el mismo movimiento que el mostrado en la Figura 11.2 para el primer modo del caso del muelle igual. El punto importante es que en este modo las dos vagonetas se mueven juntas de tal manera que el muelle central permanece inalterado y por ello es irrelevante. Naturalmente obtenemos la misma frecuencia para este modo cualquiera que sea la fuerza sobre el muelle central.

En el segundo modo también, el movimiento es el mismo que para el correspondiente modo del ejemplo del muelle igual; a saber, las dos vagonetas oscilan exactamente en fase opuesta, ambas moviéndose hacia adentro o ambas moviéndose hacia fuera, como en la Figura 11.4. Pero en este modo, la fuerza sobre el muelle central es, por supuesto, relevante, y la segunda frecuencia normal ω_2 dada por (11.27) depende de k_2. En el caso que nos ocupa, ω_2 está muy cerca de ω_1, porque $k_2 \ll k$. Para aprovechar esta cercanía, es conveniente definir ω_0 como el promedio de las dos frecuencias normales

$$\omega_0=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}.$$

Como ω_1 y ω_2 están muy cerca una de otra, ω_0 está muy cerca de ambas, y para casi todos los propósitos podemos pensar en ω_0 como esencialmente la misma que $\omega_1=\sqrt{k/m}$. Para mostrar la pequeña diferencia entre ω_1 y ω_2, escribiré

$$\omega_1=\omega_0-\epsilon \qquad \text{y} \qquad \omega_2=\omega_0+\epsilon.$$

Es decir, el número pequeño ϵ es la mitad de la diferencia entre las dos frecuencias normales.

Los dos modos normales de las dos vagonetas débilmente acopladas se pueden escribir ahora como

$$\mathbf{z}(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{i(\omega_0-\epsilon)t} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{z}(t)=C_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{i(\omega_0+\epsilon)t}.$$

Ambos satisfacen la ecuación del movimiento para cualesquiera valores de los dos números complejos C_1 y C_2. (Es conveniente continuar trabajando con las soluciones complejas «ficticias» un rato más). La suma de estas dos soluciones es también una solución,

$$\mathbf{z}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i(\omega_0 - \epsilon)t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i(\omega_0 + \epsilon)t}, \tag{11.28}$$

y, como contiene cuatro constantes reales arbitrarias (las dos constantes complejas C_1 y C_2 son equivalentes a cuatro constantes reales), es la solución general. Las constantes C_1 y C_2 en (11.28) están determinadas por las condiciones iniciales (las posiciones y velocidades de los dos vagonetas en $t = 0$.

Para ver algunas características generales de la solución (11.28), es útil factorizarla como

$$\mathbf{z}(t) = \left\{ C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i\epsilon t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i\epsilon t} \right\} e^{i\omega_0 t}. \tag{11.29}$$

Esto expresa nuestra solución como un producto de dos términos. El término entre llaves, $\{\cdots\}$, es una matriz columna (2×1) que depende de t. Pero como ϵ es muy pequeño, esta columna varía muy lentamente comparada con el segundo factor $e^{i\omega_0 t}$. Durante cualquier intervalo temporal corto, el primer factor es esencialmente constante y nuestra solución se comporta como $\mathbf{z}(t) = \mathbf{a}e^{i\omega_0 t}$, con $\mathbf{a}$ constante. Esto es, durante cualquier intervalo corto de tiempo, los dos vagonetas oscilarán sinusoidalmente con frecuencia angular ω_0. Pero si esperamos el tiempo suficiente, la «constante» $\mathbf{a}$ variará lentamente, y los detalles del movimiento de las dos vagonetas cambiarán. Ilustraré este comportamiento en detalle en un momento.

Examinemos ahora el comportamiento de (11.29) para algunos valores sencillos de las constantes C_1 y C_2. Primero, si alguno de C_1 o C_2 es cero, la solución (11.29) revierte a uno de los modos normales. (Por ejemplo, si $C_1 = 0$, la solución es el segundo modo normal). Un caso más interesante es que C_1 y C_2 sean iguales en magnitud, y, para simplificar la discusión, supondré que C_1 y C_2 son iguales y reales,

$$C_1 = C_2 = A/2,$$

por ejemplo. (El 2 es sólo por una conveniencia futura). En este caso (11.29) se convierte en

$$\mathbf{z}(t) = \frac{A}{2} \begin{bmatrix} e^{-i\epsilon t} + e^{i\epsilon t} \\ e^{-i\epsilon t} - e^{i\epsilon t} \end{bmatrix} e^{i\omega_0 t} = A \begin{bmatrix} \cos \epsilon t \\ -i \operatorname{sen} \epsilon t \end{bmatrix} e^{i\omega_0 t}. \tag{11.30}$$

Para hallar el movimiento real de los dos vagonetas, debemos tomar la parte real de esta matriz, $\mathbf{x}(t) = \operatorname{Re} \mathbf{z}(t)$, cuyos dos elementos son las dos posiciones,

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= A \cos \epsilon t \cos \omega_0 t \\ x_2(t) &= A \operatorname{sen} \epsilon t \operatorname{sen} \omega_0 t. \end{aligned}\right\} \tag{11.31}$$

La solución (11.31) tiene una interpretación sencilla y elegante. Advierta primero que en el instante cero, $x_1 = A$, mientras que $\dot{x}_1 = x_2 = \dot{x}_2 = 0$. Esto es, nuestra

solución describe el movimiento cuando la vagoneta 1 es empujada una distancia A hacia la derecha y liberado en $t = 0$, con la vagoneta 2 estacionaria en su posición de equilibrio. Debido a que ϵ es muy pequeño, existe un intervalo de tiempo apreciable (a saber, $0 \leq t \ll 1/\epsilon$) durante el cual las funciones en (11.31) que incluyen ϵt permanecen esencialmente invariables, esto es, $\cos \epsilon t \approx 1$ y $\operatorname{sen} \epsilon t \approx 0$. Durante este intervalo inicial, las dos posiciones, tal como están dadas por (11.31), son justo

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &\approx A \cos \omega_0 t \\ x_2(t) &\approx 0. \end{aligned}\right\} \qquad [t \approx 0]. \tag{11.32}$$

Inicialmente, la vagoneta 1 oscila con amplitud A y frecuencia ω_0, mientras que la vagoneta 2 permanece estacionaria.

Esta situación sencilla no puede durar para siempre. Tan pronto como la vagoneta 1 empieza a moverse, comienza a flexionar el muelle central débil, que comienza a empujar y tirar de la vagoneta 2. Aunque la fuerza ejercida por el muelle central es débil, finalmente empieza a hacer que la vagoneta 2 oscile. Esta circunstancia se puede ver en (11.31), donde el factor $\operatorname{sen} \epsilon t$ finalmente se hace apreciable, y la vagoneta 2 comienza a oscilar, también a la frecuencia ω_0. Observe que a medida que el factor $\operatorname{sen} \epsilon t$ en $x_2(t)$ aumenta hacia 1, el factor $\cos \epsilon t$ en $x_1(t)$ disminuye hacia cero, como debe ser para mantener la energía total de los dos vagonetas constante. Finalmente, cuando $t = \pi/2\epsilon$, el factor $\operatorname{sen} \epsilon t$ llega a ser 1 (y $\cos \epsilon t$ alcanza el cero), y hay un intervalo en el que[4]

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &\approx 0 \\ x_2(t) &\approx A \operatorname{sen} \omega_0 t. \end{aligned}\right\} \qquad [t \approx \pi/2\epsilon]. \tag{11.33}$$

Ahora que la vagoneta 2 está oscilando a la máxima amplitud y la vagoneta 1 no lo hace en absoluto, la vagoneta 2 comienza a conducir la vagoneta 1. La vagoneta 1 empieza a oscilar con amplitud creciente, y la amplitud de las oscilaciones de la vagoneta 2 empieza a disminuir otra vez. Este proceso, en el que los dos vagonetas se pasan la energía de una a la otra, y viceversa, continúa indefinidamente (o hasta que una fuerza disipativa, que estamos ignorando, haya gastado toda la energía). Esto se ilustra en la Figura 11.8, la cual muestra $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dadas por (11.31) como funciones de t para un par de ciclos de pasar la energía de la vagoneta 1 a la 2 y de nuevo de la vagoneta 2 a la 1.

---

[4] Advierta que podemos interpretar lo que ha pasado en términos de la discusión de la Sección 5.6 sobre la resonancia. El muelle débil ha estado conduciendo la vagoneta 2 a la frecuencia de resonancia ω_0, así que la vagoneta 2 debería haber respondido oscilando $\pi/2$ detrás del conductor. Esto es exactamente lo que vemos de (11.32) y (11.33), porque $\operatorname{sen} \omega_0 t$ está de hecho $\pi/2$ detrás de $\cos \omega_0 t$.

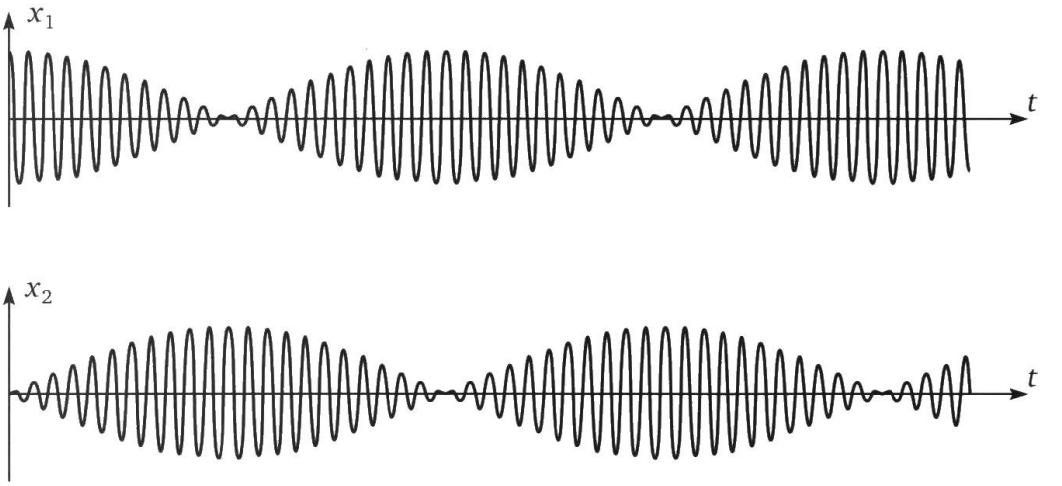


Figura 11.8. Posiciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de dos vagonetas acopladas débilmente cuando la vagoneta 1 es liberada desde el reposo en $x_1 = A > 0$ y la vagoneta 2 en $x_2 = 0$.

Si ha estudiado el fenómeno de las pulsaciones o batidos, habrá advertido ya probablemente la analogía entre ambas gráficas de la Figura 11.8 con una gráfica de pulsaciones. Las pulsaciones o batidos son el resultado de superponer dos ondas (ondas de sonido, por ejemplo) con frecuencias casi iguales. Debido a esta pequeña diferencia, las dos ondas se mueven regularmente en fase y fuera de fase (en cualquier posición). Esto significa que la interferencia resultante de las ondas es alternativamente constructiva y destructiva, y una gráfica de la señal resultante se parece a cualquiera de las gráficas de la Figura 11.8. Para entender qué está pulsando o batiendo en el caso de nuestras dos vagonetas, necesitamos considerar otra vez las dos coordenadas normales de las ecuaciones (11.22) y (11.23), $\xi_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ y $\xi_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$. Para la solución presente (11.31) estas son [recuerde la identidad trigonométrica $\cos\theta\cos\phi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi = \cos(\theta - \phi)$]

$$\left.\begin{aligned} \xi_1(t) &= \tfrac{1}{2}A\cos(\omega_0 - \epsilon)t = \tfrac{1}{2}A\cos\omega_1 t \\ \xi_2(t) &= \tfrac{1}{2}A\cos(\omega_0 + \epsilon)t = \tfrac{1}{2}A\cos\omega_2 t. \end{aligned}\right\} \tag{11.34}$$

Es decir, las dos coordenadas normales oscilan con amplitudes iguales, la primera a la frecuencia ω_1 y la segunda a la frecuencia cercana ω_2. Como $x_1(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)$, vemos que $x_1(t)$ es la superposición de $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$, y el crecimiento y decrecimiento de $x_1(t)$ es el resultado de los impulsos entre estas dos señales de frecuencias casi iguales. Lo mismo se aplica a $x_2(t)$, excepto que, como $x_2(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t)$, los momentos de interferencia *constructiva* para $x_1(t)$ son momentos de interferencia *destructiva* para $x_2(t)$ y viceversa, como se puede ver claramente en la Figura 11.8.

11.4 Método lagrangiano: el péndulo doble

En las últimas tres secciones, el análisis de dos vagonetas que oscilan estaba basado en la segunda ley de Newton. Podríamos haber deducido las ecuaciones del movimiento usando el formalismo lagrangiano, aunque no hay una ventaja particular en hacerlo. Sin embargo, cuando estudiemos sistemas de complejidad cada vez mayor, veremos cómo las ventajas del enfoque lagrangiano rápidamente se hacen abrumadoras. Comenzaré esta sección deduciendo de nuevo las ecuaciones para las dos vagonetas a partir del lagrangiano. Haré entonces lo mismo para otro sistema simple con dos grados de libertad, el péndulo doble. Estos dos ejemplos abrirán el camino hacia la discusión general de la siguiente sección.

Método lagrangiano para dos vagonetas con tres muelles

Consideremos una vez más las dos vagonetas de la Figura 11.1. Podríamos escribir las ecuaciones del movimiento (11.2) de la segunda ley de Newton tan pronto como hubiéramos identificado las fuerzas sobre cada una de las vagonetas. Para hacer lo mismo con las ecuaciones de Lagrange, tenemos primero que escribir las energías cinética y potencial, T y U, y con ello el lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$. La energía cinética es

$$T = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2. \tag{11.35}$$

Para escribir la energía potencial, debemos identificar las extensiones de los tres muelles como x_1, $x_2 - x_1$ y $-x_2$, de lo que se sigue inmediatamente que la energía potencial es

$$\begin{aligned} U &= \tfrac{1}{2}k_1x_1^2 + \tfrac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2 + \tfrac{1}{2}k_3x_2^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)x_1^2 - k_2x_1x_2 + \tfrac{1}{2}(k_2 + k_3)x_2^2. \end{aligned} \tag{11.36}$$

Estos resultados nos proporcionan inmediatamente el lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$ y por consiguiente las dos ecuaciones de Lagrange del movimiento:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \qquad \text{o} \qquad m_1\ddot{x}_1 = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2$$

y

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \qquad \text{o} \qquad m_2\ddot{x}_2 = k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2.$$

Estas son precisamente las dos ecuaciones del movimiento (11.2), las cuales ya reescribimos en la forma matricial compacta como $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$. Esta deducción alternativa de las mismas ecuaciones no tiene ninguna ventaja particular para este sistema

sencillo. He aquí un segundo sistema, que es todavía muy sencillo, pero para el cual el método lagrangiano es ya significativamente más directo que el newtoniano.

El péndulo doble

Consideremos un péndulo doble, formado por una masa m_1 colgada de una barra sin masa de longitud L_1 desde un pivote fijo, y una segunda masa m_2 colgada de una barra sin masa de longitud L_2 desde m_1, como se muestra en la Figura 11.9. Es una tarea fácil escribir el lagrangiano $\mathcal{L}$ como función de las dos coordenadas generalizadas ϕ_1 y ϕ_2 mostradas. Cuando el ángulo ϕ_1 aumenta desde 0, la masa m_1 sube una cantidad $L_1(1-\cos\phi_1)$ y gana una energía potencial

$$U_1 = m_1 g L_1(1-\cos\phi_1).$$

Análogamente, cuando ϕ_2 aumenta desde 0, la segunda masa sube $L_2(1-\cos\phi_2)$ pero, además, su punto de apoyo (m_1) ha subido $L_1(1-\cos\phi_1)$. Por consiguiente

$$U_2 = m_2 g[L_1(1-\cos\phi_1) + L_2(1-\cos\phi_2)].$$

La energía potencial total es por lo tanto

$$U(\phi_1,\phi_2) = (m_1+m_2)gL_1(1-\cos\phi_1) + m_2 g L_2(1-\cos\phi_2). \tag{11.37}$$

La velocidad de m_1 es justo $L_1\dot{\phi}_1$ en la dirección tangencial, como se muestra en la Figura 11.9, así que su energía cinética es

$$T_1 = \tfrac{1}{2}m_1 L_1^2 \dot{\phi}_1^2.$$

La velocidad de m_2 es la suma vectorial de dos velocidades, como he indicado en la Figura 11.9 (la velocidad $L_2\dot{\phi}_2$ de m_2 relativa a su apoyo m_1 más la velocidad $L_1\dot{\phi}_1$ de su apoyo. El ángulo entre estas dos velocidades es $(\phi_2-\phi_1)$, así que la energía cinética de m_2 es

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m_2[L_1^2\dot{\phi}_1^2 + 2L_1L_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\phi_1-\phi_2) + L_2^2\dot{\phi}_2^2]$$

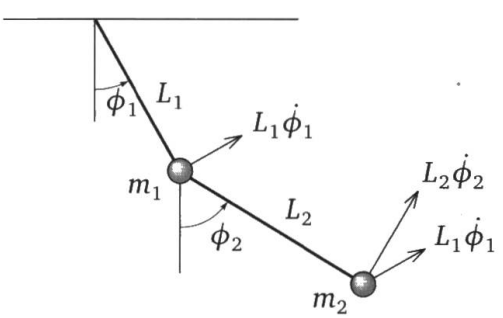


Figura 11.9. Un péndulo doble. La velocidad de m_2 es la suma vectorial de las dos velocidades mostradas, separada por un ángulo $\phi_2-\phi_1$.

y la energía cinética total es

$$T = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)L_1^2\dot{\phi}_1^2 + m_2L_1L_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + \tfrac{1}{2}m_2L_2^2\dot{\phi}_2^2. \tag{11.38}$$

A partir de (11.38) y (11.37) podemos escribir el lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$ y con ello las dos ecuaciones de Lagrange para ϕ_1 y ϕ_2. Sin embargo, las ecuaciones resultantes son demasiado complicadas para ser especialmente clarificadoras y no pueden ciertamente resolverse analíticamente. Esta situación recuerda el caso del péndulo simple, cuya ecuación del movimiento ($L\ddot{\phi} = -g \operatorname{sen}\phi$) es también irresoluble analíticamente, forzándonos a resolverla numéricamente o a hacer una aproximación conveniente. En ese caso, y en el caso que nos ocupa, la aproximación útil más simple es la del ángulo pequeño, que reduce la ecuación del péndulo simple a la resoluble $L\ddot{\phi} = -g\phi$. Vamos a ver que para casi todos las sistemas oscilantes acoplados, las ecuaciones exactas no son resolubles analíticamente, pero que si centramos nuestra atención en *pequeñas oscilaciones* (ciertamente un caso especial importante), las ecuaciones se reducen a la forma estándar que *es* resoluble.

Volviendo a las ecuaciones del péndulo doble, supongamos que ambos ángulos ϕ_1 y ϕ_2 y las velocidades correspondientes $\dot{\phi}_1$ y $\dot{\phi}_2$ permanecen pequeñas en todo momento. Esto nos permite simplificar las expresiones para T y U haciendo su desarrollo de Taylor y prescindiendo de todos los términos que tengan potencias cúbicas o mayores en las cuatro pequeñas cantidades. En (11.38) para la energía cinética, el único término que necesita atención es el del medio. Como el factor $\cos(\phi_1 - \phi_2)$ ya está multiplicado por el producto doblemente pequeño $\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2$, podemos aproximar el coseno por 1, para obtener

$$T = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)L_1^2\dot{\phi}_1^2 + m_2L_1L_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + \tfrac{1}{2}m_2L_2^2\dot{\phi}_2^2. \tag{11.39}$$

En (11.37) para la energía potencial, debemos trabajar con los cosenos con más cuidado (porque ya no están multiplicados por ninguna cantidad pequeña). La serie de Taylor para $\cos\phi$ da la aproximación $\cos\phi \approx 1 - \phi^2/2$, que reduce (11.37) a

$$U = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)gL_1\phi_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2gL_2\phi_2^2. \tag{11.40}$$

Antes de utilizar estas expresiones simplificadas de T y U para obtener las ecuaciones de movimiento, detengámonos un momento para examinar lo que nuestra hipótesis de pequeñas oscilaciones ha conseguido. La expresión exacta (11.38) para T era una función trascendente de las coordenadas ϕ_1, ϕ_2 y velocidades $\dot{\phi}_1$,$\dot{\phi}_2$; la aproximación del ángulo pequeño la ha reducido a una función cuadrática homogénea[5] sólo de las dos velocidades. La expresión exacta (11.37) para U era una función trascendente de ϕ_1 y ϕ_2; la aproximación del ángulo pequeño la ha reducido a una

[5] Una función cuadrática homogénea contiene sólo potencias cuadradas en sus argumentos (sin primeras potencias o términos constantes, y sin potencias mayores que dos).

función cuadrática homogénea de ϕ_1 y ϕ_2. Veremos que las mismas simplificaciones tienen lugar para una amplia gama de sistemas oscilantes: la suposición de que todas las oscilaciones son pequeñas reduce T a una función cuadrática homogénea de las velocidades y U a una función cuadrática homogénea de las coordenadas.[6] La característica simplificadora de estas formas cuadráticas homogéneas para T y U es que cuando las diferenciamos para obtener las ecuaciones de Lagrange se reducen a funciones lineales homogéneas, que conducen a ecuaciones del movimiento que siempre se pueden resolver fácilmente.

Podemos ahora sustituir las expresiones aproximadas (11.39) y (11.40) para T y U en el lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$ y escribir las dos ecuaciones de Lagrange del movimiento para ϕ_1 y ϕ_2:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_1} \quad \text{o} \quad (m_1+m_2)L_1^2\ddot{\phi}_1 + m_2L_1L_2\ddot{\phi}_2 = -(m_1+m_2)gL_1\phi_1 \tag{11.41}$$

y

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_2} \quad \text{o} \quad m_2L_1L_2\ddot{\phi}_1 + m_2L_2^2\ddot{\phi}_2 = -m_2gL_2\phi_2. \tag{11.42}$$

Estas dos ecuaciones para ϕ_1 y ϕ_2 se pueden reescribir como una única ecuación matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\phi}} = -\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} \tag{11.43}$$

si introducimos la columna (2 × 1) de coordenadas

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

y las dos (2 × 2) matrices

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)L_1^2 & m_2L_1L_2 \\ m_2L_1L_2 & m_2L_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)gL_1 & 0 \\ 0 & m_2gL_2 \end{bmatrix}. \tag{11.44}$$

La ecuación matricial (11.43) es exactamente análoga a (11.3) para las dos vagonetas con muelles. En este caso, la matriz de «masa» **M** no está realmente formada por masas, pero todavía juega el papel de la inercia en la ecuación del movimiento (11.43). (Esto es, multiplica las segundas derivadas de las coordenadas). Análogamente la matriz de las constantes de los muelles **K** no está realmente formada por constantes de muelles, pero juega el papel análogo en la ecuación de movimiento.

---

[6] Es una característica casi única de los sistemas de masas conectados por muelles que obedecen la ley de Hooke que las expresiones exactas para T y U [como en (11.35) y (11.36)] ya están en estas formas simples, sin que tengamos que hacer ninguna aproximación.

El procedimiento para resolver las ecuaciones del movimiento (11.43) es exactamente el mismo que para las dos vagonetas de la Sección 11.1. Primero probamos a encontrar soluciones (modos normales) en las que las dos coordenadas ϕ_1 y ϕ_2 varían sinusoidalmente con la misma frecuencia angular ω. Exactamente como antes, cualquier solución de esa forma $\boldsymbol{\phi}(t)$ se puede escribir como la parte real de una solución compleja $\mathbf{z}(t)$ cuya dependencia temporal es justo $e^{i\omega t}$; esto es,

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \operatorname{Re}\mathbf{z}(t) \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{z}(t) = \mathbf{a}e^{i\omega t} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t},$$

y las dos componentes a_1, a_2 de $\mathbf{a}$ son constantes. Exactamente como antes, una función de esta forma satisface la ecuación del movimiento (11.43) si y sólo si la frecuencia ω y la columna $\mathbf{a}$ cumplen la ecuación de autovalores $(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\mathbf{a} = 0$. Esta ecuación para $\mathbf{a}$ tiene solución si y sólo si $\det(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}) = 0$, una ecuación cuadrática para ω^2, que determina las dos frecuencias normales del péndulo doble. Sabiendo estas dos frecuencias, podemos volver y hallar las columnas $\mathbf{a}$ correspondientes, y entonces sabemos los dos modos normales. Finalmente, el movimiento general del sistema es justo una superposición arbitraria de estos dos modos normales.

Longitudes y masas iguales

Para simplificar la discusión, centremos nuestra atención al caso en que el péndulo doble tiene masas iguales, $m_1 = m_2 = m$, y longitudes iguales, $L_1 = L_2 = L$. Las ecuaciones se arreglan apreciablemente si reconocemos que $\sqrt{g/L}$ es la frecuencia de un péndulo simple de la misma longitud L. Si llamamos a esta frecuencia ω_0, entonces podemos reemplazar g en todas partes por $L\omega_0^2$ y las dos matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{K}$ de (11.44) se convierten en (como se puede comprobar)

$$\mathbf{M} = mL^2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{K} = mL^2\begin{bmatrix} 2\omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{bmatrix}. \tag{11.45}$$

La matriz $(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})$ de la ecuación de autovalores es por lo tanto

$$(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}) = mL^2\begin{bmatrix} 2(\omega_0^2-\omega^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & (\omega_0^2-\omega^2) \end{bmatrix}. \tag{11.46}$$

Las frecuencias normales están determinadas por la condición $\det(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}) = 0$, la cual da

$$2(\omega_0^2-\omega^2)^2 - \omega^4 = \omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^4 = 0$$

con las dos soluciones $\omega^2 = (2\pm\sqrt{2})\omega_0^2$. Esto es, las dos frecuencias normales están dadas por

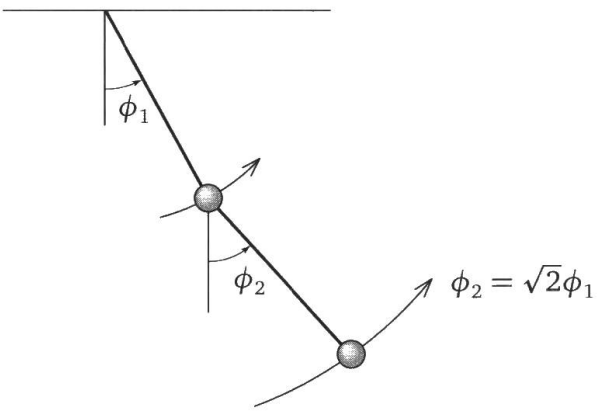


Figura 11.10. Primer modo normal para un péndulo doble con masas iguales y longitudes iguales. Los dos ángulos ϕ_1 y ϕ_2 oscilan en fase, con la amplitud de ϕ_2 mayor en un factor de $\sqrt{2}$.

$$\omega_1^2 = (2-\sqrt{2})\omega_o^2 \qquad \text{y} \qquad \omega_2^2 = (2+\sqrt{2})\omega_o^2 \tag{11.47}$$

(o $\omega_1 \approx 0{,}77\omega_o$ y $\omega_2 \approx 1{,}85\omega_o$) donde $\omega_o = \sqrt{g/L}$ es la frecuencia de un péndulo simple de longitud L.

Conociendo las dos frecuencias normales podemos encontrar ahora el movimiento del péndulo doble en los modos normales correspondientes, resolviendo la ecuación $(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{a} = 0$ con $\omega = \omega_1$ y ω_2 respectivamente. Si sustituimos $\omega = \omega_1$, dada por (11.47), en (11.46), obtenemos

$$(\mathbf{K} - \omega_1^2\mathbf{M}) = mL^2\omega_o^2(\sqrt{2}-1)\begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la ecuación $(\mathbf{K} - \omega_1^2\mathbf{M})\mathbf{a} = 0$ implica que $a_2 = \sqrt{2}a_1$, y si escribimos $a_1 = A_1 e^{-i\delta_1}$, las dos coordenadas son

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \text{Re}\,\mathbf{a}e^{i\omega_1 t} = A_1\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}\cos(\omega_1 t - \delta_1) \quad \text{[primer modo]}. \tag{11.48}$$

Vemos que en el primer modo normal los dos péndulos oscilan exactamente en fase, con la amplitud del péndulo más bajo $\sqrt{2}$ veces aquella del péndulo de arriba, como se muestra en la Figura 11.10.

Volviendo al segundo modo, vemos de (11.46) y (11.47) que

$$(\mathbf{K} - \omega_2^2\mathbf{M}) = -mL^2\omega_o^2(\sqrt{2}+1)\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

La ecuación $(\mathbf{K} - \omega_2^2\mathbf{M})\mathbf{a} = 0$ implica que $a_2 = -\sqrt{2}a_1$, y si escribimos $a_1 = A_2 e^{-i\delta_2}$, las dos coordenadas son

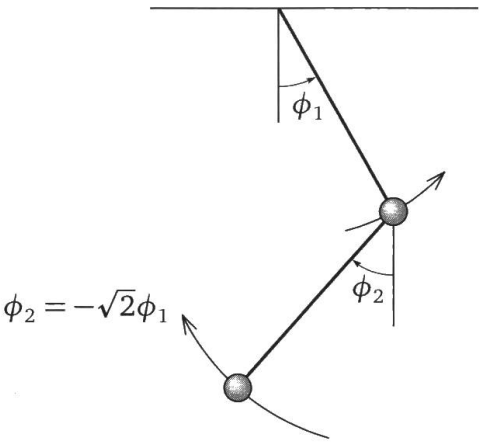


Figura 11.11. El segundo modo normal para un péndulo doble con masas iguales y longitudes iguales. Los dos ángulos ϕ_1 y ϕ_2 oscilan exactamente en fase opuesta, con la amplitud de ϕ_2 mayor en un factor de $\sqrt{2}$.

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \mathrm{Re}\,\mathbf{a}e^{i\omega_2 t} = A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2) \quad \text{[segundo modo]}. \tag{11.49}$$

En este segundo modo, $\phi_2(t)$ oscila exactamente en fase opuesta con $\phi_1(t)$, de nuevo con una amplitud que es $\sqrt{2}$ veces mayor que aquella de $\phi_1(t)$, como se muestra en la Figura 11.11. La solución general es una combinación lineal arbitraria de los dos modos normales (11.48) y (11.49).

11.5 El caso general

Hemos estudiado con gran detalle los modos normales de dos sistemas (un par de vagonetas enganchadas a tres muelles y un péndulo doble) y estamos preparados para discutir el caso general de un sistema con n grados de libertad que está oscilando alrededor de un punto de equilibrio estable. Como el sistema tiene n grados de libertad, su configuración se puede especificar por n coordenadas generalizadas,[7] $q_1, \ldots, q_n$. Para evitar demasiadas complicaciones con la notación, voy a abreviar el conjunto de todas las n coordenadas por una única $\mathbf{q}$ en negrita,

$$\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n).$$

[7] Doy por supuesto que el sistema es holónomo, de tal manera que el número de grados de libertad es el mismo que el número de coordenadas generalizadas, como se discutió en la Sección 7.3.

[Entonces, para las dos vagonetas de la Sección 11.1, $\mathbf{q}$ denotaría los dos desplazamientos $\mathbf{q} = (x_1, x_2)$, y para el péndulo doble, $\mathbf{q} = (\phi_1, \phi_2)$]. (Observe que $\mathbf{q}$ no es, en general, un vector tridimensional; es un vector en el espacio n-dimensional de las coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$). Supondré que el sistema es conservativo, así que tiene una energía potencial

$$U(q_1, \ldots, q_n) = U(\mathbf{q})$$

y lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$. La energía cinética es, por supuesto, $T = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2$, donde la suma incluye todas las partículas, $\alpha = 1, \ldots, N$, que componen el sistema. Esto tiene que reescribirse en términos de las coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ usando la relación entre las coordenadas cartesianas $\mathbf{r}_\alpha$ y las coordenadas generalizadas

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(q_1, \ldots, q_n) \tag{11.50}$$

donde daré por supuesto que esta relación no incluye el tiempo t explícitamente. [Recuerde que, en la terminología de la Sección 7.3, las coordenadas generalizadas para las cuales (11.50) no incluye el tiempo se denominan «naturales»]. Vimos en detalle en la Sección 7.8 que si diferenciamos (11.50) con respecto a t y sustituimos en la energía cinética, encontramos que [compare con la Ecuación (7.94)]

$$T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \tfrac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk}(\mathbf{q}) \dot{q}_j \dot{q}_k \tag{11.51}$$

donde los coeficientes $A_{jk}(\mathbf{q})$ pueden depender de las coordenadas $\mathbf{q}$. [Compare con (11.38) para el caso del péndulo doble]. Bajo nuestras suposiciones actuales, el lagrangiano tiene la forma general $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q})$, donde $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ está dado por (11.51), y $U(\mathbf{q})$ es una función de las coordenadas $\mathbf{q}$, todavía sin especificar.

Nuestra suposición final sobre el sistema es que está realizando pequeñas oscilaciones alrededor de una configuración de equilibrio estable. Redefiniendo las coordenadas si es necesario, podemos conseguir que la posición de equilibrio sea $\mathbf{q} = 0$ (esto es, $q_1 = \cdots = q_n = 0$). Entonces, como sólo estamos interesados en pequeñas oscilaciones, solamente tenemos que preocuparnos de pequeños valores de las coordenadas $\mathbf{q}$, y podemos utilizar desarrollos de Taylor de U y T alrededor del punto de equilibrio $\mathbf{q} = 0$. Para U esto da

$$U(\mathbf{q}) = U(0) + \sum_j \frac{\partial U}{\partial q_j} q_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} q_j q_k + \cdots \tag{11.52}$$

donde todas las derivadas están evaluadas en $\mathbf{q} = 0$. Esto se puede simplificar mucho más. Primero, como $U(0)$ es una constante podemos simplemente deshacernos de ella redefiniendo el cero de energía potencial. Segundo, como $\mathbf{q} = 0$ es un punto de equilibrio, todas las primeras derivadas $\partial U / \partial q_j$ son cero. Renombraré las segundas

derivadas como $\partial^2 U/\partial q_j \partial q_k = K_{jk}$ (que cumplen $K_{jk} = K_{kj}$ porque no hay ninguna diferencia en el orden en que evaluemos las segundas derivadas). Finalmente, como las oscilaciones son pequeñas, despreciaré todos los términos mayores que el segundo orden en las pequeñas cantidades $\mathbf{q}$ o $\dot{\mathbf{q}}$. Esto reduce U a

$$U = U(\mathbf{q}) = \tfrac{1}{2}\sum_{j,k} K_{jk}\, q_j\, q_k\,. \tag{11.53}$$

La energía cinética es incluso más simple. Cada término en (11.51) contiene un factor $\dot{q}_j \dot{q}_k$ que ya es de segundo orden en cantidades pequeñas. Por lo tanto, podemos ignorar todo menos el término constante en el desarrollo de $A_{jk}(\mathbf{q})$. Si llamamos a este término constante $A_{jk}(0) = M_{jk}$, esto reduce la energía cinética a

$$T = T(\dot{\mathbf{q}}) = \tfrac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk}\, \dot{q}_j\, \dot{q}_k \tag{11.54}$$

y el lagrangiano a

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) \tag{11.55}$$

con $T(\dot{\mathbf{q}})$ dada por (11.54) y $U(\mathbf{q})$ dada por (11.53). Advierta que las formas aproximadas (11.54) y (11.53) corresponden a las aproximaciones (11.39) y (11.40) para el péndulo doble. Al igual que las últimas aproximaciones, reducen la energía cinética a la función cuadrática homogénea de las velocidades $\dot{\mathbf{q}}$ y la energía potencial a una función cuadrática homogénea de las coordenadas $\mathbf{q}$. Al igual que en el péndulo doble, esto garantizará que las ecuaciones del movimiento sean ecuaciones lineales resolubles, pero antes de enfrentarnos a las ecuaciones, veamos un ejemplo más sencillo de esta gran simplificación de T y U que resulta de la suposición de pequeñas oscilaciones.

Ejemplo 11.1 *Una cuenta de collar en un alambre*

Una cuenta de collar de masa m está enhebrada en un alambre sin rozamiento que está apoyado en el plano xy (y verticalmente hacia arriba), curvado en la forma $y = f(x)$ con un mínimo en el origen, como se muestra en la Figura 11.12. Escriba las energías potencial y cinética y sus formas simplificadas apropiadas para pequeñas oscilaciones en torno a O.

Este sistema tiene sólo un grado de libertad, y la elección natural de coordenada generalizada es justo la coordenada x. Con esta elección, la energía potencial es simplemente $U = mgy = mgf(x)$. Cuando nos ceñimos a pequeñas oscilaciones, podemos desarrollar en serie de Taylor $f(x)$. Como $f(0) = f'(0) = 0$, esto da

$$U(x) = mgf(x) \approx \tfrac{1}{2} mgf''(0)x^2.$$

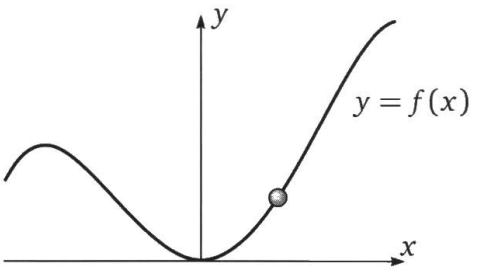


Figura 11.12. Cuenta de collar enhebrada en un alambre sin rozamiento que tiene la forma $y = f(x)$.

La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$, donde, por la regla de la cadena, $\dot{y} = f'(x)\dot{x}$. Por lo tanto, $T = \frac{1}{2}m[1+f'(x)^2]\dot{x}^2$. Advierta que la expresión exacta para T depende de x así como de $\dot{x}$. Sin embargo, como T ya contiene el factor $\dot{x}^2$, cuando hacemos la aproximación de pequeñas oscilaciones podemos simplemente reemplazar el término $f'(x)$ por su valor en $x = 0$ (concretamente cero) y obtenemos

$$T(x,\dot{x}) = \tfrac{1}{2}m[1+f'(x)^2]\dot{x}^2 \approx \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Como se esperaba, la aproximación de pequeñas oscilaciones ha reducido ambas U y T a funciones cuadráticas homogéneas de x (para U) o $\dot{x}$ (para T).

La ecuación del movimiento

Volviendo al lagrangiano aproximado (11.55) para el sistema general, podemos escribir fácilmente las ecuaciones del movimiento. Como hay n coordenadas generalizadas q_i, $(i = 1,\ldots,n)$, hay n ecuaciones correspondientes

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \qquad [i = 1,\ldots,n]. \tag{11.56}$$

Para escribir estas ecuaciones explícitamente, debemos diferenciar las expresiones (11.54) y (11.53) para T y U. Si nunca se ha intentado derivar sumas como estas, puede ayudar escribirlas explícitamente en primer lugar. Por ejemplo, para un sistema con sólo dos grados de libertad ($n = 2$), la ecuación (11.53) para U se lee

$$\begin{aligned} U = \tfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2} K_{jk}\,q_j\,q_k &= \tfrac{1}{2}(K_{11}q_1^2 + K_{12}q_1q_2 + K_{21}q_2q_1 + K_{22}q_2^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(K_{11}q_1^2 + 2K_{12}q_1q_2 + K_{22}q_2^2) \end{aligned} \tag{11.57}$$

donde la segunda línea es cierta porque $K_{12} = K_{21}$. En esta forma podemos diferenciar fácilmente con respecto a ambas q_1 o q_2. Por ejemplo,

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = K_{11}q_1 + K_{12}q_2$$

con una expresión correspondiente para $\partial U/\partial q_2$, y bastante generalmente (no importa cuántos grados de libertad haya)

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_j K_{ij}q_j \qquad [i = 1, \ldots, n]. \tag{11.58}$$

Debido a que la derivación de la energía cinética (11.54) funciona exactamente de la misma manera, podemos escribir las n ecuaciones de Lagrange (11.56):

$$\sum_j M_{ij}\ddot{q}_j = -\sum_j K_{ij}q_j \qquad [i = 1, \ldots, n]. \tag{11.59}$$

Estas n ecuaciones se pueden agrupar inmediatamente en una única ecuación matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{K}\mathbf{q} \tag{11.60}$$

donde $\mathbf{q}$ es la columna $(n \times 1)$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{M}$ y $\mathbf{K}$ son las matrices $(n \times n)$ de «masa» y «constantes de muelles» compuestas por los números M_{ij} y K_{ij} respectivamente.[8]

La ecuación matricial (11.60) es, por supuesto, la equivalente n-dimensional de las dos ecuaciones bidimensionales (11.3) para el par de vagonetas y (11.43) para el péndulo doble, y se resuelve exactamente de la misma manera. Primero buscamos modos normales con la forma ahora familiar

$$\mathbf{q}(t) = \mathrm{Re}\,\mathbf{z}(t), \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{z}(t) = \mathbf{a}e^{i\omega t} \tag{11.61}$$

y $\mathbf{a}$ es una columna constante $(n \times 1)$. Esto nos lleva a la ecuación de autovalores

[8] Desde este punto en el cálculo todo lo que necesitamos son las dos matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{K}$. Por ello, en la práctica, no hay realmente necesidad de escribir el lagrangiano ni las ecuaciones de Lagrange, porque las matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{K}$ se pueden deducir directamente de las expresiones aproximadas (11.54) y (11.53) para T y U.

$$(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\mathbf{a}=0, \tag{11.62}$$

que tiene soluciones si y sólo si ω cumple la **ecuación característica** o **secular**

$$\det(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})=0. \tag{11.63}$$

Este determinante es un polinomio de grado n-ésimo en ω^2, así que la ecuación (11.63) tiene n soluciones, que nos dicen las n frecuencias normales del sistema.[9] Con ω igualado a cada una de las frecuencias normales a su vez, la ecuación (11.62) determina el movimiento del sistema en el modo normal correspondiente. Finalmente, el movimiento general del sistema está dado por una suma arbitraria de las soluciones del modo normal (11.61).

El procedimiento general descrito en los últimos tres párrafos es justo lo que ya hemos discutido en detalle para los ejemplos de las dos vagonetas y el péndulo doble. Expondré otro ejemplo más, éste con tres grados de libertad, en la siguiente sección, y el lector debería estudiar algunos de los ejemplos que se dan en los problemas propuestos al final del capítulo.

11.6 Tres péndulos acoplados

Consideremos tres péndulos idénticos acoplados por dos muelles idénticos, como se muestra en la Figura 11.13. Como coordenadas generalizadas es natural utilizar los tres ángulos mostrados como ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3, con la posición de equilibrio en $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$. Nuestra primera tarea es escribir el lagrangiano para el sistema, al menos para pequeños desplazamientos. El procedimiento quizá más seguro y sistemático sería escribir las expresiones exactas para T y U y entonces hacer la aproximación de ángulos pequeños. En la práctica, encontrar las expresiones exactas puede ser muy tedioso. (En el presente caso, la energía potencial de los muelles depende de sus extensiones, y las expresiones exactas para éstas, buenas para cualquier ángulo, son muy complicadas. Vea el Problema 11.22). Sucede muchas veces

[9] Dos sutilezas: primero, puede suceder que algunas de las raíces de (11.63) sean iguales; esto simplemente significa que algunos de los modos normales tienen frecuencias iguales y no presenta un problema serio. Segundo (y mucho más profundo) necesitamos que las n soluciones de (11.63) para ω^2 sean reales y positivas, para que las frecuencias normales sean reales. Que esto es realmente así se sigue de propiedades de las matrices $\mathbf{K}$ y $\mathbf{M}$ como discutiré en el Apéndice.

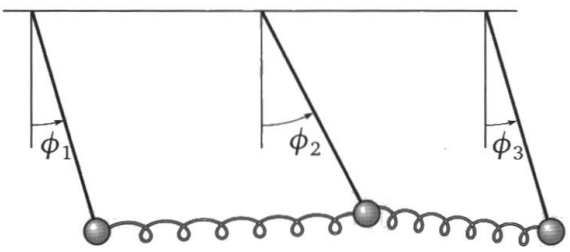


Figura 11.13. Tres péndulos idénticos de longitudes L y masas m están acoplados por dos muelles idénticos con constantes k. Las coordenadas generlizadas son los tres ángulos ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3. Las longitudes naturales de los muelles son iguales a la separación de los soportes de los péndulos, así que la posición de equilibrio es $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$, con los tres péndulos colgando verticalmente.

que con cuidado uno puede escribir las aproximaciones de ángulos pequeños para T y U directamente y evitar un montón de problemas, y esto es lo que haré aquí.

La energía cinética de los tres péndulos se ve fácilmente que es

$$T = \tfrac{1}{2}mL^2(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_3^2) \tag{11.64}$$

la cual no requiere ninguna aproximación. La energía potencial gravitatoria de cada péndulo tiene la forma $mgL(1-\cos\phi) \approx \frac{1}{2}mgL\phi^2$, donde la última expresión es la bien conocida aproximación de ángulo pequeño. Por consiguiente, la energía potencial gravitatoria total es

$$U_{\text{grav}} = \tfrac{1}{2}mgL(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2). \tag{11.65}$$

Para encontrar la energía potencial de los dos muelles, tenemos que saber cuánto se ha estrechado cada uno. Para valores arbitrarios de los ángulos ϕ esto es una tarea bastante engorrosa, pero para ángulos pequeños el único estrechamiento apreciable proviene de los desplazamientos horizontales de los péndulos, cada uno de los cuales se mueve aproximadamente una distancia de $L\phi$ hacia la derecha. Por tanto, por ejemplo, el muelle derecho se estira alrededor de $L(\phi_2 - \phi_1)$, y la energía potencial total del muelle es

$$\begin{aligned} U_{\text{muelle}} &= \tfrac{1}{2}kL^2\left[(\phi_2-\phi_1)^2 + (\phi_3-\phi_2)^2\right] \\ &= \tfrac{1}{2}kL^2(\phi_1^2 + 2\phi_2^2 + \phi_3^2 - 2\phi_1\phi_2 - 2\phi_2\phi_3). \end{aligned} \tag{11.66}$$

Antes de combinar estas expresiones para T y U para obtener el lagrangiano y las ecuaciones del movimiento, me gustaría introducir una estrategia útil. Las ecuaciones que vamos a obtener implican varios parámetros fijos, (m, L, g, k), algunos de los cuales no son demasiado interesantes. La continua anotación de estos parámetros es, como poco, una tarea fastidiosa que puede llevar fácilmente a cometer errores. Por lo tanto resulta útil encontrar una manera de librarse de estos parámetros antes de hacer más cálculos. Una forma radical de hacerlo y que es

muy popular entre los físicos teóricos es elegir un sistema de unidades tal que los parámetros sin interés tengan el valor 1 (un proceso descrito a veces como elegir **unidades naturales**). En el problema que nos ocupa, por ejemplo, podemos elegir m que sea la unidad de masa y L que sea la unidad de longitud. Con esta elección m y L naturalmente tienen el valor 1, y desaparecen de todo el trabajo subsiguiente. Este truco simplifica materialmente los detalles triviales de nuestros cálculos, reduce el peligro de errores, y nos ayuda a ver las características que realmente interesan.

La única desventaja seria de usar unidades naturales es la siguiente: una vez que nuestros cálculos están completos, a veces queremos saber cómo dependen nuestras respuestas de los valores de los parámetros que han sido suprimidos. (¿Cuál es la frecuencia de un determinado modo normal, si $L = 1{,}5$ m?) Para contestar a este tipo de pregunta, tenemos que poner los parámetros desaparecidos otra vez en nuestras respuestas. Aunque este proceso (de restablecer los parámetros desaparecidos) parece desalentador para el principiante, es normalmente bastante fácil. Por ejemplo, con $m = L = 1$, vamos a encontrar que una de las frecuencias normales está dada por $\omega^2 = g$. Esto implica que (en nuestro sistema de unidades) la cantidad g/ω^2 tiene el valor 1. Pero se reconocerá que g/ω^2 tiene las dimensiones de una longitud, y decir que una longitud tiene el valor 1 en nuestras unidades es lo mismo que decir que tiene el valor L en cualquier sistema de unidades. Por tanto, $g/\omega^2 = L$ en general, y nuestra respuesta es que $\omega^2 = g/L$ cualesquiera unidades que usemos. Esto pone la «L» otra vez en nuestra respuesta y nos permite encontrar ω para cualquier valor dado de L.

Escojamos entonces unidades con $m = L = 1$, de tal manera que las energías cinética y potencial obtenidas de (11.64), (11.65) y (11.66) se conviertan en

$$T = \tfrac{1}{2}(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_3^2) \tag{11.67}$$

y

$$U = \tfrac{1}{2}g(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2) + \tfrac{1}{2}k(\phi_1^2 + 2\phi_2^2 + \phi_3^2 - 2\phi_1\phi_2 - 2\phi_2\phi_3). \tag{11.68}$$

Podríamos escribir ahora el lagrangiano y después las ecuaciones del movimiento, pero realmente no existe necesidad de hacerlo. Ya sabemos que el resultado será la ecuación matricial, ahora familiar,

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\phi}} = -\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} \tag{11.69}$$

donde, en este caso, $\boldsymbol{\phi}$ es la columna (3×1) que comprende los tres ángulos ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3. Los elementos de las matrices (3×3) $\mathbf{M}$ y $\mathbf{K}$ se pueden leer directamente de (11.67) y (11.68) para obtener[10]

[10] Uno debe pensar un poco cuando lea uno por uno los elementos de estas matrices. La regla es esta: si se ignora el factor $\frac{1}{2}$ enfrente de (11.68), por ejemplo, entonces el elemento diagonal

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}=\begin{bmatrix}g+k&-k&0\\-k&g+2k&-k\\0&-k&g+k\end{bmatrix}. \tag{11.70}$$

Los modos normales de nuestro sistema tienen la forma familiar $\boldsymbol{\phi}(t)=\text{Re}\,\mathbf{z}(t)=\text{Re}\,\mathbf{a}e^{i\omega t}$, donde $\mathbf{a}$ y ω están determinados por la ecuación de autovalores

$$(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\mathbf{a}=0. \tag{11.71}$$

El primer paso es encontrar las posibles frecuencias normales a partir de la ecuación característica $\det(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})=0$, para lo cual necesitamos escribir la matriz $(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})$,

$$(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})=\begin{bmatrix}g+k-\omega^2&-k&0\\-k&g+2k-\omega^2&-k\\0&-k&g+k-\omega^2\end{bmatrix}. \tag{11.72}$$

El determinante se evalúa fácilmente como

$$\det(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})=(g-\omega^2)(g+k-\omega^2)(g+3k-\omega^2),$$

de manera que las tres frecuencias normales vienen dadas por

$$\omega_1^2=g, \qquad \omega_2^2=g+k \qquad \text{y} \qquad \omega_3^2=g+3k. \tag{11.73}$$

Conocidas las tres frecuencias normales, podemos averiguar a su vez los tres modos correspondientes. La primera frecuencia normal tiene $\omega_1=\sqrt{g}$. (Esto es, en nuestras unidades, donde $L=1$. Como ya he mencionado, en unidades arbitrarias sería $\omega_1=\sqrt{g/L}$, que es la frecuencia para un péndulo único de longitud L. Veremos la razón de esta coincidencia en un momento). Si sustituimos ω_1 por la Ecuación (11.72) para $(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})$, entonces la ecuación de autovalores (11.71) implica que (se recomienda la comprobación)

$$a_1=a_2=a_3=Ae^{-i\delta}, \qquad \text{[primer modo]}$$

Esto es, en el primer modo,

$$\phi_1(t)=\phi_2(t)=\phi_3(t)=A\cos(\omega_1 t-\delta)$$

y los tres péndulos oscilan al unísono (amplitudes y fases iguales) como se muestra en la Figura 11.14(a). En este modo, los muelles no están ni comprimidos ni estirados, y su presencia resulta irrelevante. Por lo tanto, cada péndulo oscila igual que un péndulo sencillo, con frecuencia $\omega_1=\sqrt{g/L}$ (o $\sqrt{g}$ en nuestras unidades).

K_{ii} es justo el coeficiente de ϕ_i^2, mientras que el elemento de fuera de la diagonal K_{ij} es *la mitad* del coeficiente de $\phi_i\phi_j$. Para comprender esto, observe (11.57).

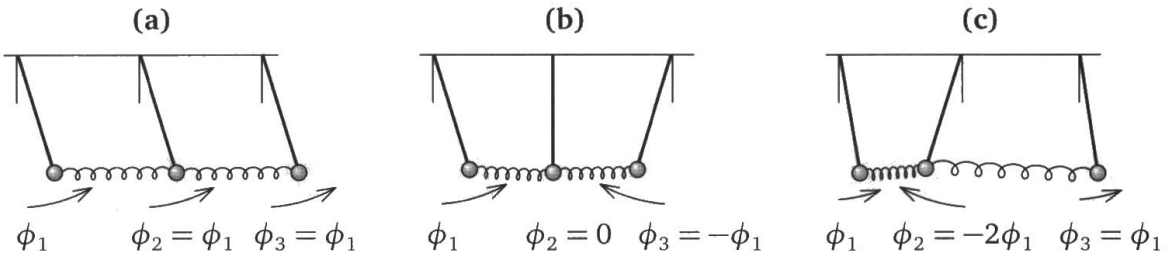


Figura 11.14. Los tres modos normales para tres péndulos emparejados. **(a)** En el primer modo, los tres péndulos oscilan al unísono. Como ninguno de los muelles está estirado o comprimido la frecuencia es la misma para un péndulo sencillo de la misma longitud. **(b)** En el segundo modo, los dos péndulos exteriores oscilan exactamente en fase opuesta, mientras que el central no se mueve en absoluto. **(c)** En el tercer modo, los dos péndulos exteriores oscilan al unísono pero el de en medio está en fase opuesta y tiene el doble de amplitud.

Si sustituimos $\omega = \omega_2$, la ecuación de autovalores (11.71) implica que

$$a_1 = -a_3 = Ae^{-i\delta}, \qquad \text{pero} \qquad a_2 = 0 \qquad \text{[segundo modo]}.$$

Por lo tanto, los dos péndulos exteriores oscilan exactamente en fase opuesta mientras que el de en medio permanece en reposo, como se muestra en la Figura 11.14(b). Finalmente, sustituyendo $\omega = \omega_3$ en la ecuación de autovalores (11.71) obtenemos el resultado

$$a_1 = -\tfrac{1}{2}a_2 = a_3 = Ae^{-i\delta}, \qquad \text{[tercer modo]}$$

Por lo tanto, en el tercer modo los dos péndulos exteriores oscilan al unísono, pero el central oscila con amplitud doble y exactamente en fase opuesta, como se muestra en la Figura 11.14(c). La solución general es una combinación lineal arbitraria de los tres modos normales.

11.7 Coordenadas normales*

* *Esta sección se puede saltar si se va mal de tiempo.*

En la Sección 11.2 encontramos los modos normales para dos masas iguales unidas por tres muelles idénticos. Al final de aquella sección mencioné que uno puede sustituir las dos coordenadas x_1 y x_2 por dos «coordenadas normales»

$$\xi_1 = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \qquad \text{y} \qquad \xi_2 = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2). \tag{11.74}$$

Estas nuevas coordenadas normales tienen la propiedad de que cada una siempre oscila justo a una de las frecuencias normales (ξ_1 a la frecuencia ω_1 y ξ_2 a la fre-

cuencia ω_2. En esta sección mostraré que podemos hacer lo mismo para cualquier sistema que oscila alrededor de un punto de equilibrio estable. Si el sistema tiene n grados de libertad, entonces se describe mediante n coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$ y tiene n modos normales con frecuencias $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Lo que voy a mostrar ahora es que podemos introducir n coordenadas normales nuevas, $\xi_1, \ldots, \xi_n$, tales que cada coordenada normal ξ_i oscila a justo una frecuencia, la frecuencia normal ω_i. Antes de mostrar esto, necesito repasar y desarrollar la discusión de la Sección 11.2 para los dos vagonetas.

Coordenadas normales para dos vagonetas con muelles

La ecuación del movimiento para las posiciones x_1 y x_2 de las dos vagonetas fueron dadas en (11.2), que reescribiré aquí (para el caso de masas iguales y constantes de muelle iguales) como

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 &= kx_1 - 2kx_2 . \end{aligned}\right\} \tag{11.75}$$

Un momento de reflexión nos debería convencer de que si sumamos estas dos ecuaciones, obtenemos una única ecuación para $\xi_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, y si las restamos, obtenemos una única ecuación para $\xi_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\xi}_1 &= -k\xi_1 \\ m\ddot{\xi}_2 &= -3k\xi_2 . \end{aligned}\right\} \tag{11.76}$$

Estas dos ecuaciones están *desacopladas*, y muestran que cada coordenada normal oscila, como se afirmaba, a una única frecuencia (ξ_1 a frecuencia $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ y ξ_2 a $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$). En otras palabras, las coordenadas normales se comportan justo como las coordenadas de dos osciladores *desacoplados*; utilizando las coordenadas normales, hemos «desacoplado» las oscilaciones.

Como las ecuaciones (11.75) para x_1 y x_2 se pueden reescribir como una única ecuación matricial $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, así que las dos ecuaciones (11.76) para ξ_1 y ξ_2 se pueden escribir como $\mathbf{M}'\ddot{\boldsymbol{\xi}} = -\mathbf{K}'\boldsymbol{\xi}$, con la importante diferencia de que las dos matrices $\mathbf{M}'$ y $\mathbf{K}'$ son ambas diagonales:

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}' = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 3k \end{bmatrix}. \tag{11.77}$$

Se dice que la transición desde las coordenadas originales (x_1, x_2) a las coordenadas normales (ξ_1, ξ_2) *diagonaliza* las matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{K}$. Que las nuevas matrices sean diagonales es precisamente equivalente a la afirmación de que las ecuaciones (11.76) para ξ_1 y ξ_2 están desacopladas y que ξ_1 y ξ_2 oscilan independientemente.

Podemos definir las dos coordenadas normales ξ_1 y ξ_2 de manera diferente, y más general, en términos de los autovectores **a** que describen el movimiento de los modos normales y están determinados por la ecuación de autovalores $(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{a} = 0$. Vimos en la Sección 11.2 que estas dos columnas (2×1) son (para nuestras dos vagonetas)

$$\mathbf{a}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{11.78}$$

[Dos puntos importantes: Cada uno de estos vectores contiene un multiplicador arbitrario A, pero pretendo arreglar esto ahora, y la elección más sencilla es hacer $A = 1$; otra elección, a veces mejor, es normalizar los vectores introduciendo un factor de $1/\sqrt{2}$. Segundo, cada columna **a** está formada por dos números, que he estado llamando a_1 y a_2. Pero estoy ahora discutiendo dos *columnas diferentes*, $\mathbf{a}_{(1)}$ y $\mathbf{a}_{(2)}$, una para cada modo normal, y estoy usando los paréntesis en los subíndices para enfatizar la distinción]. Ahora, es fácil ver que *cualquier* vector columna (2×1) se puede escribir como una combinación de los dos vectores $\mathbf{a}_{(1)}$ y $\mathbf{a}_{(2)}$. (Vea el Problema 11.33). En particular, puedo desarrollar la columna **x** de esta manera como

$$\mathbf{x} = \xi_1 \mathbf{a}_{(1)} + \xi_2 \mathbf{a}_{(2)} = \begin{bmatrix} \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_1 - \xi_2 \end{bmatrix}. \tag{11.79}$$

La primera igualdad define ξ_1 y ξ_2 como los coeficientes en este desarrollo de **x** en términos de los autovectores $\mathbf{a}_{(1)}$ y $\mathbf{a}_{(2)}$, pero la inspección de la última expresión en (11.79) debería convencernos de que define ξ_1 y ξ_2 para que sean precisamente las coordenadas normales de (11.74). Es decir, las coordenadas normales, con la propiedad de que cada una oscila independientemente a una de las frecuencias normales, se pueden definir como los coeficientes en el desarrollo de **x** en términos de los autovectores $\mathbf{a}_{(1)}$ y $\mathbf{a}_{(2)}$. Veremos que esta definición se traslada naturalmente al caso general de oscilaciones de cualquier sistema con n grados de libertad.

El caso general

Podemos ahora introducir fácilmente coordenadas normales para un sistema oscilante arbitrario con n coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$. Sabemos que dicho sistema tiene n modos normales. En el modo i, el vector columna **q** oscila sinusoidalmente,

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}_{(i)} \cos(\omega_i t - \delta_i)$$

donde la columna fija $\mathbf{a}_{(i)}$ satisface la ecuación de autovalores

$$\mathbf{K}\mathbf{a}_{(i)} = \omega_i^2 \mathbf{M}\mathbf{a}_{(i)}. \tag{11.80}$$

Las columnas $\mathbf{a}_{(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{(n)}$ son n columnas independientes, reales[11] ($n \times 1$), y *cualquier* columna ($n \times 1$) se puede desarrollar en términos de ellos; es decir, los vectores $\mathbf{a}_{(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{(n)}$ son una **base** o **conjunto completo** para el espacio de todos los vectores ($n \times 1$). (Vea una prueba de estas propiedades en el Apéndice). Por consiguiente cualquier solución de las ecuaciones del movimiento $\mathbf{q}(t)$ se puede desarrollar como

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t)\, \mathbf{a}_{(i)}. \tag{11.81}$$

Esta definición de las coordenadas normales ξ_i es completamente paralela a la nueva definición (11.79) para el sistema de dos vagonetas sobre muelles, y podemos demostrar ahora que tiene la propiedad deseada de que las diferentes $\xi_i(t)$ oscilan independientemente, como sigue:

La columna $\mathbf{q}(t)$ satisface la ecuación del movimiento

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{K}\mathbf{q}.$$

Si sustituimos $\mathbf{q}$ por su desarrollo (11.81), esta ecuación se convierte en

$$\sum_{i=1}^{n} \ddot{\xi}_i(t)\, \mathbf{M}\mathbf{a}_{(i)} = -\sum_{i=1}^{n} \xi_i(t)\, \mathbf{K}\mathbf{a}_{(i)} = -\sum_{i=1}^{n} \xi_i(t)\, \omega_i^2 \mathbf{M}\mathbf{a}_{(i)} \tag{11.82}$$

donde la última igualdad se sigue de la ecuación de autovalores (11.80). Ahora, los n vectores columna $\mathbf{a}_{(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{(n)}$ son independientes, y esta propiedad no varía cuando están multiplicados por la matriz $\mathbf{M}$. Por lo tanto, los n vectores $\mathbf{M}\mathbf{a}_{(1)}, \ldots, \mathbf{M}\mathbf{a}_{(n)}$ son también independientes, y la igualdad (11.82) sólo se puede cumplir si todos los coeficientes correspondientes de cada lado son iguales.[12] Esto es,

$$\ddot{\xi}_i(t) = -\omega_i^2\, \xi_i(t).$$

Esto establece que las coordenadas normales ξ_i definidas por (11.81) oscilan de hecho independientemente a las frecuencias anunciadas.

---

[11] Que los dos vectores $\mathbf{a}_{(i)}$ son reales no es obvio. En el caso de las dos vagonetas, se puede ver de (11.78) que lo son. En el caso general, están determinados por la ecuación de autovalores reales (11.80) y es bastante fácil demostrar que o bien son reales o bien se pueden redefinir para que lo sean. Vea el Apéndice.

[12] El resultado que estoy utilizando aquí es análogo al resultado familiar en el espacio tridimensional de que la igualdad $\sum_1^3 \lambda_i \mathbf{e}_i = \sum_1^3 \mu_i \mathbf{e}_i$ sólo es posible si $\lambda_i = \mu_i$ para todo i. Vea una prueba de la independencia de los vectores $\mathbf{a}_{(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{(n)}$ en el Apéndice.

Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 11

Las ecuaciones del movimiento en forma matricial

La configuración de un sistema con n grados de libertad se especifica por una matriz columna $n \times 1$ $\mathbf{q}$, compuesta por las n coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$. La ecuación del movimiento para pequeñas oscilaciones alrededor de un equilibrio estable (con las coordenadas elegidas de tal manera que $\mathbf{q} = 0$ en equilibrio) tiene la forma matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{K}\mathbf{q} \qquad \text{[Ec. (11.60)]}$$

donde $\mathbf{M}$ y $\mathbf{K}$ son las matrices $n \times n$ **«masa»** y **«constante de muelle»**. Una manera de encontrar estas matrices es escribir la EC y la EP del sistema en las formas

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k \quad \text{y} \quad U = \tfrac{1}{2}\sum_{j,k} K_{jk}\,q_j\,q_k. \qquad \text{[Ecs. (11.54) y (11.53)]}$$

Modos normales

Un **modo normal** es cualquier movimiento en el cual todas las n coordenadas oscilan sinusoidalmente con la misma frecuencia ω (una **frecuencia normal**) y se pueden escribir como

$$\mathbf{q}(t) = \mathrm{Re}\left(\mathbf{a}\,e^{i\omega t}\right) \qquad \text{[Ec. (11.61)]}$$

donde la columna $n \times 1$ constante $\mathbf{a}$ debe cumplir la ecuación de autovalores generalizada

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{a} = 0. \qquad \text{[Ec. (11.62)]}$$

Para cualquier sistema con n grados de libertad y un equilibrio estable en $\mathbf{q} = 0$, existen n frecuencias normales $\omega_1, \ldots, \omega_n$ (algunas de las cuales pueden ser iguales) y n autovectores independientes correspondientes $\mathbf{a}_{(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{(n)}$. Cualquier columna $n \times 1$ se puede desarrollar en términos de estos autovectores, y cualquier solución de las ecuaciones del movimiento se puede desarrollar en términos de los modos normales.

Coordenadas normales

Cuando cualquier solución se desarrolla en términos de los modos normales, los coeficientes del desarrollo $\xi_i(t)$ se denominan **coordenadas normales**, y cada una oscila a la frecuencia correspondiente ω_i. [Sección 11.7]

Problemas para el Capítulo 11

Los asteriscos indican el nivel aproximado de dificultad, desde los más fáciles (⋆) hasta los más difíciles (⋆ ⋆ ⋆).

Sección 11.1 Dos masas y tres muelles

11.1 ⋆ En la discusión de las dos vagonetas de la Figura 11.1, mencioné que es más sencillo suponer que cuando las dos vagonetas están en equilibrio las longitudes L_1, L_2, L_3 de los tres muelles son iguales a sus longitudes naturales, sin estirar l_1, l_2, l_3. No obstante, esta suposición no es nece-

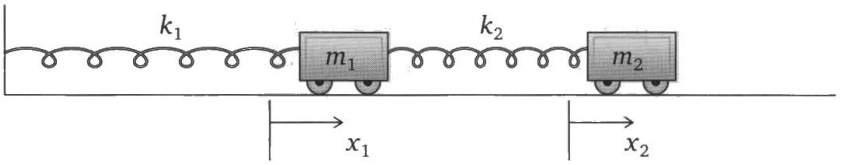


Figura 11.15. Problemas 11.5 y 11.6.

saria, y los tres muelles podrían estar todos en tensión (o compresión) en la posición de equilibrio. **(a)** Hallar las relaciones entre las seis longitudes (y las tres constantes de los muelles k_1, k_2, k_3) necesarias para que las dos vagonetas estén en equilibrio. **(b)** Mostrar que la fuerza neta sobre cualquier vagoneta es exactamente como la dada en la ecuación (11.2), independientemente de como son L_1, L_2, L_3 en comparación con l_1, l_2, l_3, siempre que x_1 y x_2 estén medidas desde las posiciones de equilibrio de las vagonetas.

11.2 ⋆⋆ Un muelle sin masa (constante de fuerza k_1) está colgado del techo, con una masa m_1 enganchada a su extremo inferior. Un segundo muelle (constante de fuerza k_2) está colgado de m_1, y una segunda masa m_2 está enganchada al extremo inferior del segundo muelle. Suponiendo que las masas sólo se mueven en dirección vertical y usando coordenadas y_1 e y_2 medidas desde las posiciones de equilibrio de las masas, mostrar que las ecuaciones del movimiento se pueden escribir en la forma matricial $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} = -\mathbf{K}\mathbf{y}$, donde $\mathbf{y}$ es la columna 2×1 constituida por y_1 e y_2. Encontrar las matrices 2×2 $\mathbf{M}$ y $\mathbf{K}$.

Sección 11.2 Muelles idénticos y masas iguales

11.3 ⋆ Hallar las frecuencias normales para el sistema de dos vagonetas y tres muelles mostrado en la Figura 11.1, para valores arbitrarios de m_1 y m_2 y de k_1, k_2 y k_3. Comprobar que la respuesta es correcta para el caso en que $m_1 = m_2$ y $k_1 = k_2 = k_3$.

11.4 ⋆⋆ **(a)** Hallar las frecuencias normales para el sistema de dos vagonetas y tres muelles mostrado en la Figura 11.1, para el caso en que $m_1 = m_2$ y $k_1 = k_3$ (pero k_2 puede ser diferente). Comprobar que la respuesta es correcta para el caso en que $k_1 = k_2$ también. **(b)** Encontrar y describir el movimiento en cada uno de los modos normales correspondientes. Comparar con el movimiento encontrado para el caso en que $k_1 = k_2$ en la Sección 11.2. Explicar las analogías que aparezcan.

11.5 ⋆⋆ **(a)** Encontrar las frecuencias normales, ω_1 y ω_2, para las dos vagonetas mostradas en la Figura 11.15, suponiendo que $m_1 = m_2$ y $k_1 = k_2$. **(b)** Encontrar y describir el movimiento para cada uno de los modos normales.

11.6 ⋆⋆ Contestar a las mismas preguntas que en el Problema 11.5 pero para el caso en que $m_1 = m_2$ y $k_1 = 3k_2/2$. (Escribir $k_1 = 3k$ y $k_2 = 2k$). Explicar el movimiento en los dos modos normales.

11.7 ⋆⋆ [Ordenador] El movimiento más general de las dos vagonetas de la Sección 11.2 está dado por (11.21), con las constantes A_1, A_2, δ_1 y δ_2 determinadas por las condiciones iniciales. **(a)** Mostrar que (11.21) se puede reescribir como

$$\mathbf{x}(t) = (B_1 \cos \omega_1 t + C_1 \operatorname{sen} \omega_1 t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (B_2 \cos \omega_2 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_2 t) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Normalmente esta forma es un poco más conveniente para imponer las condiciones iniciales dadas. **(b)** Si las vagonetas se liberan del reposo en las posiciones $x_1(0) = x_2(0) = A$, encontrar los coeficientes B_1, B_2, C_1 y C_2 y representar $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Tomar $A = \omega_1 = 1$ y $0 \leq t \leq 30$ para las gráficas. **(c)** Lo mismo que la parte (b), excepto que $x_1(0) = A$ pero $x_2(0) = 0$.

11.8 ⋆⋆ [Ordenador] Igual que el Problema 11.7 pero en la parte (b) las vagonetas están en sus posiciones de equilibrio en $t = 0$ y son empujadas en sentidos opuestos, cada una con velocidad v_0. En la parte (c), las vagonetas comienzan en las posiciones de equilibrio y la vagoneta 2 tiene

velocidad v_0 hacia la derecha pero la vagoneta 1 tiene velocidad inicial 0. Tomar $v_0 = \omega_1 = 1$ y $0 \le t \le 30$ para hacer las gráficas.

11.9 ⋆⋆ **(a)** Escribir las ecuaciones del movimiento (11.2) para las vagonetas de igual masa de la Sección 11.2 con tres muelles idénticos. Mostrar que el cambio de variables a las coordenadas normales $\xi_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ y $\xi_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ conduce a ecuaciones desacopladas para ξ_1 y ξ_2. **(b)** Resolver para ξ_1 y ξ_2 y después escribir la solución general para x_1 y x_2. (Advertir lo fácil que es este procedimiento, una vez que se ha averiguado cuáles son las coordenadas normales. Para un sistema simétrico simple como este, se puede a veces adivinar la forma de ξ_1 y ξ_2 considerando la simetría (especialmente una vez que se tiene alguna experiencia en trabajar con modos normales).

11.10 ⋆⋆⋆ [Ordenador] En general, el análisis de osciladores acoplados con fuerzas disipativas es mucho más complicado que el caso conservativo considerado en este capítulo. Sin embargo, existen algunos pocos casos en donde los mismos métodos todavía funcionan, tal como ilustra el siguiente problema: **(a)** Escribir las ecuaciones del movimiento correspondientes a (11.2) para las vagonetas de igual masa de la Sección 11.2 con tres muelles idénticos, pero con cada vagoneta sometida a una fuerza resistiva lineal $-b\mathbf{v}$ (mismo coeficiente b para ambas vagonetas). **(b)** Mostrar que si se cambian las variables a las coordenadas normales $\xi_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ y $\xi_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$, las ecuaciones del movimiento para ξ_1 y ξ_2 están desacopladas. **(c)** Escribir las soluciones generales para las coordenadas normales y después para x_1 y x_2. (Suponer que b es pequeño, de tal manera que las oscilaciones son subamortiguadas). **(d)** Encontrar $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para las condiciones iniciales $x_1(0) = A$ y $x_2(0) = v_1(0) = v_2(0) = 0$, y representar para $0 \le t \le 10\pi$ usando los valores $A = k = m = 1$, y $b = 0{,}1$.

11.11 ⋆⋆⋆ **(a)** Escribir las ecuaciones del movimiento correspondientes a (11.2) para las vagonetas de igual masa de la Sección 11.2 con tres muelles idénticos, pero con cada vagoneta sometida a una fuerza resistiva lineal $-b\mathbf{v}$ (mismo coeficiente b para ambos vagonetas) y con una fuerza exterior $F(t) = F_0 \cos \omega t$ aplicada a la vagoneta 1. **(b)** Mostrar que si se cambia de variables a las coordenadas normales $\xi_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ y $\xi_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$, las ecuaciones del movimiento para ξ_1 y ξ_2 están desacopladas. **(c)** Usando los métodos de la Sección 5.5, escribir las soluciones generales. **(d)** Suponiendo que $\beta = b/2m \ll \omega_0$, mostrar que ξ_1 resuena cuando $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$ y asimismo ξ_2 cuando $\omega \approx \sqrt{3}\omega_0$. **(e)** Probar, por otro lado, que si ambas vagonetas son conducidas en fase con la misma fuerza $F_0 \cos \omega t$, sólo ξ_1 muestra resonancia. Explicar el porqué.

11.12 ⋆⋆⋆ He aquí una manera diferente de acoplar dos osciladores. Las dos vagonetas de la Figura 11.16 tienen masas iguales m (aunque formas diferentes). Están unidas por muelles idénticos pero separados (constante de fuerza k) a paredes separadas. La vagoneta 2 rueda sobre la vagoneta 1, como se muestra y la vagoneta 1 está lleno de melaza, cuya resistencia viscosa proporciona el acoplamiento entre las vagonetas. **(a)** Suponiendo que la fuerza de arrastre tiene módulo $\beta m v$ donde $\mathbf{v}$ es la velocidad relativa de las dos vagonetas, escribir las ecuaciones del movimiento de las dos vagonetas usando como coordenada x_1 y x_2, los desplazamientos de las vagonetas de sus posiciones de equilibrio. Mostrar que se pueden escribir en forma matricial como $\ddot{\mathbf{x}} + \beta \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 x = 0$, donde $\mathbf{x}$ es la columna 2×1 formada por x_1 y x_2, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, y $\mathbf{D}$ es cierta matriz cuadrada 2×2. **(b)** No hay nada que nos impida buscar una solución de la forma $\mathbf{x}(t) = \mathrm{Re}\,\mathbf{z}(t)$, con $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}e^{rt}$. Mostrar que de hecho se obtienen dos soluciones de esta forma con $r = i\omega_0$ o $r = -\beta + i\omega_1$ donde $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. (Suponer que la fuerza viscosa es débil, de tal manera que $\beta < \omega_0$). **(c)** Describir los movimientos correspondientes. Explicar por qué uno de estos modos está amortiguado pero el otro no.

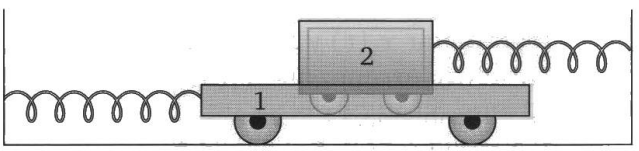


Figura 11.16. Problema 11.12.

Sección 11.3 Dos osciladores débilmente acoplados

11.13 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Considerar las dos vagonetas de la Sección 11.3, acopladas por un muelle débil y sometidas a una fuerza resistiva $-b\mathbf{v}$ (misma fuerza para cada vagoneta). **(a)** Escribir las ecuaciones del movimiento para x_1 y x_2 en la forma (11.2) y mostrar que si se cambia a las coordenadas normales $\xi_1 = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$ y $\xi_2 = \frac{1}{2}(x_1-x_2)$ las ecuaciones del movimiento para ξ_1 y ξ_2 están desacopladas. **(b)** Resolver para $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$ suponiendo que el coeficiente disipativo b es pequeño («movimiento subamortiguado», como en la Sección 5.4), y después escribir la solución general para $x_1(t)$ y $x_2(t)$. **(c)** Suponer que se sujeta la vagoneta 1 en $x_1 = A$ y la vagoneta 2 en $x_2 = 0$, y se liberan del reposo en $t = 0$. Hallar y representar las dos posiciones como funciones de t para $0 \leq t \leq 80$, usando los valores $A = k = m = 1$, $k_2 = 0{,}2$, y $b = 0{,}1$. (Al imponer las condiciones iniciales, aprovechar el hecho de que $b \ll 1$, y utilizar un programa de ordenador apropiado para hacer la gráfica). Comentar las gráficas realizadas.

Sección 11.4 Método lagrangiano: el péndulo doble

11.14 ⋆⋆ Considerar dos péndulos planos idénticos (cada uno de longitud L y masa m) que están unidos por un muelle sin masa (constante de fuerza k) como se muestra en la Figura 11.17. Las posiciones de los péndulos están especificadas por los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 mostrados. La longitud natural de los muelles es igual a la distancia entre los dos apoyos, así que la posición de equilibrio está en $\phi_1 = \phi_2 = 0$ con los dos péndulos verticales. **(a)** Escribir la energía cinética total y la gravitatoria y las energías potenciales del muelle. [Suponer que ambos ángulos permanecen pequeños en todo instante. Esto significa que $L(\phi_2-\phi_1)]$ es una buena aproximación de la extensión del muelle. Escribir las ecuaciones del movimiento de Lagrange. **(b)** Hallar y describir los modos normales para estos dos péndulos acoplados.

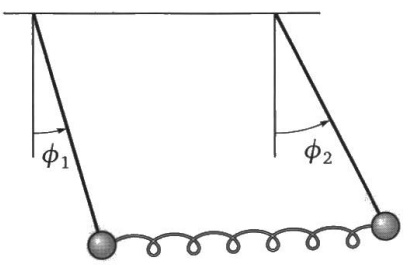


Figura 11.17. Problema 11.14.

11.15 ⋆⋆ Escribir el lagrangiano exacto (bueno para todos los ángulos) para el péndulo doble de la Figura 11.9 y encontrar las ecuaciones del movimiento correspondientes. Mostrar que se reducen a las ecuaciones (11.41) y (11.42) si ambos ángulos son pequeños.

11.16 ⋆⋆ **(a)** Encontrar las frecuencias normales para pequeñas oscilaciones del péndulo doble de la Figura 11.9 para valores arbitrarios de las masas y longitudes. **(b)** Comprobar que las respuestas dadas son correctas para el caso especial en que $m_1 = m_2$ y $L_1 = L_2$. **(c)** Discutir el límite en que $m_2 \to 0$.

11.17 ⋆⋆ **(a)** Hallar las frecuencias y los modos normales del péndulo doble de la Figura 11.9, sabiendo que $m_1 = 8m, m_2 = m$ y $L_1 = L_2 = L$. **(b)** Encontrar el movimiento real $[\phi_1(t), \phi_2(t)]$ si se suelta el péndulo desde el reposo con $\phi_1 = 0$ y $\phi_2 = \alpha$. ¿Es periódico este movimiento?

11.18 ⋆⋆ Dos masas iguales m están obligadas a moverse sin rozamiento, una en el eje x positivo y otra en el eje y positivo. Están unidas a dos muelles idénticos (constante de fuerza k) cuyos otros extremos están enganchados al origen. Además, las dos masas están conectadas una a la otra por un tercer muelle de constante de fuerza k'. Los muelles se eligen para que el sistema esté en equilibrio con los tres muelles relajados (longitud igual a la longitud sin estirar). ¿Cuáles son las frecuencias normales? Encontrar y describir los modos normales.

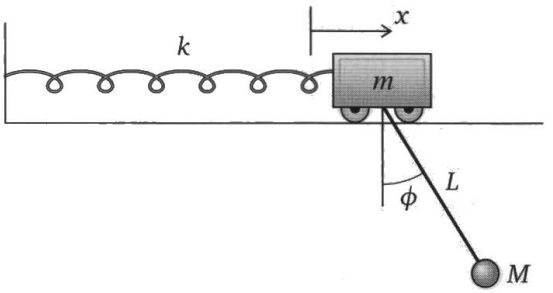


Figura 11.18. Problema 11.19.

11.19 ⋆⋆⋆ Un péndulo simple (masa M y longitud L) está suspendido de una vagoneta (masa m) que puede oscilar al final de un muelle de constante de fuerza k, como se muestra en la Figura 11.18. **(a)** Suponiendo que el ángulo ϕ permanece pequeño, escribir el lagrangiano del sistema y las ecuaciones del movimiento para x y ϕ. **(b)** Suponiendo que $m = M = L = g = 1$ y $k = 2$ (todos en unidades apropiadas) encontrar las frecuencias normales, y para cada frecuencia normal hallar y describir el movimiento del modo normal correspondiente.

11.20 ⋆⋆⋆ **(a)** Una barra delgada uniforme de longitud $2b$ está suspendida por dos muelles ligeros verticales, ambos de longitud fija l, enganchados al techo. Suponiendo sólo pequeños desplazamientos del equilibrio, hallar el lagrangiano del sistema y las frecuencias normales. Encontrar y describir los modos normales. [*Ayuda:* Una posible elección de coordenadas generalizadas sería x, el desplazamiento longitudinal de la barra, e y_1 e y_2, los desplazamientos laterales de los dos extremos de la barra. Se necesitará averiguar la altura a la que están los dos extremos por encima de la altura de equilibrio y qué ángulo ha recorrido la barra].

Secciones 11.5 El caso general y 11.6 Tres péndulos acoplados

11.21 ⋆ Verificar que si $U = \frac{1}{2}\sum_j \sum_k K_{jk} q_j q_k$, donde los coeficientes K_{jk} son todos constantes y satisfacen $K_{ij} = K_{ji}$, entonces $\partial U/\partial q_i = \sum_j K_{ij} q_j$, como se afirmaba en la ecuación (11.58).

11.22 ⋆ Escribir la energía potencial exacta de los tres péndulos de la Figura 11.13, buena para todos los ángulos, pequeños o grandes, y mostrar que la respuesta se reduce a (11.68) si los tres ángulos son pequeños.

11.23 ⋆⋆ La ecuación (11.73) da las tres frecuencias normales de los tres péndulos acoplados en unidades naturales $L = m = 1$. Ya hemos visto que el valor de ω_1^2 en unidades arbitrarias es g/L. Encontrar los valores de ω_2^2 y ω_3^2 en unidades arbitrarias. [*Ayuda:* Comenzar considerando la cantidad $\omega_2^2 - \omega_1^2$].

11.24 ⋆⋆ Dos masas iguales m se mueven sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Están sujetas por tres muelles tensos idénticos (cada uno de longitud L, tensión T), como se muestra en la Figura 11.19, de tal manera que su posición de equilibrio es una línea recta entre los soportes en A y B. Las dos masas se mueven en la dirección (y) transversal, pero no en la dirección (x) longitudinal. Escribir el lagrangiano para pequeños desplazamientos y encontrar y describir el movimiento en los modos normales correspondientes. [*Ayuda:* Para desplazamientos «pequeños», y_1 e y_2 son mucho menores que L, lo cual significa que se pueden tratar las tensiones como constantes. Por lo tanto la EP de cada muelle es sólo Td, donde d es la cantidad en la que se ha incrementado su longitud desde el equilibrio].

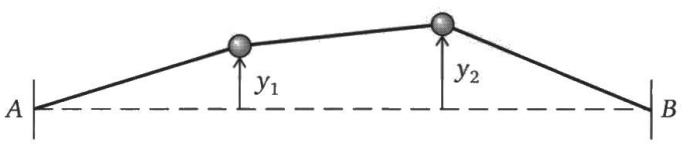


Figura 11.19. Problema 11.24.

11.25 ⋆⋆ Considerar un sistema de vagonetas y muelles como el de la Figura 11.1 excepto que hay *tres* vagonetas de igual masa y *cuatro* muelles idénticos. Resolver para las tres frecuencias normales y encontrar y describir el movimiento en los modos normales correspondientes.

11.26 ⋆⋆ Una cuenta de collar de masa m está enhebrada en un alambre sin rozamiento en forma de aro circular de radio R y masa m (misma masa). El aro está suspendido en el punto A y es libre para oscilar en su propio plano vertical como se muestra en la Figura 11.20. Usando los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 como coordenadas generalizadas, resolver para las frecuencias normales de pequeñas oscilaciones y encontrar y describir el movimiento en los modos normales correspondientes. [*Ayuda:* La EC del aro es $\frac{1}{2}I\dot{\phi}_1^2$, donde I es su momento de inercia alrededor de A y se puede encontrar usando el teorema del eje paralelo].

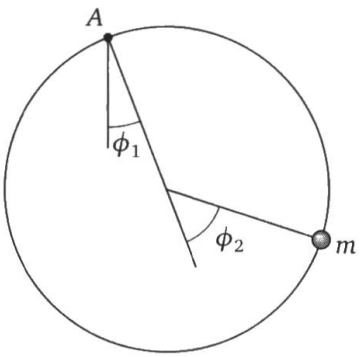


Figura 11.20. Problema 11.26.

11.27 ⋆⋆ Considerar dos vagonetas de igual masa sobre una pista horizontal sin rozamiento. Las vagonetas están conectadas entre sí por un único muelle de constante de fuerza k, pero se pueden mover libremente por la pista. **(a)** Escribir el lagrangiano y hallar las frecuencias normales del sistema. Mostrar que una de las frecuencias normales es cero. **(b)** Encontrar y describir el movimiento en el modo normal cuya frecuencia es distinta de cero. **(c)** Hacer lo mismo para el modo con frecuencia cero. [*Ayuda:* Éste requiere pensar un poco. No es inmediatamente claro cuáles son oscilaciones de frecuencia cero. Advertir que la ecuación de autovalores $(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\mathbf{a}=0$ se reduce a $\mathbf{Ka}=0$ en este caso. Considerar una solución $\mathbf{x}(t)=\mathbf{a}f(t)$, donde $f(t)$ es una función indeterminada de t y utilizar la ecuación de movimiento, $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}=-\mathbf{Kx}$, para mostrar que esta solución representa el movimiento de todo el sistema con velocidad constante. Explicar por qué este tipo del movimiento es posible aquí pero no en los ejemplos anteriores].

11.28 ⋆⋆ Un péndulo simple (masa M y longitud L) está suspendido de una vagoneta de masa m que se mueve libremente por una pista horizontal. (Ver la Figura 11.18, pero imaginando que el muelle no está). **(a)** ¿Cuáles son las frecuencias normales? **(b)** Encontrar y describir los modos normales correspondientes.

11.29 ⋆⋆⋆ Una barra delgada de longitud $2b$ y masa m está suspendida por sus dos extremos con dos muelles verticales idénticos (constante de fuerza k) que están enganchados al techo horizontal. Suponiendo que todo el sistema está obligado a moverse sólo en un plano vertical, encontrar las frecuencias y modos normales de pequeñas oscilaciones. Describir y explicar los modos normales. [*Ayuda:* Es crucial hacer una buena elección de coordenadas generalizadas. Una posibilidad sería r, ϕ y α, donde r y ϕ especifican la posición del CM de la barra relativa a un origen a medio camino entre los muelles en el techo, y α es el ángulo de inclinación de la barra. Tenere cuidado cuando se escriba la energía potencial].

11.30 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Considerar un sistema de vagonetas y muelles como el de la Figura 11.1 excepto que hay *cuatro* vagonetas de igual masa y *cinco* muelles idénticos. Resolver para las cuatro frecuencias normales y hallar y describir el movimiento en los modos normales correspondientes.

[Esto se puede resolver sin la ayuda de un ordenador, pero probablemente valdrá la pena dedicar un tiempo a aprender cómo evaluar determinantes y resolver la ecuación característica usando software apropiado].

11.31 ⋆ ⋆ ⋆ Considerar un aro horizontal sin rozamiento de radio R. En este aro enhebro tres cuentas con masas $2m$, m y m, y, entre las cuentas, tres muelles idénticos, cada uno con constante de fuerza k. Resolver para las tres frecuencias normales y encontrar y describir los tres modos normales.

11.32 ⋆ ⋆ ⋆ Como un posible modelo de molécula triatómica lineal (tal como CO_2), considerar el sistema mostrado en la Figura 11.21, con dos átomos idénticos cada uno de masa m conectados por dos muelles idénticos a un único átomo de masa M. Para simplificar las operaciones, suponer que el sistema está confinado a moverse en una dimensión. **(a)** Escribir el lagrangiano y hallar las frecuencias normales del sistema. Mostrar que una de ellas es cero. **(b)** Encontrar y describir el movimiento en las modos normales cuyas frecuencias son distintas de cero. **(c)** Hacer lo mismo para el modo con frecuencia cero. [*Ayuda:* Ver los comentarios al final del Problema 11.27].

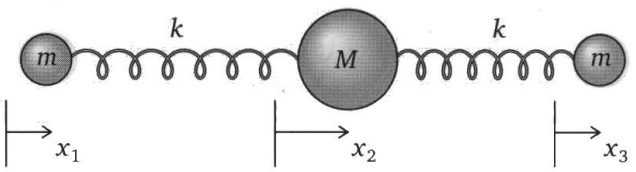


Figura 11.21. Problema 11.32.

Sección 11.7 Coordenadas normales

11.33 ⋆ Los autovectores $\mathbf{a}_{(1)}$ y $\mathbf{a}_{(2)}$ que describen el movimiento en los dos modos normales de las dos vagonetas de la Sección 11.2 están dados en (11.78). Probar que *cualquier* columna (2×1) $\mathbf{x}$ se pueden escribir como una combinación lineal de estos dos autovectores; esto es, $\mathbf{a}_{(1)}$ y $\mathbf{a}_{(2)}$ son una *base* del espacio de columnas (2×1).

11.34 ⋆ ⋆ Es una propiedad crucial de los autovectores, $\mathbf{a}_{(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{(n)}$, describir el movimiento en los modos normales de un sistema oscilante que *cualquier* columna $(n \times 1)$ $\mathbf{x}$ se puede escribir como una combinación lineal de los n autovectores; esto es, los autovectores son una *base* del espacio de columnas $(n \times 1)$. Esto se demuestra en el Apéndice, pero para ilustrarlo, hacer lo siguiente: **(a)** Escribir los autovectores $\mathbf{a}_{(1)}$, $\mathbf{a}_{(2)}$ y $\mathbf{a}_{(3)}$ para los péndulos acoplados de la Sección 11.6. (Cada uno de estos contiene un factor global arbitrario, que se puede elegir a conveniencia). Probar que tienen la propiedad de que cualquier columna (3×1) $\mathbf{x}$ se puede desarrollar en términos de ellos. **(b)** Los coeficientes en este desarrollo son las coordenadas normales ξ_1, ξ_2, ξ_3. Hallar las coordenadas normales para los tres péndulos acoplados, y explicar el sentido en el que describen los tres modos normales de la Figura 11.14.

11.35 ⋆ ⋆ Considerar los dos péndulos acoplados del Problema 11.14. **(a)** ¿Cuál sería una elección natural para las coordenadas normales ξ_1 y ξ_2? **(b)** Mostrar que incluso si ambos péndulos están sometidos a una fuerza resistiva de módulo bv (con b pequeño), las ecuaciones del movimiento para ξ_1 y ξ_2 están todavía desacopladas. **(c)** Encontrar y describir el movimiento de los dos péndulos para los dos modos.

PARTE II

Temas más avanzados

CAPÍTULO 12 Mecánica no lineal y caos
CAPÍTULO 13 Mecánica hamiltoniana
CAPÍTULO 14 Teoría de colisiones
CAPÍTULO 15 Relatividad especial
CAPÍTULO 16 Mecánica de medios continuos

La Parte I de este libro contiene el material que es de alguna manera esencial. La Parte II contiene sobre todo temas más avanzados que se podrían considerar opcionales, aunque todos son de gran importancia en la física moderna. Mientras que los capítulos de la Parte I fueron diseñados para leerse preferentemente por orden, he intentado elaborar los cinco capítulos de la Parte II mutuamente independientes, de modo que se puede escoger uno u otro según los gustos y el tiempo disponible. Si se entiende la mayor parte del material de la Parte I, entonces se puede abordar cualquiera de los capítulos de la Parte II. Esto no quiere decir que se *tenga* que haber estudiado toda la Parte I antes de leer cualquier capítulo de la Parte II. Por ejemplo, se puede leer el Capítulo 12 sobre el caos en cuanto se haya estudiado el Capítulo 5 sobre oscilaciones. Análogamente, se puede leer el Capítulo 13 sobre Mecánica hamiltoniana inmediatamente después del Capítulo 7 sobre Mecánica lagrangiana, y asimismo, el Capítulo 14 sobre Teoría de colisiones inmediatamente después del Capítulo 8 sobre movimiento de dos cuerpos.

CAPÍTULO 12

Mecánica no lineal y caos

Unos de los más famosos y gratificantes descubrimientos de las últimas décadas ha sido el reconocimiento de que la mayoría de los sistemas cuyas ecuaciones de movimiento son no lineales pueden exhibir *caos*. Este asombroso fenómeno, que se manifiesta en muchos campos diferentes (sistemas mecánicos oscilantes, reacciones químicas, flujo de fluidos, rayos láser, crecimiento de poblaciones, transmisión de enfermedades, y muchos otros) supone que aunque un sistema obedezca a ecuaciones deterministas de movimiento (tales como las leyes de Newton) su comportamiento detallado futuro puede, en la práctica, ser impredecible.

El comportamiento de un sistema mecánico caótico puede ser muy complicado, y la necesidad de describir este comportamiento ha generado una enorme variedad de maneras nuevas de visualizar el movimiento de tal sistema (órbitas del espacio de estados, secciones de Poincaré, diagramas de bifurcación). Afortunadamente existen sistemas que son suficientemente complicados como para exhibir caos, pero son aún suficientemente sencillos como para no necesitar todas estas nuevas herramientas en su descripción. En particular, un péndulo amortiguado sometido a una fuerza externa cuya ecuación del movimiento es no lineal, puede exhibir caos pero se puede describir en términos razonablemente elementales. Por esta razón, me centraré sobre todo en este sistema. Después de una revisión breve de la diferencia entre ecuaciones lineales y ecuaciones no lineales y de las propiedades de un oscilador amortiguado *lineal*, describiré con un poco de detalle el movimiento de un péndulo forzado, usando sólo gráficas directas de su posición ϕ en función del tiempo. Una vez que estén claros los fenómenos básicos, haré una introducción a algunas de las herramientas más sofisticadas que necesitaremos si queremos explorar la cada vez más abundante literatura sobre el caos. Para concluir este capítulo describiré otro sistema que puede exhibir caos (la famosa aplicación logística). Aunque este campo no es estrictamente

parte de la mecánica, muestra muchos paralelismos con los sistemas mecánicos, y tiene la gran ventaja de la simplicidad que permite un entendimiento fácil de varios aspectos de su comportamiento. También sirve para ilustrar un poco la asombrosa universalidad del caos.

En la planificación de este capítulo, he pensado que es más importante conseguir un buen entendimiento de unos pocos temas, en lugar de una mirada superficial de todo el campo. En particular, la teoría del caos está dividida en dos amplias áreas (sistemas disipativos, tales como el péndulo amortiguado, y no disipativos, o sistemas «hamiltonianos») y he decidido limitarme enteramente a los primeros. Soy consciente de que algunos lectores cuestionarán esta decisión. Muchas aplicaciones importantes de la teoría del caos (en astronomía y mecánica estadística, por ejemplo) tienen que ver con sistemas no disipativos, como lo hizo el trabajo pionero de Poincaré. Sin embargo, he observado que los temas más accesibles para el principiante son los que tienen que ver con sistemas no disipativos, y, para mantener la longitud de este capítulo razonable, he decidido tratar sólo estos últimos. Este capítulo ha de interpretarse como una muestra representativa de las cosas buenas de la teoría del caos; ciertamente no pretende contar la historia completa.

Este capítulo es muy diferente de todos los demás capítulos de este libro. La teoría del caos es nueva y no del todo elemental. (¡Y aún hay partes de la teoría por descubrir!). Requiere una mayor comprensión de las ecuaciones diferenciales que la que estoy suponiendo en este libro, y una exposición adecuada de esta teoría requeriría un libro entero, más que un capítulo.[1]

Por tanto, aquí me limitaré simplemente a *describir* las fascinantes propiedades principales del movimiento caótico, sin intentar probar que el movimiento es como estoy diciendo. Esto es realmente una situación razonablemente satisfactoria. Antes de intentar leer cualquiera de los libros más avanzados, es realmente bueno tener alguna idea de lo que supone el caos y alguna familiaridad con las herramientas utilizadas para describirlo, y son precisamente estas cosas las que pretendo comunicar aquí.

12.1 Linealidad y no linealidad

Para que un sistema exhiba caos sus ecuaciones de movimiento deben ser *no lineales*. Hemos visto ejemplos de ecuaciones lineales y no lineales de vez en cuando en este libro, pero repasemos ahora estos dos conceptos. La ecuación diferencial es lineal si

[1] Varios de estos libros existen en la literatura, de los cuales mi favorito es *Nonlinear Dynamics and Chaos* por Steven H. Strogatz, Addison-Wesley, Reading, MA (1994), pero atención, son necesarios ocho capítulos de preliminares matemáticos antes de llegar al caos.

relaciona la variable o variables dependientes y sus derivadas sólo linealmente. El movimiento de una vagoneta (de masa m) sobre un muelle (de constante recuperadora k),

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{12.1}$$

es una ecuación para la posición x de la vagoneta. Análogamente, las ecuaciones de movimiento para las dos vagonetas discutida en el Capítulo 11 [las Ecuaciones (11.2) por ejemplo] son ecuaciones lineales para las dos posiciones de los vagonetas, x_1 y x_2. Si aplicamos una fuerza externa $F(t)$ sobre la vagoneta de la ecuación (12.1), la ecuación resultante,

$$m\ddot{x} = -kx + F(t), \tag{12.2}$$

es todavía lineal [aunque ya no es homogénea, pues el término «no homogéneo» $F(t)$ no incluye la variable x en absoluto]. Por el contrario, la ecuación del movimiento para un péndulo simple (de masa m y longitud L) es $I\ddot{\phi} = \Gamma$ o

$$mL^2\ddot{\phi} = -mgL \operatorname{sen}\phi, \tag{12.3}$$

que es una ecuación *no lineal* en ϕ, pues $\operatorname{sen}\phi$ es no lineal en ϕ. (Si las oscilaciones son pequeñas, entonces $\operatorname{sen}\phi \approx \phi$, y la ecuación se aproxima bien con la ecuación lineal; en general, sin embargo, la ecuación para el péndulo simple es no lineal). Otro ejemplo es la ecuación del movimiento para un único planeta en el campo gravitatorio del Sol,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -GmM\hat{\mathbf{r}}/r^2, \tag{12.4}$$

que es una ecuación no lineal para las variables $\mathbf{r} = (x, y, z)$ pues el término de fuerza es no lineal en x, y y z. Estos dos ejemplos muestran que las ecuaciones no lineales no son especialmente inusuales. Por el contrario, muchos sistemas perfectamente cotidianos tienen ecuaciones de movimiento que son no lineales.

Hasta el momento, en este libro, la principal diferencia entre ecuaciones diferenciales lineales y no lineales ha sido que las primeras se han resuelto fácilmente de forma analítica, mientras que la mayoría de las segundas ha sido *imposible* resolverlas analíticamente. De hecho, nuestra experiencia en este tema refleja el estado real de las cosas: casi todas las ecuaciones lineales de la mecánica *son* resolubles analíticamente, y casi ninguna de las no lineales lo es.[2] Esta circunstancia tiene en gran parte la culpa del fracaso hasta que los científicos reconocieron que el caos es un

[2] Uno de los ejemplos raros de una ecuación no lineal resoluble es (12.4) para un planeta, cuya órbita encontramos en el Capítulo 8. Pero advierta que hicimos esto mediante un ingenioso cambio de variables que redujo la ecuación no lineal (8.37) para r a la ecuación lineal (8.45) para u.

fenómeno importante y ampliamente extendido. Debido a que las ecuaciones no lineales son tan intratables, los libros de texto siempre se han ocupado de problemas lineales. Cuando los problemas no lineales se *tuvieron* que afrontar, normalmente se resolvían usando aproximaciones que los reducían a problemas lineales. De esta manera, la variedad tan asombrosamente rica de complicaciones que aparecen en los sistemas no lineales permanecieron casi completamente desconocidas. La primera persona que se dio cuenta de algunas de las manifestaciones del caos fue el matemático francés Poincaré (1854–1912) en sus estudios sobre el problema gravitatorio de los tres cuerpos (el movimiento de tres cuerpos, tales como el Sol, la Tierra y la Luna, que interaccionan por medio de la fuerza gravitatoria). La ecuación del movimiento para este sistema es no lineal, como su homóloga (12.4), y Poincaré observó que exhibe el fenómeno ahora conocido como *sensibilidad a las condiciones iniciales* que, como veremos, es una de las características del movimiento caótico.

El hecho de que los físicos casi no tuvieran en cuenta la observación de Poincaré del caos hasta la década de 1970 se debió probablemente a varios factores. Los descubrimientos de la Relatividad (1905) y después de la Mecánica Cuántica (alrededor de 1925) desviaron la atención de la mayoría de los físicos de la mecánica clásica, debido a que la dificultad para resolver ecuaciones no lineales sin la ayuda de los ordenadores desmotivó la búsqueda de soluciones a los problemas no lineales. En cualquier caso fue ya en los años 70 cuando las soluciones de varios problemas no lineales obtenidas con ordenadores[3] centraron la atención de muchos científicos (físicos y muchos otros) en el fenómeno que ahora denominamos caos.

La no linealidad es esencial para el caos (si las ecuaciones del movimiento de un sistema son lineales, no pueden exhibir caos). Pero la no linealidad no garantiza el caos. Por ejemplo, la ecuación (12.3) para un péndulo simple es no lineal, pero incluso cuando la amplitud es grande (y la aproximación lineal no es buena en absoluto) el péndulo simple nunca exhibe caos. Por otro lado, si añadimos una fuerza de amortiguamiento $-bv = -bL\dot{\phi}$ y una fuerza externa que dependa del tiempo $F(t)$, (12.3) se convierte en la ecuación del *péndulo amortiguado y forzado*:

$$mL^2\ddot{\phi} = -mgL\,\mathrm{sen}\,\phi - bL^2\dot{\phi} + LF(t) \tag{12.5}$$

y esta ecuación *sí* conduce al caos para algunos valores de los parámetros. Informalmente hablando, el requisito para el caos es que las ecuaciones de movimiento sean no lineales y *de alguna manera complicadas*. La ecuación (12.3) para el péndulo simple no es suficientemente complicada, pero la ecuación (12.5) para el péndulo amortiguado y forzado sí lo es. Lamentablemente, una discusión sobre lo que es «su-

[3] Los primeros de tales cálculos, sobre la convección atmosférica, fueron hechos por el meteorólogo Edward Lorenz en el MIT en 1963, pero este trabajo no llamó demasiado la atención hasta la década siguiente. Para ver una historia exhaustiva, pero muy legible, de la teoría del caos, vea *Chaos, Making a New Science* escrito por James Gleick, Viking-Penguin, New York (1987).

ficientemente complicado» para producir caos estaría bastante más allá del alcance de este libro.[4]

Otro ejemplo relativamente simple de sistema no lineal que exhibe caos es el péndulo doble de la Sección 11.4. En la aproximación de ángulo pequeño, las ecuaciones de movimiento para el péndulo doble son ecuaciones lineales para los dos ángulos ϕ_1 y ϕ_2 [vea (11.41) y (11.42)], pero en general son no lineales (vea el Problema 11.15), y son lo suficientemente complicadas como para producir caos. El péndulo amortiguado y forzado y el péndulo doble son dos de los sistemas mecánicos más sencillos que exhiben caos. El péndulo amortiguado y forzado tiene sólo un grado de libertad (se necesita una coordenada, ϕ, para especificar su configuración), mientras que el péndulo doble tiene dos (son necesarias dos coordenadas, ϕ_1 y ϕ_2). Por esta razón el péndulo amortiguado y forzado es el más sencillo de analizar y será aquí nuestro principal tema de discusión.

¿Por qué son tan especiales los términos no lineales?

Dentro del enorme conjunto de todas las posibles ecuaciones diferenciales, las ecuaciones lineales forman un subconjunto minúsculo, con muchas propiedades sencillas que no comparte la ecuación general no lineal. Por ello son las ecuaciones lineales las que son realmente «especiales». Sin embargo, por razones ya mencionadas, muchos físicos están más familiarizados con el caso lineal y, a veces, se sienten tentados a suponer que las propiedades típicas de las ecuaciones lineales también las tendrán las ecuaciones no lineales. Esta peligrosa suposición es frecuentemente incorrecta. En particular, el mensaje principal de este capítulo es que el caos, que nunca aparece en sistemas lineales, es algo que ocurre normalmente en sistemas no lineales. Desafortunadamente, la teoría subyacente de esta particular diferencia está más allá del alcance de este libro, y nos tendremos que conformar con ver algunos ejemplos sencillos del movimiento caótico, sin tener una comprensión detallada de *por qué* ocurre el caos. Aquí me gustaría mencionar sólo una enorme diferencia entre las ecuaciones lineales y las no lineales que pone de manifiesto la importancia de no dejar que los

[4] Para que conste, el criterio es este: como veremos en el Capítulo 13, un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden (como la segunda Ley de Newton) para n variables se puede normalmente reescribir como un conjunto de ecuaciones de primer orden para N variables, $\xi_1, \ldots, \xi_N$ donde $N > n$, con la forma general $\dot{\xi}_i = f_i(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ para $i = 1, \ldots, N$. Por ejemplo, si escribimos $\dot{\phi} = \omega$, la ecuación (12.3) para el ángulo ϕ del péndulo simple se convierte en dos ecuaciones de primer orden, una para ϕ y otra para ω, a saber $\dot{\phi} = \omega$ y $\dot{\omega} = -(g/L)\operatorname{sen}\phi$. Cuando los segundos miembros de estas ecuaciones son independientes de t (como lo son) se dice que las ecuaciones son *autónomas*. Para que un sistema disipativo exhiba caos, sus ecuaciones de movimiento, cuando se ponen en su forma estándar autónoma, deben ser no lineales y tener N variables con $N \geq 3$. Los sistemas no disipativos necesitan la no linealidad y $N \geq 4$.

prejuicios lineales que muchos de nosotros compartimos nos desvíen en nuestro estudio de las ecuaciones no lineales.

Las ecuaciones no lineales no cumplen el principio de superposición

Vimos en el Capítulo 5 que las ecuaciones lineales homogéneas cumplen el principio de superposición (cualquier combinación lineal de las soluciones nos da otra solución). Hemos usado este resultado varias veces, en particular en los Capítulos 5 y 11, pero permítanme que les refresque la memoria con el ejemplo de una ecuación de segundo orden de la forma

$$p(t)\ddot{x}(t) + q(t)\dot{x}(t) + r(t)x(t) = 0, \tag{12.6}$$

donde $x(t)$ es la incógnita y $p(t), q(t)$ y $r(t)$ son funciones fijas conocidas. [Un ejemplo de tal ecuación es (12.1) para una vagoneta sobre un muelle]. Advierta primero que, como cada término en esta ecuación es lineal en $x(t)$ (o sus derivadas), podemos multiplicar por una constante a y ver de una vez que si $x(t)$ es una solución, entonces también lo es $ax(t)$. Segundo, si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son ambas soluciones, entonces podemos sumar las correspondientes expresiones, una para $x_1(t)$ y una para $x_2(t)$, y concluir que $x_1(t) + x_2(t)$ es también una solución. Por consiguiente cualquier combinación lineal

$$x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$$

es también una solución de (12.6) (el resultado denominado principio de superposición). Por otro lado, es fácil ver que ninguno de estos argumentos se aplica si la ecuación es no lineal. [Asegúrese de que se entiende esto. Supongamos, por ejemplo, que el último término en (12.6) fuera $r(t)\sqrt{x(t)}$; vea el Problema 12.3]. Por lo tanto, el principio de superposición no se aplica a ecuaciones no lineales.

Una consecuencia importante del principio de superposición que hemos usado repetidamente es esta: para encontrar todas las soluciones de (12.6) sólo tenemos que encontrar dos soluciones independientes $x_1(t)$ y $x_2(t)$; entonces *toda* solución se puede expresar como una combinación lineal de $x_1(t)$ y $x_2(t)$. De modo más general, para hallar todas las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden, sólo tenemos que encontrar n soluciones independientes y entonces toda solución se puede expresar como una combinación lineal de estas n soluciones. Como el principio de superposición no aplica a ecuaciones no lineales, esta gran simplificación no aplica a ecuaciones no lineales.

Existe una situación análoga correspondiente a ecuaciones homogéneas, tales como (12.2) y (12.5), de nuevo como vimos en el Capítulo 5. Si $x_p(t)$ es cualquier solución particular de una ecuación *lineal* no homogénea de n-ésimo orden, entonces *toda* solución se puede escribir como $x_p(t)$ más una combinación lineal de n soluciones independientes de la ecuación homogénea correspondiente. Para ecuaciones

no lineales, no existe un resultado correspondiente (Problema 12.4). Entonces toda solución de cualquier ecuación lineal de n-ésimo orden (homogénea o no homogénea) se puede expresar simplemente en términos de n funciones independientes, pero para ecuaciones no lineales no existe tal expresión sencilla.

Teniendo en cuenta estas observaciones generales sobre ecuaciones no lineales, consideremos la ecuación no lineal que discutiremos en detalle, la ecuación (12.5) para un péndulo amortiguado y forzado. Primero describiré algunas características de su movimiento que podríamos esperar (o al menos que no son del todo inesperadas), y después abordaré las características sorprendentes asociadas al movimiento caótico de esos péndulos.

12.2 El péndulo amortiguado forzado (PAF)

La ecuación del movimiento para el **péndulo amortiguado forzado** (o **PAF**) se dio en (12.5). Como esta ecuación nos va a mantener ocupados durante las siguientes secciones, me gustaría asegurarme de que está claro de dónde vino y escribirla de una forma más conveniente. El péndulo está esbozado en la Figura 12.1. La ecuación del movimiento es justo $I\ddot{\phi} = \Gamma$, donde I es el momento de inercia y Γ es el momento de fuerza alrededor del anclaje. En este caso $I = mL^2$, y el momento de fuerza proviene de las tres fuerzas mostradas en la Figura 12.1. La fuerza resistiva tiene módulo bv y por ello ejerce un momento de fuerza $-Lbv = -bL^2\dot{\phi}$. El momento del peso es $-mgL\,\mathrm{sen}\,\phi$, y el de la fuerza externa es $LF(t)$. Por consiguiente la ecuación del movimiento $I\ddot{\phi} = \Gamma$ es

$$mL^2\ddot{\phi} = -bL^2\dot{\phi} - mgL\,\mathrm{sen}\,\phi + LF(t) \tag{12.7}$$

exactamente como en (12.5).

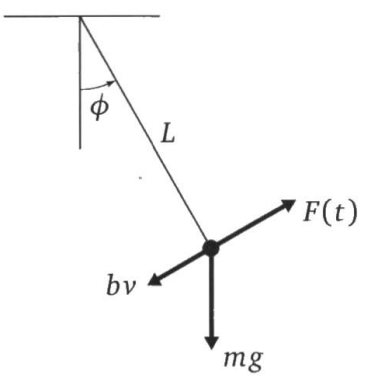


Figura 12.1. Las tres fuerzas importantes que actúan sobre el péndulo amortiguado forzado son la fuerza resistiva con módulo bv, el peso mg, y la fuerza externa $F(t)$. (Existe también una fuerza de reacción desde el anclaje hacia arriba, pero no contribuye en nada al momento de fuerza).

En este capítulo supondré que la fuerza externa $F(t)$ es sinusoidal, específicamente que

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \tag{12.8}$$

donde F_0 es la *amplitud aplicada* (la amplitud de la fuerza externa) y ω la **frecuencia aplicada**. Tal como argumenté en el Capítulo 5, varias fuerzas externas interesantes y reales se aproximan a esta forma sinusoidal bastante bien, y se ha demostrado que es posible reproducir tales fuerzas sinusoidales con excelente precisión para experimentos sobre caos. Sustituyendo en (12.7) y reorganizando un poco, encontramos que

$$\ddot{\phi} + \frac{b}{m}\dot{\phi} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\phi = \frac{F_0}{mL}\cos\omega t. \tag{12.9}$$

En esta ecuación, se reconocerá el coeficiente b/m como la constante que renombramos como 2β en el Capítulo 5,

$$\frac{b}{m} = 2\beta,$$

donde β se llamó **constante de amortiguamiento**. Análogamente el coeficiente g/L es justo ω_0^2,

$$\frac{g}{L} = \omega_0^2,$$

donde ω_0 es la **frecuencia natural** del péndulo. Finalmente, el coeficiente F_0/mL debe tener dimensiones de (tiempo)$^{-2}$; esto es, F_0/mL tiene las mismas unidades que ω_0^2. Es conveniente reescribir este coeficiente como $F_0/mL = \gamma\omega_0^2$. Es decir, introducimos el parámetro adimensional

$$\gamma = \frac{F_0}{mL\omega_0^2} = \frac{F_0}{mg}, \tag{12.10}$$

que denominaré **fuerza de perturbación** y es justo el cociente de la amplitud aplicada F_0 por el peso mg. Este parámetro γ es una medida sin dimensiones de la intensidad de la fuerza externa. Cuando $\gamma < 1$, la fuerza externa es menor que el peso y esperaríamos que produjera un movimiento relativamente pequeño. (Por ejemplo, la fuerza externa es insuficiente para mantener el péndulo fuera en $\phi = 90°$). A la inversa, si $\gamma \geq 1$, la fuerza externa excede el peso del péndulo, y deberíamos anticipar que producirá movimientos a mayor escala (por ejemplo, un movimiento en el que el péndulo es empujado todo el recorrido hasta la parte de arriba $\phi = \pi$).

Haciendo todas estas sustituciones, obtenemos la última forma de la ecuación del movimiento (12.9) para un péndulo amortiguado forzado

$$\ddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_0^2 \operatorname{sen}\phi = \gamma\omega_0^2 \cos\omega t. \qquad (12.11)$$

Esta es la ecuación cuyas soluciones estudiaremos en las siguientes secciones.

12.3 Algunas características esperadas del PAF

Propiedades del oscilador lineal

Para apreciar la extraordinaria riqueza del movimiento caótico de nuestro péndulo amortiguado forzado, debemos primero repasar qué tipo de comportamiento podemos *esperar*, basado en nuestras experiencias con osciladores lineales. Específicamente, si soltamos el péndulo cerca de la posición de equilibrio $\phi = 0$ con una pequeña velocidad inicial y si la desviación aplicada es pequeña, $\gamma \ll 1$, esperaríamos que ϕ permaneciera pequeño en todo instante. Por consiguiente deberíamos ser capaces de aproximar el término $\operatorname{sen}\phi$ en (12.11) por ϕ, y la ecuación del movimiento se convertiría en la ecuación lineal

$$\ddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = \gamma\omega_0^2 \cos\omega t \qquad (12.12)$$

que tiene exactamente la forma de (5.57) para el oscilador lineal del Capítulo 5. Por ello el comportamiento «esperado» del péndulo amortiguado forzado, al menos para una fuerza externa suficientemente débil, es justo el comportamiento descrito en la Sección 5.5. Este comportamiento se puede resumir rápidamente: el comportamiento inicial del péndulo depende de las condiciones iniciales, pero cualesquiera diferencias (o «transitorios») debidas a las condiciones iniciales se extinguen rápidamente, y el movimiento se aproxima a un único atractor, en el cual el péndulo oscila sinusoidalmente con exactamente la misma frecuencia que la fuerza externa:

$$\phi(t) = A\cos(\omega t - \delta). \qquad (12.13)$$

Estas predicciones se encuentran bien ilustradas en la Figura 12.2, la cual muestra el movimiento real del péndulo amortiguado forzado para una drive strength bastante débil de $\gamma = 0{,}2$. [Como la ecuación exacta del movimiento (12.11) no se puede resolver analíticamente, este y todos las representaciones subsecuentes del movimiento de PAF se hicieron a partir de soluciones numéricas de (12.11).[5]]

[5] Todas estas gráficas se hicieron utilizando la función numérica NDSolve del programa Mathematica. Para muchas gráficas la precisión por defecto de 15 dígitos fue más que suficiente, pero donde hubo alguna razón para dudar, la precisión se incrementó en pasos enteros hasta que dos cálculos sucesivos fueran indistinguibles.

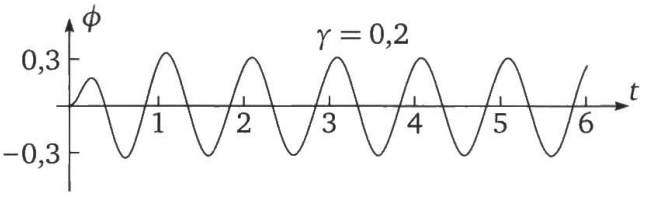


Figura 12.2. Movimiento de un PAF con una fuerza externa relativamente débil de $\gamma = 0{,}2$. El período aplicado se eligió para que fuera $\tau = 1$, así que el eje horizontal da el tiempo en unidades del período aplicado. Se puede ver claramente que después de unos dos ciclos el movimiento se ha estabilizado a un movimiento perfectamente sinusoidal con período igual al período aplicado.

La frecuencia aplicada se eligió que fuera $\omega = 2\pi$, así que el período aplicado es $\tau = 2\pi/\omega = 1$. Esto significa que el eje horizontal muestra el tiempo en unidades del período aplicado. La frecuencia natural se eligió para que fuera $\omega_0 = 1{,}5\omega$, así que el sistema está bastante cerca de la resonancia, porque ahí es donde el movimiento caótico es normalmente más fácil de encontrar.[6] La característica más importante de esta gráfica es que después de unos dos ciclos el movimiento se ha estabilizado en un movimiento puramente sinusoidal con exactamente el período de la fuerza externa, $\tau = 1$. Las condiciones iniciales elegidas para esta representación fueron que $\phi = \dot{\phi} = 0$ en $t = 0$. Es un hecho (aunque no se pueda mostrar la gráfica) que, sean cuales sean las condiciones iniciales que elijamos, el movimiento de un oscilador lineal siempre se aproximará al mismo (único) atractor a medida que los transitorios iniciales se extinguen.

Resumiendo, para un oscilador lineal amortiguado, con una fuerza externa sinusoidal: **(1)** Existe un único atractor al que se aproxima el movimiento, sin tener en cuenta las condiciones iniciales elegidas. **(2)** El movimiento de este atractor es también sinusoidal con frecuencia exactamente igual a la frecuencia aplicada.

Oscilaciones casi lineales del PAF

Imaginémonos ahora que aumenta la fuerza de conducción de tal manera que la amplitud de la oscilación aumenta hasta un valor donde la aproximación

$$\operatorname{sen}\phi \approx \phi$$

deja de ser válida. Siempre que la amplitud no sea demasiado grande, esperaríamos obtener una aproximación satisfactoria incluyendo sólo un término más en el desarrollo de Taylor para $\operatorname{sen}\phi$ y escribir

$$\operatorname{sen}\phi \approx \phi - \tfrac{1}{6}\phi^3.$$

[6] Los otros parámetros usados fueron como sigue: constante de amortiguamiento $\beta = \omega_0/4$, y condiciones iniciales $\phi = \dot{\phi} = 0$ en $t = 0$.

Si usamos esta aproximación en la ecuación exacta de movimiento (12.11), obtenemos la ecuación aproximada

$$\ddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_o^2\left(\phi - \tfrac{1}{6}\phi^3\right) = \gamma\omega_o^2\cos\omega t. \tag{12.14}$$

Hasta el punto en que el nuevo término no lineal que incluye ϕ^3 sea pequeño, podemos anticipar que la solución de esta ecuación será todavía razonablemente aproximada (una vez que los transitorios han desaparecido) por una expresión de la misma forma que antes,

$$\phi(t) \approx A\cos(\omega t - \delta).$$

Cuando ponemos esto en (12.14), el pequeño término que incluye ϕ^3 contribuye con un término proporcional a $\cos^3(\omega t - \delta)$. Debido a que

$$\cos^3 x = \tfrac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x) \tag{12.15}$$

(vea el Problema 12.5) hay ahora un pequeño término en el primer miembro de (12.14) proporcional a $\cos 3(\omega t - \delta)$. Como el segundo miembro no contiene términos con esta dependencia temporal, se sigue que al menos uno de los términos del primero (ϕ, $\dot{\phi}$ o $\ddot{\phi}$, y de hecho los tres) lo debe hacer. Esto es, una expresión más exacta de $\phi(t)$ debe tener la forma

$$\phi(t) = A\cos(\omega t - \delta) + B\cos 3(\omega t - \delta), \tag{12.16}$$

con B mucho menor que A. Por lo tanto, debemos anticipar que, cuando incrementamos la fuerza externa y la amplitud aumenta, la solución tendrá un pequeño término que oscila con frecuencia 3ω.

Podemos repetir este argumento: si sustituimos la solución mejorada (12.16) otra vez en (12.14), entonces el término en ϕ^3 nos dará incluso términos menores de la forma $\cos n(\omega t - \delta)$, con n un entero mayor que 3. Por lo tanto debemos esperar correcciones menores que (12.16) con frecuencias $n\omega$, con n igual a varios enteros. Cualquier término que oscila con frecuencia igual a un múltiplo entero ω se denomina un **armónico** de la frecuencia aplicada. Por consiguiente nuestra conclusión es que, a medida que la fuerza externa aumenta y la no linealidad se hace más importante, el movimiento del péndulo tomará varios armónicos de la frecuencia aplicada ω, siendo el más importante el armónico $n = 3$ ya incluido en (12.16).

El armónico n-ésimo, con frecuencia $n\omega$, es periódico con período $\tau_n = 2\pi/n\omega = \tau/n$, donde $\tau = 2\pi/\omega$ es el período aplicado. Por consiguiente en un período, el armónico n-ésimo se repite a sí mismo n veces. En particular, en un período aplicado, cada armónico habrá vuelto atrás a su valor original, y un movimiento compuesto de varios armónicos será todavía periódico con el mismo período que la fuerza externa.

La principal diferencia entre el movimiento que implica (12.16) (posiblemente con otros armónicos incluidos) y el movimiento (12.13) del oscilador lineal es que,

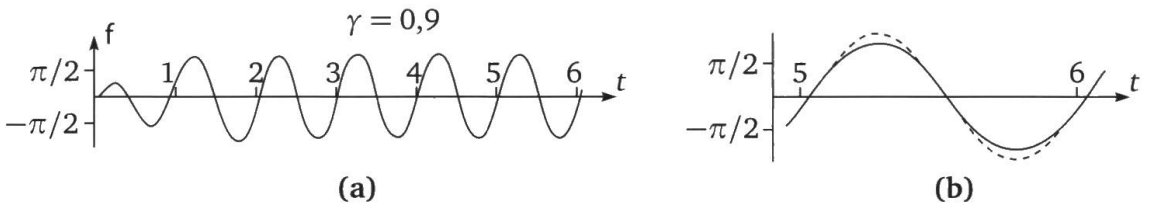


Figura 12.3. (a) Movimiento de un PAF con una fuerza externa $\gamma = 0{,}9$ (y todos los demás parámetros iguales que en la Figura 12.2). Después de dos o tres ciclos, el movimiento se estabiliza en una oscilación regular, que tiene un período igual al período aplicado y parece al menos aproximadamente sinusoidal. **(b)** La curva continua es una ampliación de un único ciclo de la parte (a), desde $t = 5$ hasta 6. La curva a trazos, que es un coseno puro con la misma frecuencia, fase y pendiente donde cruza el eje, muestra claramente que el movimiento real ya no es perfectamente sinusoidal; es apreciablemente más plano en los extremos.

con su término (o términos) extra, (12.16) ya no está dado por una única función coseno. Deberíamos ser capaces de ver esto en una gráfica de $\phi(t)$ frente a t, que debe desviarse ligeramente de una forma sinusoidal pura. Sin embargo, en el régimen que estamos considerando, el coeficiente B en (12.16) y los coeficientes de cualesquiera armónicos mayores son mucho menores que A, y la diferencia entre el movimiento real y un coseno puro es bastante difícil de ver. La Figura 12.3(a) muestra el movimiento de un péndulo amortiguado forzado con fuerza externa $\gamma = 0{,}9$ (debajo de nuestra frontera aproximada en $\gamma = 1$ entre fuerzas externas débiles y fuertes). Igual que en la Figura 12.2, el movimiento se ha estabilizado rápidamente a una oscilación estable con exactamente el mismo período que la fuerza externa. A primera vista la curva (después de unos $t = 2$) parece ser un coseno puro, pero haciendo un examen más detallado puede uno convencerse a sí mismo de que es un poco plano en exceso en los valles y las crestas. La Figura 12.3(b) es una ampliación de un ciclo del movimiento (curva continua), con un coseno puro superpuesto con el mismo período y la misma fase (curva a trazos). Esta comparación muestra claramente que el movimiento real ya no es un único coseno puro.[7]

El comportamiento del PAF en los regímenes lineal y casi lineal se puede resumir rápidamente: cuando los transitorios iniciales desaparecen, el movimiento se aproxima a un único atractor, en el cual el péndulo oscila con el mismo período que la fuerza aplicada. En el régimen lineal (fuerza externa $\gamma \ll 1$) este movimiento limitante está dado por una función coseno sencilla con frecuencia igual a la frecuencia

[7] La forma aplanada en los extremos es coherente con (12.16): B y A tienen signos opuestos, el segundo término en (12.16) reduce $\phi(t)$ en las crestas y valles y lo aumenta cerca donde cruza el eje. El comportamiento es fácil de entender físicamente: en los extremos, el momento restaurador de la gravedad ($mgL \operatorname{sen}\phi$) es más débil que la aproximación lineal ($mgL\phi$), y el movimiento real es menos curvado.

aplicada ω. En el régimen no del todo lineal (γ un poco mayor, pero definitivamente no mucho mayor que 1), el movimiento limitante es todavía periódico, con el mismo período, pero recoge alguno armónicos y es la suma de cosenos con frecuencias $n\omega$ como en (12.16). Como veremos en la siguiente sección, sólo tenemos que aumentar la fuerza externa un poco por encima de $\gamma = 1$ para encontrarnos con algún comportamiento radicalmente diferente.

12.4 El PAF: aproximación al caos

Vamos a continuar ahora incrementando la fuerza externa de nuestro PAF. La Figura 12.4 muestra el movimiento (ϕ frente a t) para los mismos parámetros y condiciones iniciales como en las últimas dos figuras, excepto que he aumentado la fuerza externa a $\gamma = 1{,}06$, justo un poco por encima de la frontera aproximada en $\gamma = 1$ entre fuerza externa débil y fuerte. Lo más llamativo de esta representación es la oscilación acusada del movimiento transitorio inicial. En los primeros tres ciclos, el péndulo oscila desde $\phi = 0$ hasta casi 5π; esto es, realiza casi dos rotaciones y media en el sentido contrario a las agujas del reloj. En los dos ciclos siguientes oscila atrás hasta casi $\phi = \pi$ y finalmente se estabiliza hasta oscilaciones más o menos sinusoidales alrededor de $\phi \approx 2\pi$. (La posición $\phi = 2\pi$ es, por supuesto, la misma que $\phi = 0$, pero la afirmación de que ϕ finalmente se centra en 2π tiene todavía sentido, indicando que el péndulo ha realizado una rotación neta en sentido contrario a las agujas del reloj desde $t = 0$).

Basándose en una gráfica como la de la Figura 12.4 es imposible estar completamente seguro de que realmente el movimiento final es exactamente periódico. Una manera de examinar esta cuestión más detenidamente es imprimir las posiciones $\phi(t)$ en intervalos sucesivos de un ciclo, $t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, t_0 + 3, \ldots$ Cuanto mayor sea el t_0 elegido, estas posiciones coincidirán más estrechamente una con otra (si el movimiento final es efectivamente periódico). Por ejemplo, comenzando en $t = 34$ las posiciones $\phi(t)$ (como las dadas por la misma solución numérica en la que estaba basada la Figura 12.4) son

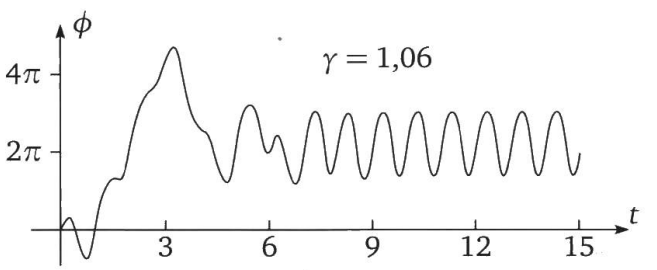


Figura 12.4. Movimiento de un PAF con fuerza externa $\gamma = 1{,}06$. Los transitorios iniciales, bastante descontrolados, se extinguen después de 9 ciclos, y el movimiento se estabiliza a un atractor con el mismo período que la fuerza externa.

t	$\phi(t)$
34	6,0366
35	6,0367
36	6,0366
37	6,0366
38	6,0366
39	6,0366

con todos los valores subsiguientes iguales a 6,0366. Evidentemente, para cinco cifras significativas, el movimiento se ha estabilizado a perfectamente periódico después de 35 ciclos.[8] Por supuesto, es *posible* que el movimiento haga algo no periódico entre los instantes enteros mostrados, y ciertamente nadie aceptaría nuestros datos como una demostración matemática. Sin embargo, la evidencia es abrumadora: para $\gamma = 1{,}06$ (y con las condiciones iniciales usadas) $\phi(t)$ sí se aproxima a un atractor que es periódico con el mismo período que la fuerza externa. A este respecto, el movimiento mostrado para $\gamma = 1{,}06$ no es muy diferente de aquel para $\gamma = 0{,}9$ como se muestra en la Figura 12.3. Con todo ello, las acusadas oscilaciones iniciales que aparecen en la Figura 12.4 son precursoras de los interesantes desarrollos que van a venir.

Período dos

La Figura 12.5(a) corresponde exactamente a la figura anterior excepto que he aumentado ahora la fuerza externa a $\gamma = 1{,}073$. De nuevo, lo más obvio es la oscilación descontrolada inicial, que ahora dura cerca de 20 ciclos antes de que el movimiento se estabilice a oscilaciones estables que son al menos aproximadamente sinusoidales. Sin embargo, si observamos detenidamente estas oscilaciones, nos daremos cuenta de que las crestas y los valles (especialmente los valles) no son todos de la misma altura. La Figura 12.5(b) son los mismos valles entre $t = 20$ y 30 aumentados varias veces, y se puede ver claramente que los valles alternan entre dos alturas distintas. Se puede quizá pensar si esta alteración es por sí misma un transitorio que desaparecerá después de un número suficiente de ciclos, pero esto no es en realidad así. Una representación de las oscilaciones para $990 \leq t \leq 1000$ parece exactamente la misma que aquella para $20 \leq t \leq 30$. Otra manera de mostrar esto es dibujar los valores numéricos de $\phi(t)$ en intervalos de un ciclo. Comenzando en $t = 30$, esto da

[8] Naturalmente, el movimiento no tarda más en estabilizarse a una constante si exigimos más cifras significativas. Por ejemplo, no es hasta que han pasado 46 ciclos que $\phi(t)$ empieza a repetir seis cifras significativas, después de las cuales $\phi(t) = 6{,}03662$ para $t = 46, 47, 48, \cdots$.

t	$\phi(t)$
30	−6,6438
31	−6,4090
32	−6,6438
33	−6,4090
34	−6,6438
35	−6,4090

un patrón que se repite de manera precisa para siempre. Evidentemente, hacia $t = 30$, el movimiento se estabiliza de manera que $\phi(t)$ tiene el valor −6,6438 (con cinco cifras significativas) para todos los valores pares de t y tiene el valor distinto −6,4090 para todos los valores impares de t.

Este comportamiento significa que el movimiento ya no se repite a sí mismo con la frecuencia de la fuerza externa. Más bien, el movimiento es periódico con período igual a *dos veces el período aplicado*, y decimos que el movimiento tiene **período dos**. (En nuestras unidades esta última afirmación es literalmente cierta; en general significa que el período del movimiento es dos veces el período aplicado). Es importante reconocer que este desarrollo es bastante diferente de la aparición de los armónicos que vimos en el caso de movimiento casi lineal. Un armónico tiene frecuencia $n\omega$, un

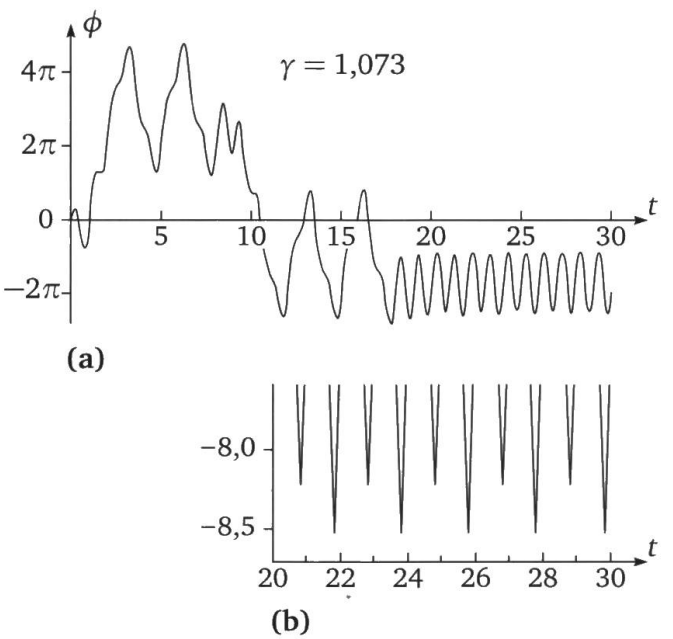


Figura 12.5. **(a)** Primeros 30 ciclos de un PAF con fuerza externa $\gamma = 1{,}073$. Las oscilaciones descontroladas iniciales persisten durante casi 20 ciclos, después de los cuales el movimiento se estabiliza a un atractor que es aproximadamente sinusoidal. Sin embargo, una inspección más a fondo muestra que las crestas y los valles de este atractor no son todas de la misma altura. **(b)** Una ampliación del atractor para $20 \leq t \leq 30$ muestra los mismos valles de la parte (a). Los valles alternan en altura, repitiéndose a sí mismos una vez cada *dos* ciclos.

múltiplo entero de la frecuencia aplicada, y por tanto período igual a un *submúltiplo* entero del período aplicado. Lo que hemos encontrado ahora tiene período igual a un *múltiplo* entero del período aplicado, y por tanto frecuencia ω/n, que se puede describir como un **subarmónico** de la frecuencia aplicada. En la Figura 12.5(a) se puede ver que el movimiento es todavía casi sinusoidal con el período de la fuerza externa (período 1). Por consiguiente, el término dominante en $\phi(t)$ es todavía de la forma $A\cos(\omega t - \delta)$; sin embargo, $\phi(t)$ definitivamente contiene un pequeño término subarmónico con período 2.

Período tres

Aunque el atractor mostrado en la Figura 12.5 tiene período dos, el comportamiento dominante es todavía claramente de período uno; esto es, el nuevo subarmónico $n = 2$ sólo contribuye con una pequeña cantidad a la solución. Si aumentamos la fuerza externa un poco más, encontramos un atractor para el cual el subarmónico es el término dominante. La Figura 12.6 muestra los primeros 15 ciclos del movimiento de un PAF con la fuerza externa aumentada hasta $\gamma = 1{,}077$ (y todos los demás parámetros los mismos que antes). En este caso es obvio a simple vista que el movimiento se estabiliza a un atractor que se repite a sí mismo cada *tres* ciclos y por tanto tiene período tres. Mientras que sería difícil cuestionar que esta gráfica tiene período tres, podemos reforzar la conclusión observando los valores de $\phi(t)$ a intervalos de un ciclo. Comenzando desde $t = 30$ estos son como sigue:

t	$\phi(t)$
30	13,81225
31	7,75854
32	6,87265
33	13,81225
34	7,75854
35	6,87265
36	13,81225
37	7,75854
38	6,87265

con exactamente el mismo patrón que se repite una vez cada tres ciclos, y continúa indefinidamente. Evidentemente la solución ha generado un término de período tres, y este término domina la solución.

Más de un atractor

Para un oscilador lineal, con un conjunto dado de parámetros, demostramos en la Sección 5.5 que existe un único atractor; es decir, sean cuales sean los valores iniciales de ϕ y $\dot{\phi}$, el movimiento final siempre será el mismo, una vez que los transitorios

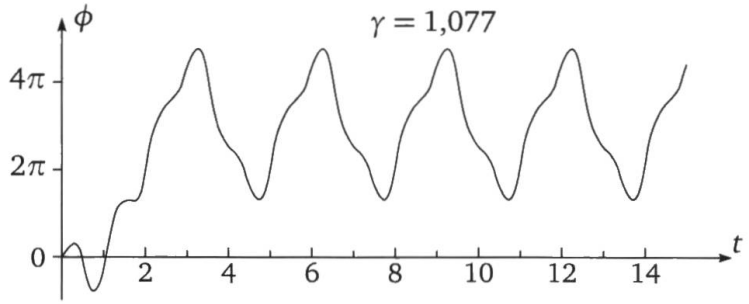


Figura 12.6. Movimiento de un PAF con fuerza externa $\gamma = 1{,}077$. Después de un poco más de dos ciclos, el movimiento se ha estabilizado a un atractor periódico que se repite a sí mismo cada tres ciclos (por ejemplo, los valles vienen justo antes de $t = 5, 8, 11, 14$ y así sucesivamente); por lo tanto, el atractor tiene período tres.

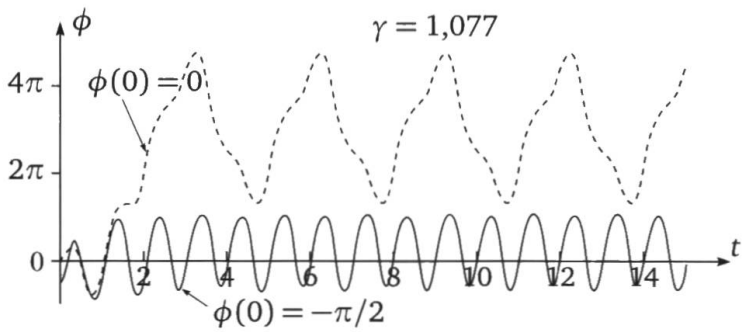


Figura 12.7. Dos soluciones para el mismo PAF, con las mismas fuerzas externas, pero condiciones iniciales diferentes [$\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$ para la curva a trazos, pero $\phi(0) = -\pi/2$ y $\dot{\phi}(0) = 0$ para la curva continua]. Incluso después de que los transitorios se hayan extinguido, los dos movimientos son totalmente diferentes.

se hayan extinguido. Para un oscilador no lineal, este no es el caso, y el PAF con la fuerza externa $\gamma = 1{,}077$ de la Figura 12.6 constituye un claro ejemplo. En la Figura 12.7 he mostrado el movimiento para un PAF con los mismos parámetros que en la Figura 12.6 (incluida la misma fuerza externa), pero con dos conjuntos diferentes de condiciones iniciales. La curva a trazos es la misma solución que en la Figura 12.6, con las mismas condiciones iniciales que hemos usado para cada gráfica hasta ahora, $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$. La curva continua muestra el movimiento del mismo PAF exacto, también con $\dot{\phi}(0) = 0$, pero con $\phi(0) = -\pi/2$; esto es, para la curva continua, el péndulo fue liberado desde 90° a la izquierda. Como se puede ver claramente, los dos atractores (las curvas a las que el movimiento real converge cuando los transitorios iniciales se extinguen) son totalmente diferentes. Para la curva a trazos, el atractor tiene período tres, para la curva continua el período final es (como se puede ver si se observa detenidamente) realmente dos, con valles alternantes (y crestas alternantes) que tienen alturas ligeramente diferentes. Evidentemente, para

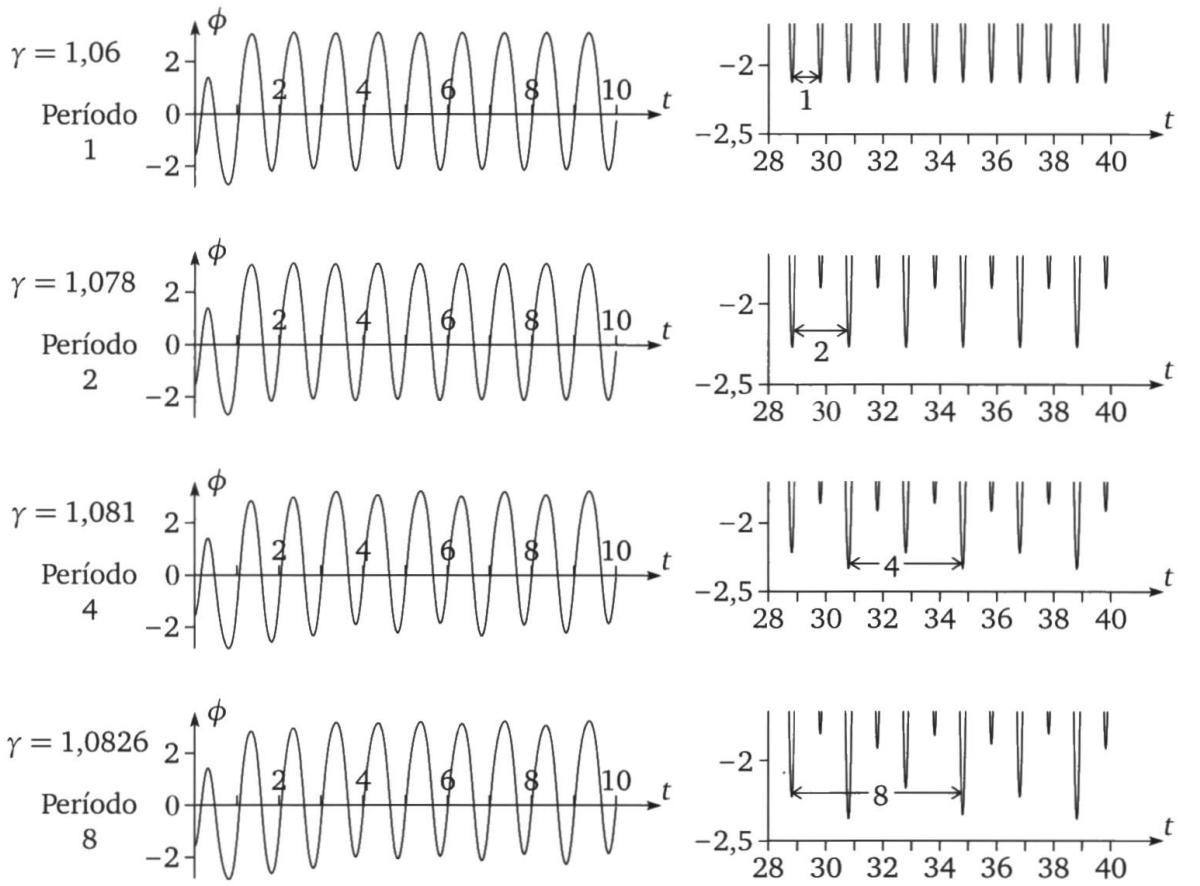


Figura 12.8. Una cascada que duplica el período. Los dibujos de la izquierda muestran los primeros diez ciclos aplicados para un PAF con sucesivas y cada vez mayores fuerzas externas aplicadas, tal y como se indica a la izquierda. Todos los demás parámetros, incluyendo las condiciones iniciales$\phi(0) = -\pi/2$ y $\dot{\phi}(0) = 0$, son los mismos en todos los dibujos. En cada dibujo, a la derecha he ampliado la parte inferior correspondiente al movimiento de la izquierda, para mostrar más claramente las diferencias en sucesivas oscilaciones; estas ampliaciones muestran ciclos de 12 amplitudes, empezando en $t = 28$, para cuando el movimiento se ha estabilizado en un atractor perfectamente periódico (al menos en la escala mostrada). Cada flecha doble muestra un ciclo completo del movimiento correspondiente; los períodos de los cuatro atractores son claramente 1, 2, 4 y 8, tal y como se ha indicado.

un oscilador no lineal, condiciones iniciales diferentes pueden conducir a atractores totalmente diferentes.

Una cascada de bifurcación del periodo

Habiendo reconocido que condiciones iniciales diferentes pueden conducir a atractores diferentes, debemos anticipar que la evolución de las oscilaciones cuando variamos γ puede depender de las condiciones iniciales que elijamos. En la secuencia de las Figuras 12.2 a 12.6 he usado las condiciones iniciales $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = 0$ para todas las cinco imágenes. Resulta que las nuevas condiciones iniciales $\phi(0) = -\pi/2$

y $\dot{\phi}(0) = 0$, introducidas en la Figura 12.7, producen una evolución bastante diferente y muy interesante. En la Figura 12.8 he mostrado el movimiento del PAF para cuatro valores sucesivos mayores que γ, todos con estas nuevas condiciones iniciales. Los dibujos de la izquierda muestran $\phi(t)$ como función de t para los primeros diez ciclos aplicados. El primer gráfico es para $\gamma = 1{,}06$, el mismo valor que el usado en la Figura 12.4, y, al igual que en esa figura, el movimiento se estabiliza en una oscilación continua con un período igual al período aplicado; esto es, el atractor tiene período uno. Para confirmar esta conclusión, el dibujo de la derecha muestra el mismo movimiento, pero a los $28 < t < 40$ (para cuando cualquier transitorio habrá desaparecido completamente en la escala mostrada), con la escala vertical aumentada para mostrar claramente que las sucesivas oscilaciones son todas de igual amplitud.

En el segundo par de gráficos, la fuerza externa aplicada se aumentó hasta $\gamma = 1{,}078$. A primera vista, el movimiento parece igual que para $\gamma = 1{,}06$, pero si observamos detenidamente veremos que los máximos y los mínimos no son todos de la misma altura. Esto se aprecia muy bien en la ampliación de la derecha donde fácilmente puede verse que los mínimos alternan entre dos alturas fijas, claramente diferenciadas, de manera que el atractor ahora tiene período dos.

Para $\gamma = 1{,}081$ y como en el tercer par, la gráfica de la izquierda es bastante parecida a sus dos predecesoras de manera que es difícil saber qué está pasando. Una de las razones es que no podemos estar seguros de que los ciclos de diez amplitudes (el número mostrado a la izquierda) son lo suficientemente largos para que todos los transitorios desaparezcan, pero en la ampliación de la derecha se ve claramente que los mínimos alternan entre cuatro valores diferentes. Esto significa que el período de nuevo se ha doblado a período cuatro.

En el último par de dibujos, para $\gamma = 1{,}0826$, es aún más difícil saber que está pasando en el dibujo de la izquierda; pero en la ampliación de la derecha claramente se ve que el movimiento al final se repite una vez cada ocho ciclos aplicados. Esto significa que el atractor tiene período ocho. La **cascada de bifurcación del periodo** vista en estos cuatro pares de dibujos continúa. Si aumentamos la fuerza externa aplicada aún más, encontramos movimiento con período 16, después 32, y así hasta el infinito.

La cascada de bifurcación del periodo de la Figura 12.8 es un fenómeno impactante, pero las diferencias cuantitativas entre las sucesivas cuatro gráficas sin ampliar son muy pequeñas. Se podría pensar que construir un péndulo amortiguado y forzado lo suficientemente preciso para observar estas sutiles diferencias es complicado, lo cual es cierto. No obstante, se han construido tales péndulos y se han usado para observar todos los efectos descritos en este capítulo, con gran concordancia entre la teoría y los experimentos.[9] Quizá aún más sorprendente es que el fenómeno de

[9] Para una descripción de los tres «péndulos caóticos» disponibles comercialmente, consultar J. A. Blackburn y G. L. Baker, «A Comparison of Commercial Chaotic Pendulums», *American Journal*

bifurcación del periodo está presente en muchos y muy diferentes sistemas no lineales —circuitos eléctricos, reacciones químicas, pelotas botando sobre superficies oscilantes, y muchos más. En cada uno de estos sistemas existe un «parámetro de control» que se puede variar (la fuerza externa de un PAF, un voltaje en un circuito eléctrico, un ritmo de flujo en una reacción química). El comportamiento del sistema se monitoriza a medida que se varía este parámetro, y se comprueba que este comportamiento exhibe cascadas de bifurcación de período. La Figura 12.9 muestra una cascada observada por Libchaber et al.[10] en la convección de mercurio en una pequeña caja cuya parte inferior se mantiene a una temperatura ligeramente mayor que la de su parte superior. Esta diferencia de temperatura es el parámetro de control y se mide mediante un número R, denominado número de Rayleigh. Cuando

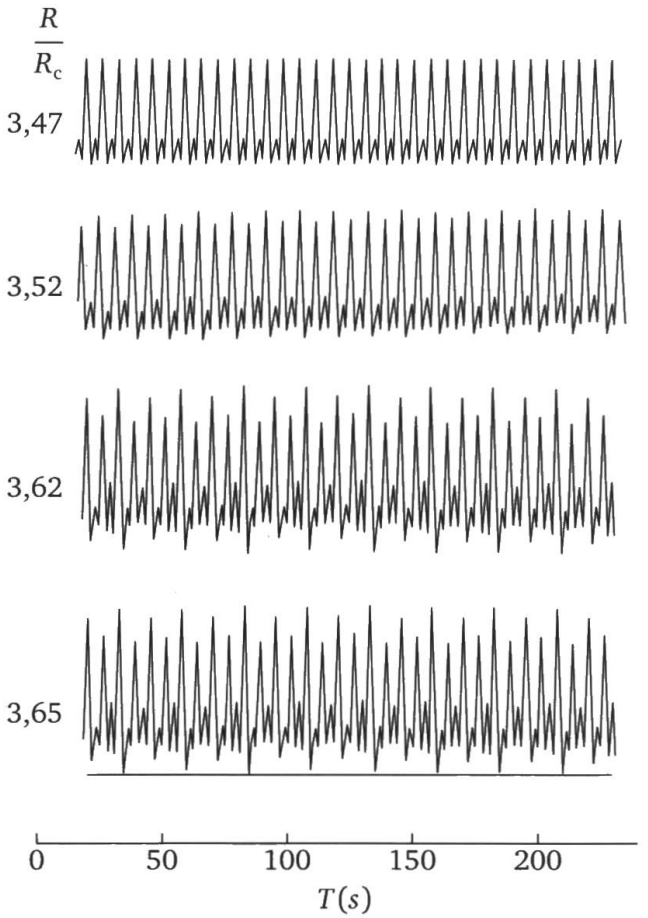


Figura 12.9. Cascada de bifurcación de período en la convección de mercurio en una pequeña celda de convección. Los gráficos muestran la temperatura en un punto fijo de la celda como una función del tiempo, para cuatro gradientes de temperatura sucesivamente más largos dados por el parámetro R/R_c.

of Physics, Vol. 66, p. 821, (1998). El péndulo de Daedalon allí descrito fue utilizado para obtener los datos mostrados en la Figura 12.32.

[10] Reproducida con autorización de A. Libchaber, C. Laroche y S. Fauve, *Journal de Physique-Lettres*, vol. 43, p. 211 (1982).

R es muy pequeño, el calor es conducido hacia arriba sin convección. Entonces a una diferencia de temperaturas crítica, R_c, aparece la convección continua, y cuando R se incrementa todavía más, la convección se hace oscilatoria. Estas oscilaciones se pueden observar midiendo la temperatura en cualquier punto fijo de la célula, y la Figura 12.9 muestra cuatro gráficas de la temperatura observada (en un punto fijo) con respecto al tiempo, para cuatro valores sucesivamente mayores del parámetro de control R. Las duplicaciones de período de 1 a 2, de 2 a 4 y de 4 a 8 están maravillosamente claros.

No son sólo las cascadas que doblan el período lo único que se observa en muchos sistemas diferentes. En un sentido que describiré inmediatamente, las cascadas suceden *de la misma forma*, una circunstancia denominada «universalidad».

El número Feigenbaum y universalidad

Volviendo a las bifurcaciones de período del PAF, por los valores del parámetro de perturbación γ mostrados en la Figura 12.8 podemos ver que las bifurcaciones se suceden cada vez más deprisa a medida que aumentamos γ. Para dar un enfoque cuantitativo a esta idea, debemos examinar los **valores umbral** de γ en los que el período realmente se bifurque. Por ejemplo, mirando los números de la Figura 12.8, parece claro que en algún punto entre $\gamma = 1{,}06$ y $1{,}078$, debe haber un valor γ_1 donde el período cambie de 1 a 2. Encontrar el punto donde realmente sucede este umbral (o «**punto de bifurcación**») es sorprendentemente difícil, pero sucede que (para 5 cifras significativas) $\gamma_1 = 1{,}0663$. De manera similar, para $\gamma_2 = 1{,}0793$, el período cambia de 2 a 4. Si permitimos que γ_n denote el umbral en el cual el período cambia de 2^{n-1} a 2^n, entonces unos primeros pocos umbrales γ_n son como se muestra en la Tabla 12.1. En la última columna de la tabla muestro las distancias $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ entre umbrales sucesivos, que como puede verse, disminuyen geométricamente[11]. Cada intervalo es alrededor de la quinta parte que su predecesor.

A finales de los 70, el físico Mitchell Feigenbaum (nacido en 1944) no sólo demostró que muchos sistemas no lineales diferentes experimentan cascadas de bifurcación de período similares, sino también que todas las cascadas muestran la misma aceleración geométrica; concretamente, los intervalos entre los umbrales para el parámetro de control (en nuestro caso la fuerza externa) satisfacen

$$(\gamma_{n+1} - \gamma_n) \approx \frac{1}{\delta}(\gamma_n - \gamma_{n-1}) \qquad (12.17)$$

[11] Una sucesión de números, $a_1, a_2, \ldots$, es geométrica si $a_{n+1} = ka_n$ para algún número fijo k. Si $k < 1$, la sucesión geométrica converge a cero a medida que $n \to \infty$.

Tabla 12.1. Los primeros cuatro umbrales γ_n en los que el período del PAF [para unas condiciones iniciales $\phi(0) = -\pi/2$ y $\dot{\phi}(0) = 0$] dobla de 1 a 2, 2 a 4, 4 a 8 y 8 a 16. La última columna muestra la anchura de los intervalos entre umbrales sucesivos.

n	período	γ_n	intervalo
1	$1 \to 2$	1,0663	
			0,0130
2	$2 \to 4$	1,0793	
			0,0028
3	$4 \to 8$	1,0821	
			0,0006
4	$8 \to 16$	1,0827	

donde la constante δ tiene el mismo valor

$$\delta = 4{,}6692016 \tag{12.18}$$

para todos estos sistemas y se denomina **número de Feigenbaum.**[12] Debido a la extendida aparición de la bifurcación del período y al hecho de que δ tenga el mismo valor para tantos sistemas diferentes, a este fenómeno de bifurcación del período se lo ha caracterizado como **universal.** He escrito la relación de Feigenbaum (12.17) con un signo «aproximadamente igual», porque estrictamente hablando, la relación sólo se mantiene en el límite en que $n \to \infty$. Para muchos sistemas sin embargo, la relación es una buena aproximación para *todos* los valores de n. (Vea los Problemas 12.11 y 12.29).

La relación de Feigenbaum (12.17) implica que los intervalos entre los umbrales sucesivos se aproximan rápidamente a cero y por lo tanto los mismos umbrales se aproximan a un límite finito γ_c,

$$\gamma_n \to \gamma_c \qquad (\text{donde } n \to \infty). \tag{12.19}$$

Por lo tanto, la sucesión de umbrales γ_n satisface

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_n < \cdots < \gamma_c$$

para muchísimos más umbrales aprisionados en un hueco entre γ_n y γ_c que disminuye rápidamente. Para nuestro PAF, encontramos que el límite γ_c es

$$\gamma_c = 1{,}0829. \tag{12.20}$$

[12] En realidad hay dos números de Feigenbaum, y este a menudo se denomina la delta de Feigenbaum.

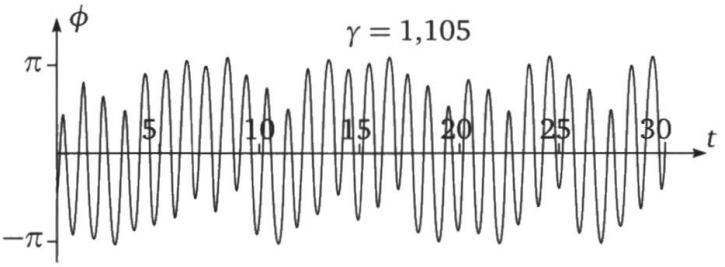


Figura 12.10. Caos. Los primeros 30 ciclos aplicados del PAF para $\gamma = 1{,}105$ son erráticos y no muestran signos de periodicidad. De hecho las oscilaciones nunca se estabilizan en un movimiento periódico regular, y es este movimiento a largo plazo, errático y no periódico una de las características que definen el caos.

Comprobaremos que más allá del valor crítico γ_c, el caos se instala y por eso la cascada de bifurcación del período se llama la **ruta hacia el caos**. Sin embargo debo hacer hincapié en que existen sistemas que exhiben caos sin pasar primero por una cascada de bifurcación del período; esto es porque dicha cascada es sólo una entre varias posibles rutas hacia el caos.

12.5 Caos y sensibilidad hacia las condiciones iniciales

Si aumentamos la fuerza externa γ más allá del valor crítico $\gamma_c = 1{,}0829$, entonces el PAF comienza a exhibir el comportamiento que ha terminado por denominarse «caos». La Figura 12.10 muestra los primeros treinta ciclos aplicados del PAF para $\gamma = 1{,}105$. Resulta obvio que el péndulo «intenta» oscilar con el período de la fuerza externa aplicada. Sin embargo, las oscilaciones reales van a la deriva de manera errática y nunca se repiten de manera exacta. Por supuesto el lector puede preguntarse si no he dado tiempo a que las oscilaciones se estabilicen; quizá en algún momento posterior convergirían en un movimiento periódico. Sin embargo, es un hecho que una gráfica de cualquier intervalo de tiempo es igual de errática, pero nunca una repetición exacta de cualquier otro intervalo. Aunque la fuerza externa sea perfectamente periódica e incluso después de que todos los transitorios hayan desaparecido, el movimiento a largo plazo es definitivamente no periódico. Este comportamiento errático, no periódico y a largo plazo es una de las características que definen el caos. La otra característica es el fenómeno denominado sensibilidad a las condiciones iniciales.

Sensibilidad a las condiciones iniciales

El tema de la sensibilidad a las condiciones iniciales surge en relación con las siguientes preguntas: imaginemos dos PAF idénticos, ambos con los mismos parámetros,

pero lanzados en $t = 0$ con condiciones iniciales ligeramente diferentes. [Quizá los ángulos iniciales $\phi(0)$ difieran en una fracción de grado]. A medida que avanza el tiempo, ¿permanecen casi iguales los movimientos de los dos péndulos?, ¿quizá se aproximan uno a otro?, ¿o acaso divergen y se hacen completamente diferentes?

Para precisar más estas preguntas, supongamos que las posiciones de los dos péndulos son $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$. Estas dos funciones satisfacen con exactitud la misma ecuación de movimiento, aunque tienen condiciones iniciales ligeramente diferentes. Si ahora $\Delta\phi(t)$ denota la diferencia entre nuestras dos soluciones,

$$\Delta\phi(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t), \tag{12.21}$$

el tema es la dependencia del tiempo de $\Delta\phi(t)$. ¿Permanece $\Delta\phi(t)$ más o menos constante? ¿Aumenta o disminuye a medida que avanza el tiempo?

Para el oscilador lineal del que hablamos en el Capítulo 5, la respuesta es que $\Delta\phi(t)$ vuelve a cero, ya que hemos demostrado que todas las soluciones de la ecuación del movimiento se aproximan al mismo atractor a medida que $t \to \infty$. Por lo tanto, la *diferencia* de cualesquiera dos soluciones debe aproximarse a cero. Más aún, la diferencia debe aproximarse a cero *de manera exponencial*. Para ver esto, recordemos de la ecuación (5.67) que cualquier solución tiene la forma

$$\phi(t) = A\cos(\omega t - \delta) + C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \tag{12.22}$$

donde el término del coseno es el mismo para todas las soluciones, mientras que los dos términos de exponenciales decrecientes tienen coeficientes C_1 y C_2 que dependen de las condiciones iniciales. Esto implica que cuando tomamos la diferencia de dos soluciones el término del coseno se cancela y nos quedamos con

$$\Delta\phi(t) = B_1 e^{r_1 t} + B_2 e^{r_2 t}, \tag{12.23}$$

donde las constantes B_1 y B_2 dependen de los dos conjuntos de condiciones iniciales. El comportamiento preciso de esta diferencia depende de los tamaños relativos de la constante de amortiguamiento β y la frecuencia natural ω_0. En todos los ejemplos vistos hasta el momento en este capítulo he elegido $\beta = 0{,}25\omega_0$, así que $\beta < \omega_0$ (la situación denominada subamortiguamiento). En este caso, vimos en la Sección 5.4 que los coeficientes r_1 y r_2 tienen la forma $-\beta \pm i\omega_1$. Algo de álgebra elemental pone entonces (12.23) en la forma [compárela con la ecuación (5.38)]

$$\Delta\phi(t) = De^{-\beta t}\cos(\omega_1 t - \delta). \tag{12.24}$$

Esto es, $\Delta\phi(t)$ es la exponencial $e^{-\beta t}$ veces un coseno oscilatorio.

Hay un problema al intentar representar la dependencia temporal de una función (12.24). El factor exponencial decrece tan rápido que no se puede mostrar fácilmente su rango de valores sobre una gráfica convencional. Por ejemplo, con los valores que he estado usando, $\beta = 0{,}25\omega_0 = 0{,}75\pi = 2{,}356$, después de un ciclo de la fuerza

externa aplicada ($t = 1$) el factor exponencial es $e^{-\beta t} = e^{-2,356} \approx 0,09$, y $\Delta\phi(t)$ ha disminuido un orden de magnitud. Si queríamos representar $\Delta\phi(t)$ frente a t durante 10 ciclos, por ejemplo, entonces $\Delta\phi(t)$ se reduciría unos diez órdenes de magnitud (un rango que posiblemente no se puede mostrar sobre una gráfica lineal simple de $\Delta\phi(t)$ frente a t.

Como probablemente sepa el lector, la solución a este problema es hacer una representación gráfica en escala logarítmica; es decir, se representa el *logaritmo* de $\Delta\phi(t)$ frente a t. Realmente como $\Delta\phi(t)$ puede ser negativo, debemos representar $\ln|\Delta\phi(t)|$ frente a t. De acuerdo con (12.24) esto debe cumplir

$$\ln|\Delta\phi(t)| = \ln D - \beta t + \ln|\cos(\omega_1 t - \delta)|. \tag{12.25}$$

El primer término del segundo miembro es una constante, y el segundo es lineal en t con pendiente $-\beta$. El tercero es un poco complicado: como $|\cos(\omega_1 t - \delta)|$ oscila entre 1 y 0, su logaritmo natural oscila entre 0 y $-\infty$. Por consiguiente una gráfica de $\ln|\Delta\phi(t)|$ frente a t debería rebotar arriba y abajo (yendo hasta $-\infty$ cada vez que el término del coseno desaparece), al lado de un ciclo que decrece linealmente con pendiente $-\beta$. Esto es claramente visible en la Figura 12.11, que muestra una gráfica de $\log|\Delta\phi(t)|$ frente a t para una fuerza de perturbación relativamente débil $\gamma = 0,1$, para la cual la aproximación lineal es ciertamente buena. [He representado el logaritmo en base 10 en lugar del natural, porque el primero es más fácil de interpretar en una gráfica. Como $\log(x)$ es justo la constante $\ln(10)$ veces $\ln(x)$, esto no cambia ninguna de nuestras predicciones cualitativas]. Para representar esta gráfica, he dado al primer péndulo las mismas condiciones iniciales que en las Figuras 12.8 y 12.10; el segundo péndulo fue liberado desde el reposo con su posición

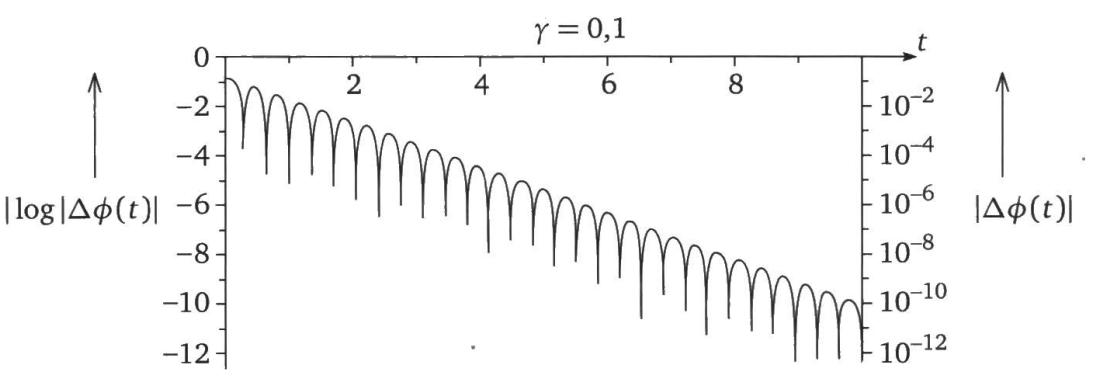


Figura 12.11. Representación logarítmica de $\Delta\phi(t)$, la separación de dos péndulos amortiguados y forzados, con un parámetro de perturbación débil $\gamma = 0,1$, que fueron liberados con posiciones iniciales que difieren 0,1 radianes (o unos 6°). El eje vertical a la izquierda muestra $\log|\Delta\phi(t)|$, mientras que el de la derecha muestra $|\Delta\phi(t)|$ propiamente. La imagen muestra claramente que los máximos de $\log|\Delta\phi(t)|$ decrecen linealmente, y por tanto que $\Delta\phi(t)$ decae exponencialmente.

inicial 0,1 radianes más baja, así que la diferencia fue de $\Delta\phi(0) = 0{,}1$ radianes, o unos 6 grados. La característica más importante de esta gráfica es que los máximos sucesivos de $\log|\Delta\phi(t)|$ disminuyen linealmente de manera perfecta, confirmando que $\Delta\phi(t)$ decae exponencialmente, cayendo unos 10 órdenes de magnitud en los primeros diez ciclos de perturbación (como se puede comprobar fácilmente observando la gráfica).[13]

Hasta el momento hemos demostrado que, en régimen lineal, la separación $\Delta\phi(t)$ de dos PAF idénticos, lanzados con condiciones iniciales diferentes, decrece exponencialmente. Esto tiene una importante consecuencia práctica: en la práctica, no podemos saber de ninguna manera las condiciones iniciales de cualquier sistema *exactamente*. Por tanto, cuando intentamos predecir el comportamiento futuro de nuestro PAF debemos admitir que las condiciones iniciales que usamos pueden diferir ligeramente de las condiciones iniciales verdaderas. Esto significa que el movimiento que predigamos para $t > 0$ puede ser diferente del movimiento verdadero. Pero como $\Delta\phi(t)$ se va a cero exponencialmente, podemos estar seguros de que nuestro error nunca será peor que el error inicial y se aproximará, de hecho, rápidamente a cero. Podemos decir que el oscilador lineal es *insensible a sus condiciones iniciales*. Para conseguir cualquier precisión prescrita en nuestras predicciones, sólo tenemos que determinar la condición inicial con esa misma precisión.

¿Qué sucede cuando aumentamos el parámetro de perturbación γ fuera del régimen lineal? Naturalmente, ya no podemos depender de nuestras pruebas para el oscilador lineal. Sin embargo, podemos esperar razonablemente que la diferencia $\Delta\phi(t)$ continuará decayendo exponencialmente para al menos algún rango de parámetros de perturbación. La cuestión es «¿cómo de grande es este rango?». La respuesta es bastante sorprendente: siempre que la diferencia en las condiciones iniciales sea suficientemente pequeña, la diferencia $\Delta\phi(t)$ continúa decayendo exponencialmente para todos los valores de γ hasta el valor crítico γ_c al cual aparece el caos. Por ejemplo, si $\gamma = 1{,}07$ sabemos que el movimiento tiene período 2 (para la condiciones iniciales de las Figuras 12.8 hasta 12.11), y el movimiento es sin lugar a dudas no lineal; sin embargo, la diferencia $\Delta\phi(t)$ todavía decae exponencialmente, tal como se ve claramente en la Figura 12.12, que muestra la diferencia $\Delta\phi(t)$ para dos soluciones con las mismas condiciones iniciales que en la Figura 12.11. En este caso, $\Delta\phi(t)$ permanece bastante constante en amplitud para los primeros 15 o 20 ciclos de perturbación, pero entonces las crestas de $\log|\Delta\phi(t)|$ caen de manera perfectamente lineal, indicando que $\Delta\phi(t)$ decae exponencialmente como $t \to \infty$. Advierta, no

[13] Una segunda característica que vale la pena mencionar es que los puntos en donde $|\Delta\phi(t)|$ desaparece (y, por tanto, $\log|\Delta\phi(t)|$ se va a $-\infty$) se ven en la representación logarítmica como picos afilados hacia abajo. Esto es porque el programa de gráficos sólo puede mostrar un número finito de puntos y naturalmente pierde los puntos en los que $\log|\Delta\phi(t)| = -\infty$. En vez de ello sólo puede detectar que hay puntos donde $\log|\Delta\phi(t)|$ tiene un mínimo, y esto es lo que muestra.

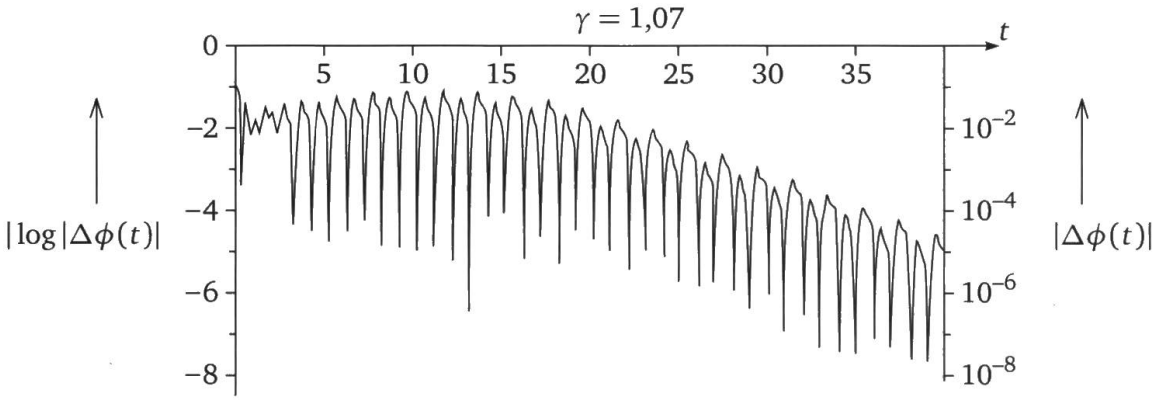


Figura 12.12. Representación logarítmica de $\Delta\phi(t)$, la separación de dos PAF idénticos, con parámetro de perturbación $\gamma = 1{,}07$, que fueron liberados con posiciones iniciales que difieren 0,1 radianes (o unos 6°). Durante los primeros 15 ciclos o así, $\Delta\phi(t)$ se mantiene bastante constante en amplitud, pero después los máximos de $\log|\Delta\phi(t)|$ decrecen linealmente, implicando que $\Delta\phi(t)$ decae exponencialmente.

obstante, que el decaimiento exponencial es considerablemente más lento que en el caso lineal: aquí la amplitud cae en unos 4 órdenes de magnitud en los últimos 25 ciclos; en el caso lineal de la Figura 12.11, cayó unos 10 órdenes de magnitud en sólo 10 ciclos. Sin embargo, el punto principal es que $\Delta\phi(t)$ tiende a cero exponencialmente, y, como en el régimen lineal, podemos predecir el comportamiento futuro de nuestro PAF, con la seguridad de que cualquier incertidumbre en nuestra predicción no será mucho mayor (y normalmente mucho menor) que nuestra incertidumbre en las condiciones iniciales.

Si ahora aumentamos el parámetro de perturbación más allá de $\gamma_c = 1{,}0829$ en el régimen caótico, la imagen cambia completamente. La Figura 12.13 muestra $\Delta\phi(t)$ para el mismo PAF que en las Figuras 12.11 y 12.12, excepto que el parámetro de perturbación es ahora $\gamma = 1{,}105$, el mismo valor usado en nuestra primera representación de movimiento caótico de la Figura 12.10. La característica más obvia de esta gráfica es que $\Delta\phi(t)$ claramente *crece* con el tiempo. De hecho, se advertirá que para poner de manifiesto el crecimiento de $\Delta\phi(t)$ escogí la diferencia inicial para que fuera justo $\Delta\phi(0) = 0{,}0001$ radianes. Comenzando en este valor diminuto, $|\Delta\phi|$ ha aumentado en 16 ciclos de perturbación más de 4 órdenes de magnitud hasta unos $|\Delta\phi| \approx 3{,}5$.

Desde $t = 1$ hasta $t = 16$ (donde la gráfica está enmarcada), los máximos en la Figura 12.13 crecen de un modo casi perfectamente lineal, lo que implica que $\Delta\phi(t)$ crece exponencialmente.[14] Este crecimiento exponencial augura el desastre de

[14] El alcance final de la curva se entiende fácilmente. Se puede ver de la Figura 12.10 que el ángulo $\phi(t)$ [realmente,$\phi_1(t)$, pero lo mismo aplica a $\phi_2(t)$] oscila entre alrededor de $\pm\pi$. Esto

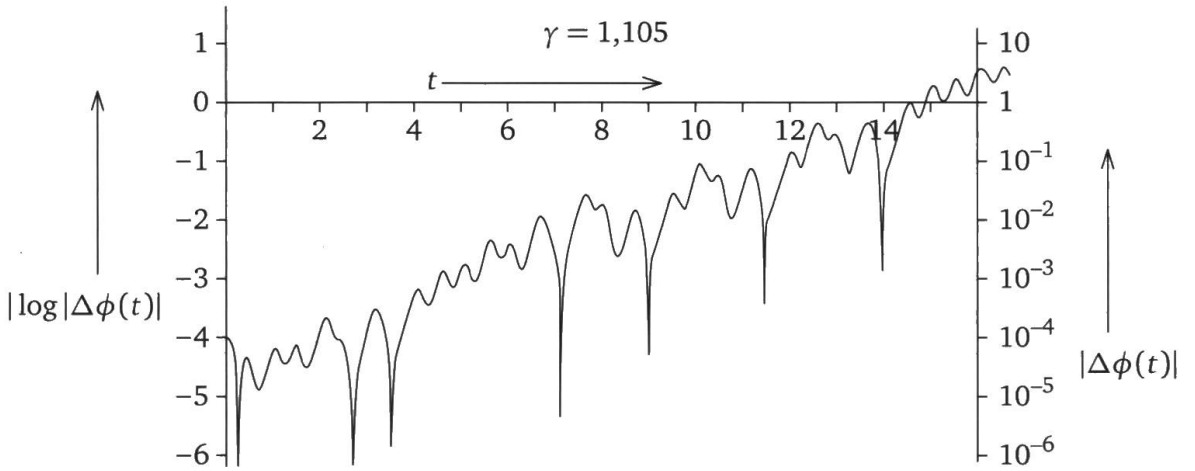


Figura 12.13. Separación $\Delta\phi(t)$ de dos péndulos idénticos, ambos con parámetro de perturbación $\gamma = 1{,}105$ y con una separación inicial de $\Delta\phi(0) = 10^{-4}$ radianes. Después de una pequeña caída inicial, las crestas de $\log|\Delta\phi(t)|$ *aumentan linealmente*, mostrando que el propio $\Delta\phi(t)$ *crece exponencialmente*.

cualquier intento de predicción precisa sobre el movimiento a largo plazo del PAF. Para el presente caso, un error tan pequeño como 10^{-4} radianes en las condiciones iniciales habrá crecido en 16 ciclos hasta un error de unos 3,5 π radianes o más. Por consiguiente, una incertidumbre de $\pm 10^{-4}$ radianes en las condiciones iniciales crece hasta una incertidumbre de $\pm\pi$, ¡y una incertidumbre de $\pm\pi$ en el ángulo de un péndulo significa que *no tenemos ni idea en absoluto* de dónde está el péndulo! Escogí este ejemplo porque es especialmente llamativo. Sin embargo, en cualquier movimiento caótico, $\Delta\phi(t)$ crece exponencialmente durante un rato al menos. Incluso si este crecimiento crece antes de que $\Delta\phi(t)$ alcance a π, el crecimiento exponencial significa que una incertidumbre muy pequeña en las condiciones iniciales rápidamente supone una gran incertidumbre en el movimiento predicho. Es por ello que decimos que el caos exhibe **sensibilidad extrema a las condiciones iniciales**, y esta sensibilidad es lo que puede hacer la predicción fiable del movimiento caótico una imposibilidad práctica.

El exponente de Liapunov

Lo que hemos visto en los tres ejemplos anteriores se puede parafrasear diciendo que la diferencia $\Delta\phi(t)$ entre dos PAF idénticos liberados con condiciones iniciales ligeramente diferentes muestra un comportamiento exponencial:

$$\Delta\phi(t) \sim Ke^{\lambda t} \tag{12.26}$$

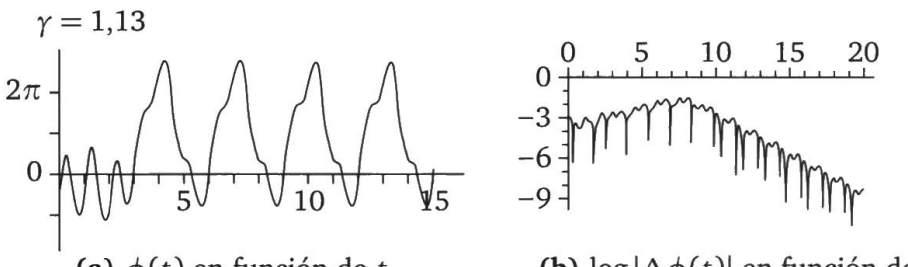
es, ni $\phi_1(t)$ ni $\phi_2(t)$ exceden nunca de magnitud π. Por lo tanto su diferencia $\Delta\phi(t)$ nunca puede pasar de 2π. Por consiguiente la curva *tiene* que decaer antes de que $\Delta\phi(t)$ alcance 2π.

(donde el símbolo «$\sim$» significa que $\Delta\phi(t)$ puede oscilar por debajo de una envuelta con el comportamiento anunciado, y K es una constante positiva). El coeficiente λ en el exponente se denomina **exponente de Liapunov.**[15] Si el movimiento a largo plazo no es caótico (se estabiliza a una oscilación periódica) el exponente de Liapunov es negativo; si el movimiento a largo plazo es caótico (errático y no periódico) el exponente de Liapunov es positivo.

Valores mayores de γ

Hasta el momento hemos visto que a medida que aumentamos el parámetro de perturbación γ, el movimiento de nuestro PAF se hace más y más complicado (desde el régimen lineal, con su respuesta sinusoidal pura, hasta el régimen casi lineal, con la suma de armónicos, hasta la aparición de subarmónicos y (para ciertas condiciones iniciales al menos) una cascada de bifurcación del período, y finalmente al caos. Naturalmente, se puede anticipar que, si pretendiéramos aumentar γ todavía más, el caos continuaría y se intensificaría, pero como siempre nuestro sistema no lineal desafía a las predicciones. Cuando γ aumenta, el PAF realmente alterna entre intervalos de caos separados por intervalos de movimiento periódico, no caótico. Ilustraré esto con sólo dos ejemplos.

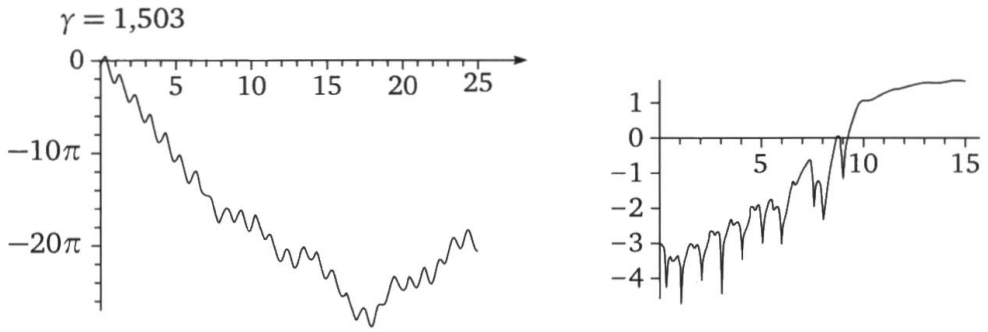
Vimos que con $\gamma = 1{,}105$, el PAF exhibe comportamiento caótico (Figura 12.10) y divergencia exponencial de soluciones vecinas (Figura 12.13). Sólo tenemos que aumentar el parámetro de perturbación hasta $\gamma = 1{,}13$ para entrar en una «ventana» estrecha de oscilación *no caótica* de período 3 con *convergencia* exponencial de soluciones vecinas, como se muestra en la Figura 12.14. En la parte (a), se puede ver que en tres ciclos de perturbación el movimiento se estabiliza a unas oscilaciones



(a) $\phi(t)$ en función de t **(b)** $\log|\Delta\phi(t)|$ en función de t

Figura 12.14. Movimiento de un PAF con $\gamma = 1{,}13$. **(a)** La gráfica de $\phi(t)$ se estabiliza rápidamente hasta oscilaciones de período 3 (mismas condiciones iniciales que en las Figuras 12.8 y 12.10). **(b)** Representación logarítmica de la distancia entre dos péndulos idénticos, el primero con las mismas condiciones iniciales que en la parte (a), el segundo con su ángulo inicial 0,001 radianes más bajo. Después de un incremento modesto inicial, $\Delta\phi(t)$ se va a 0 exponencialmente.

[15] Estrictamente hablando existen varios exponentes de Liapunov, de los cuales el discutido aquí es el mayor.



(a) $\phi(t)$ en función de t **(b)** $\log|\Delta\phi(t)|$ en función de t

Figura 12.15. Movimiento de un PAF con $\gamma = 1{,}503$. (Mismas condiciones iniciales que en la Figura 12.14). **(a)** La gráfica de $\phi(t)$ frente a t oscila erráticamente. En los primeros 18 ciclos, se hunde hasta unos -26π; esto es, realiza unas 13 rotaciones en el sentido de las agujas del reloj. Entonces comienza a escalar otra vez pero nunca se repite a sí misma realmente. **(b)** Representación logarítmica de la distancia entre dos péndulos idénticos con una separación inicial de 0,001 radianes. Durante los primeros nueve o diez ciclos, $\Delta\phi(t)$ crece exponencialmente y después se estabiliza.

regulares de período 3. La parte (b) muestra la separación $\Delta\phi(t)$ de dos péndulos liberados con una diferencia inicial $\Delta\phi(0)$ de 0,001 radianes; en los primeros ocho ciclos de perturbación, $\Delta\phi(t)$ realmente aumenta, pero desde ese momento en adelante decrece exponencialmente a cero, cayendo seis órdenes de magnitud en los siguientes doce ciclos.

La Figura 12.15 muestra las dos gráficas correspondientes para un parámetro de perturbación de $\gamma = 1{,}503$, donde el movimiento ha vuelto a ser caótico.[16] En la parte (a) vemos un nuevo tiempo de movimiento caótico. La fuerza de perturbación es ahora suficientemente fuerte para mantener el péndulo oscilando justo alrededor de su punto más alto, y en los primeros 18 ciclos de perturbación el péndulo realiza 13 rotaciones completas en el sentido de las agujas del reloj [$\phi(t)$ decrece 26π]. El movimiento aquí se puede ver como una rotación continua de aproximadamente una revolución por ciclo de perturbación, con una oscilación errática superpuesta.[17] En $t = 18$, el movimiento vuelve a una rotación en sentido contrario al de las agujas

[16] Como veremos, entre los valores $\gamma = 1{,}13$ y $1{,}503$, mostrados en las Figuras 12.14 y 12.15, el PAF ha pasado a través de varios intervalos de movimiento caótico y no caótico, pero omito los detalles por ahora.

[17] Si se observa detenidamente, se puede ver que para los primeros 7 ciclos el movimiento está muy cerca de ser una rotación continua de -2π por ciclo, con una oscilación *regular* de período 1 superpuesta. Este tipo de movimiento es realmente periódico, porque un cambio de -2π trae al péndulo otra vez al mismo sitio. Para algunos valores del parámetro de perturbación, el movimiento a largo plazo se estabiliza exactamente de esta manera, un fenómeno denominado cierre de fase (*phase locking*). (Vea el Problema 12.17).

del reloj más o menos continua con oscilaciones erráticas superpuestas, y, como la imagen sugiere, el movimiento nunca se estabiliza hasta llegar a ser periódico.

La representación logarítmica de la Figura 12.15(b) muestra la divergencia de dos péndulos con el mismo parámetro de perturbación $\gamma = 1{,}503$, pero una separación inicial de 0,001 radianes. La separación de los dos péndulos aumenta exponencialmente en los primeros 9 o 10 ciclos y se estabiliza hacia $t = 15$. Una característica llamativa de esta divergencia es que es suficientemente grande como para verse en la representación lineal convencional de la Figura 12.16, que muestra las posiciones reales $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ de los dos péndulos. A primera vista es quizá sorprendente que durante los primeros 8,5 ciclos las dos curvas son completamente indistinguibles, pero que la diferencia es entonces tan marcadamente visible. Sin embargo, se puede entender este llamativo comportamiento observando la Figura 12.15(b), donde se puede ver que hasta $t \approx 8{,}5$ la separación $\Delta\phi(t)$, aunque creciendo rápidamente, es no obstante siempre menor que $1/3$ radian, más o menos (demasiado pequeña para poder verse en la escala de la Figura 12.16). Hacia el instante $t \approx 9{,}5$, $\Delta\phi(t)$ ha alcanzado 3 (que es fácilmente visible en la representación lineal) y está todavía escalando rápidamente. Por tanto, desde $t \approx 9{,}5$ las dos curvas son completamente distintas.

Las principales enseñanzas que se extraen de estos dos últimos ejemplos son estas: **(1)** Una vez que el parámetro de perturbación γ de nuestro PAF rebasa el valor crítico $\gamma_c = 1{,}0829$, hay intervalos en donde el movimiento es caótico y otros en donde no lo es. Estos intervalos son muchas veces bastante cortos, así que el movimiento caótico aparece y desaparece con una rapidez asombrosa. **(2)** El caos puede adoptar varias formas diferentes, tales como el movimiento errático oscilante de la Figura 12.15(a). **(3)** El movimiento errático que presenta el caos siempre acompaña a la sensibilidad a las condiciones iniciales asociadas con la divergencia exponencial de soluciones vecinas de la ecuación de movimiento.

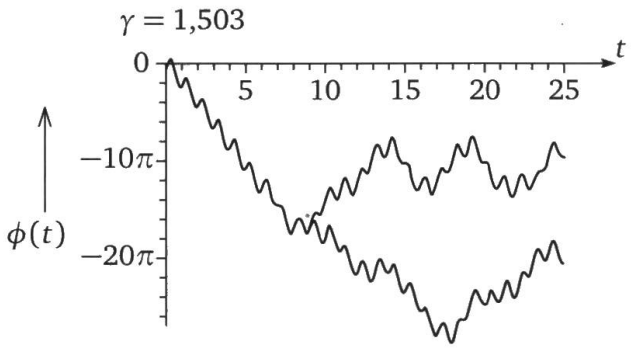


Figura 12.16. Representación lineal de las posiciones de dos PAF idénticos cuya separación $\Delta\phi(t)$ fue mostrada en la Figura 12.15(b) [$\Delta\phi(0) = 0{,}001$ rad]. Durante los primeros ocho ciclos y medio de perturbación, las dos curvas son indistinguibles; después de esto la diferencia se manifiesta claramente.

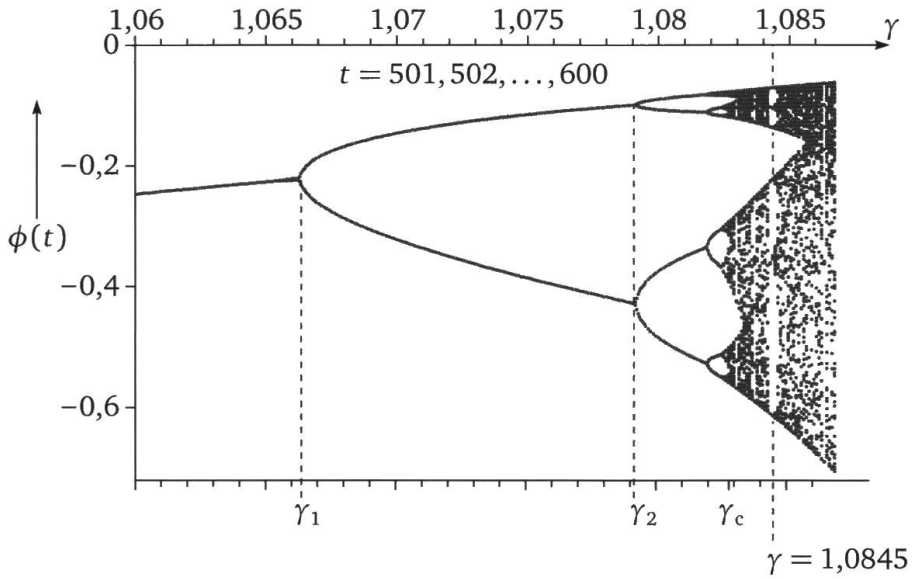


Figura 12.17. Diagrama de bifurcación para el péndulo amortiguado y forzado para los parámetros de perturbación $1{,}060 \leq \gamma \leq 1{,}087$. La cascada de bifurcación de período es claramente visible: En $\gamma_1 = 1{,}0663$ el período cambia desde 1 hasta 2, y en $\gamma_2 = 1{,}0793$ desde 2 hasta 4. La siguiente bifurcación, desde período 4 hasta 8, se ve fácilmente $\gamma_3 = 1{,}0821$, y que desde 8 hasta 16 es justo discernible en $\gamma_4 = 1{,}0827$. A la derecha del valor crítico, $\gamma_c = 1{,}0829$, el movimiento es mayoritariamente caótico, aunque en $\gamma = 1{,}0845$ se puede entrever un breve intervalo de movimiento de período 6.

12.6 Diagramas de bifurcación

Hasta el momento, cada una de nuestras imágenes del movimiento del péndulo amortiguado y forzado ha mostrado el movimiento para un valor particular del parámetro de perturbación γ. Para observar la evolución del movimiento cuando γ cambia, hemos tenido que realizar varias representaciones diferentes, una para cada valor de γ. A uno le gustaría construir una única representación que de alguna manera contase toda la historia, con períodos cambiantes, periodicidad alternante y caos a medida que varía γ. Este es el propósito de los diagramas de bifurcación.

Un **diagrama de bifurcación** es una representación astutamente construida de $\phi(t)$ frente a γ como en la Figura 12.17. Quizá la mejor manera de explicar lo que muestra esta representación sea precisamente describir en detalle cómo fue realizada. Habiendo decidido un rango de valores de γ para representar (desde $\gamma = 1{,}06$ hasta 1,087 en la Figura 12.17) se debe elegir primero un número grande de valores de γ, igualmente espaciados en el rango escogido. Para la Figura 12.17, escogí 271 valores de γ, espaciados a intervalos de 0,0001,

$$\gamma = 1{,}0600,\ 1{,}0601,\ 1{,}0602,\ \cdots,\ 1{,}0869,\ 1{,}0870.$$

Para cada valor elegido de γ, el siguiente paso es resolver numéricamente la ecuación del movimiento (12.11) desde $t = 0$ hasta un instante $t_{\text{máx}}$ tomado de tal manera que todos los transitorios hayan desaparecido. Para realizar la Figura 12.17, escogí las mismas condiciones iniciales que en las últimas pocas imágenes, a saber $\phi(0) = -\pi/2$ y $\dot{\phi}(0) = 0$.[18]

Para entender nuestro siguiente movimiento, recuerde que una buena manera de comprobar la periodicidad (o la no periodicidad) es examinar los valores

$$\phi(t_0),\ \phi(t_0 + 1),\ \phi(t_0 + 2),\ \ldots$$

de $\phi(t)$ para un número grande de instantes en intervalos de un ciclo. Si el movimiento es periódico con período n, éstos se repetirán a sí mismos después n ciclos, de lo contrario no. Por lo tanto, nuestro siguiente paso es usar nuestras soluciones para $\phi(t)$ para encontrar los valores de $\phi(t)$ en un rango de tiempos en intervalos enteros desde algún $t_{\text{mín}}$ elegido hasta $t_{\text{máx}}$ (con $t_{\text{mín}}$ suficientemente grande que todos los transitorios hayan desparecido). Para la Figura 12.17, encontré $\phi(t)$ para 100 instantes de tiempo,

$$t = 501,\ 502,\ \ldots,\ 600.$$

(Como esto se tuvo que hacer para 271 valores diferentes de γ, había en total 271×100 o cerca de 30 000 cálculos a realizar, y el proceso completo llevó varias horas). Finalmente, para cada valor de γ, estos cien valores de $\phi(t)$ se dibujaron como puntos en la gráfica de ϕ frente a γ. Para ver lo que esto supone, consideremos primero un valor de γ tal como $\gamma = 1{,}065$ donde sabemos que el movimiento tiene período 1, los cien valores sucesivos de $\phi(t)$ son todos el mismo, y los 100 puntos están todos en el mismo sitio en la gráfica de ϕ frente a γ. Por tanto lo que vemos en cualquier γ para el que el período es 1 es un *único* punto. Desde $\gamma = 1{,}06$ hasta el valor umbral $\gamma_1 = 1{,}0663$ donde el período se dobla, nuestra gráfica es por lo tanto una única curva. En el umbral $\gamma_1 = 1{,}0663$, el período cambia a 2, y las posiciones

$$\phi(501),\ \phi(502),\ \phi(503),\ \ldots,\ \phi(600)$$

ahora alternan entre *dos valores diferentes*. Por tanto, estos 100 puntos crean en realidad dos puntos diferentes sobre la gráfica, y la curva única *se bifurca* en γ_1 en *dos* curvas. En $\gamma_2 = 1{,}0793$ el período se dobla otra vez, a período 4, y cada una de las dos curvas se bifurca, formando cuatro curvas en total. El siguiente doblamiento, a período 8, se ve fácilmente (aunque realmente no lo he indicado en la imagen), y si

[18] A algunos autores les gusta superponer las gráficas correspondientes a varias condiciones iniciales diferentes. Esto proporciona una imagen más completa de los muchos posibles movimientos, pero hace que la gráfica sea más difícil de interpretar. Por simplicidad, decidí utilizar sólo un conjunto de condiciones iniciales.

miramos con atención podemos atisbar algo de las bifurcaciones hasta período 16. Después de esto, la gráfica se convierte en una auténtica confusión de puntos, y es imposible decir (a partir de la gráfica, al menos) el valor exacto γ_c dónde empieza el caos, aunque es claramente en algún punto justo por debajo de $\gamma = 1{,}083$. Más allá de este punto, para el resto de la Figura 12.17, el movimiento es mayoritariamente caótico, aunque se puede ver una ventana pequeña en $\gamma = 1{,}0845$, indicada por una línea a trazos vertical. (La ventana es especialmente visible en la sección superior de la gráfica, donde los puntos son por otra parte más densos). Si sostenemos una regla en esta línea vertical, veremos que en este valor particular de γ hay justo seis puntos distintos. Es decir, en $\gamma = 1{,}0845$, el movimiento ha vuelto a ser periódico brevemente, esta vez con período 6.

Una visión más amplia

La Figura 12.17 muestra un rango más bien pequeño de parámetros de perturbación ($1{,}06 \leq \gamma \leq 1{,}087$) en gran detalle. Antes de examinar un rango mayor de parámetros de perturbación, debemos afrontar una pequeña complicación. Cuando γ aumenta, hemos visto que el péndulo puede empezar un movimiento oscilante en el cual realiza muchas revoluciones completas. En algunos casos, puede continuar «rodando» indefinidamente, de tal manera que $\phi(t)$ finalmente tiende a $\pm\infty$. Incluso si este movimiento de rodadura es perfectamente periódico, los valores sucesivos

$$\phi(t_0),\ \phi(t_0+1),\ \phi(t_0+2),\ \ldots$$

nunca se repiten a sí mismos, porque aumentan a razón de un múltiplo de 2π en cada ciclo. Esto nos deja una gráfica de bifurcación, dibujada exactamente como en la Figura 12.17, inútil. La manera más obvia de resolver esta dificultad es redefinir ϕ para que siempre esté en dentro del rango

$$-\pi < \phi \leq \pi.$$

Cada vez que ϕ aumenta por encima de π, restamos 2π, y cada vez que disminuye por debajo de $-\pi$, sumamos 2π. Con esta modificación, podemos dibujar ahora el diagrama de bifurcación como antes. Sin embargo, manteniendo ϕ entre $\pm\pi$ de esta manera tiene la desventaja de que introduce un salto sin sentido discontinuo $\phi(t)$, cada vez que pasa a $\pm\pi$.

Una segunda manera, y a veces más sencilla, de abordar el problema de la ambigüedad de 2π en ϕ es representar los valores de la *velocidad angular*

$$\dot{\phi}(t_0),\ \dot{\phi}(t_0+1),\ \dot{\phi}(t_0+2),\ \ldots \tag{12.27}$$

en lugar de la posición angular $\phi(t_0), \ldots$ La velocidad angular $\dot{\phi}$ es inmune a la ambigüedad de 2π de ϕ (porque $\dot{\phi}$ no se ve afectado por la suma de cualquier

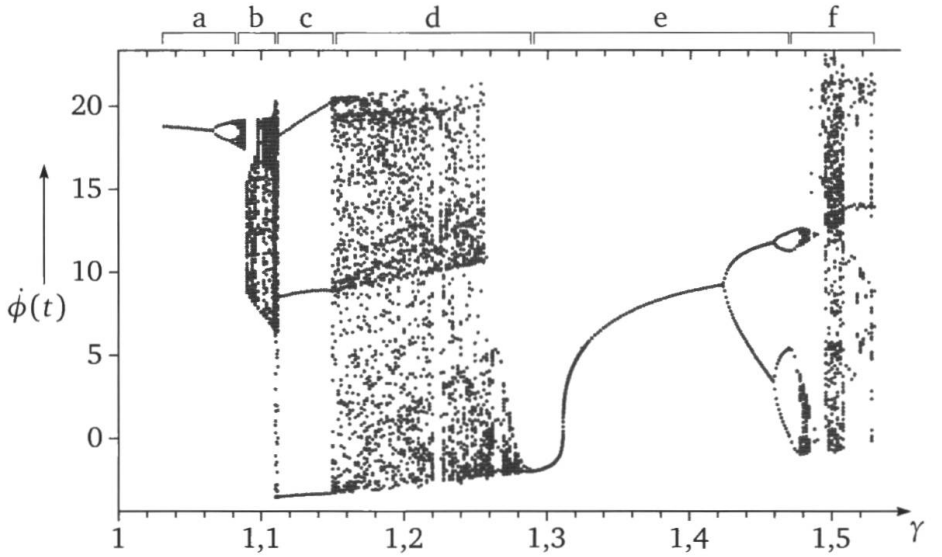


Figura 12.18. Diagrama de bifurcación que muestra valores de ϕ para los parámetros de perturbación $1{,}03 \leq \gamma \leq 1{,}53$. Los intervalos denominados $a, b, \ldots, f$ a lo largo del punto más alto son como sigue: **(a)** Este intervalo es el mismo que fue mostrado con mucho más detalle en la Figura 12.17. Comienza con período 1, seguido por una cascada de bifurcación de período que conduce al caos. **(b)** Sobre todo caos. **(c)** Período 3. **(d)** Sobre todo caos. **(e)** Período 1, seguido por otra cascada de bifurcación de período. **(f)** Sobre todo caos.

múltiplo de 2π a ϕ). Por consiguiente, si el movimiento es periódico con período n, entonces los valores (12.27) se repetirán a sí mismos después de n ciclos, y no lo harán en otro caso. Por lo tanto, un diagrama de bifurcación que utilice los valores de $\dot{\phi}$ en vez de los de ϕ funcionaría justo como la Figura 12.17, incluso si el péndulo sigue un movimiento de rodadura.

La Figura 12.18 es un diagrama de bifurcación dibujado usando valores de $\dot{\phi}$ sobre un rango desde justo encima de $\gamma = 1{,}0$ hasta justo por encima de $\gamma = 1{,}5$. La primera parte de la imagen, etiquetada con (a) en la parte de arriba, es el intervalo que fue mostrado con mucho más detalle en la Figura 12.17, con una cascada de bifurcación de período que comienza en período 1 acaba en caos. La Sección (b) es sobre todo caos, aunque ya sabemos que contiene algunas ventanas estrechas de periodicidad (la mayoría de las cuales están completamente escondidas en la escala utilizada aquí). La Sección (c) es muy claramente de período 3 e incluye el valor $gamma = 1{,}13$ que fue mostrado en la Figura 12.14. La Sección (d) es sobre todo caos, mientras que (e) comienza con un estiramiento largo de período 1, seguido por otra cascada de bifurcación de período. Finalmente, la sección (f) es sobre todo caos, aunque se pueden tomar sólo algunas ventanas de periodicidad.

Una característica interesante de la Figura 12.18 es el largo intervalo de movimiento de período 1, desde justo debajo de $\gamma = 1{,}3$ hasta justo por encima de $\gamma = 1{,}4$. Este movimiento de período 1 es realmente un movimiento de rodadura,

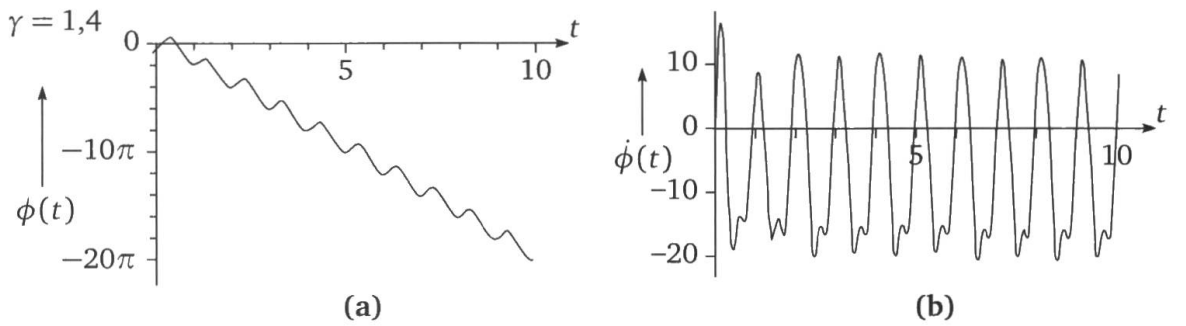


Figura 12.19. Movimiento de un PAF con parámetro de perturbación $\gamma = 1{,}4$. **(a)** La gráfica de $\phi(t)$ frente a t muestra un movimiento de rodadura periódico en el que ϕ disminuye 2π en cada ciclo de perturbación. **(b)** La gráfica de la velocidad angular $\dot{\phi}(t)$ frente a t muestra incluso más claramente que después de unos dos ciclos de perturbación el movimiento se hace periódico, con $\dot{\phi}(t)$ volviendo al mismo valor una vez cada ciclo.

como se puede ver en la Figura 12.19 la cual muestra el movimiento para $\gamma = 1{,}4$ En la parte (a), que muestra $\phi(t)$ como una función de t, se puede ver que el péndulo está rodando en el sentido de las agujas del reloj a un ritmo de una revolución completa por ciclo de perturbación (ϕ disminuye 20π en 10 ciclos). Que el movimiento es realmente periódico es incluso más evidente en la parte (b), que muestra $\dot{\phi}(t)$ como una función de t. Después de unos dos ciclos de perturbación, $\dot{\phi}(t)$ es claramente periódico con período 1.

12.7 Órbitas en el espacio de estados

En las dos próximas secciones doy una breve introducción a la *sección de Poincaré*, que es una manera alternativa importante de ver el movimiento de sistemas caóticos (y no caóticos). La sección de Poincaré es una simplificación de la famosa *órbita en el espacio de estados*. Esta simplificación es especialmente útil para sistemas multidimensionales complicados pero se puede introducir en el contexto de nuestro péndulo unidimensional amortiguado y forzado. Por tanto comenzaré en esta sección describiendo órbitas del espacio de estados para el PAF.

En nuestra discusión del PAF nos hemos centrado casi exclusivamente en la posición $\phi(t)$ como una función de t. Resulta, sin embargo, que a veces es una ventaja seguir *tanto* la posición $\phi(t)$ *como* la velocidad angular $\dot{\phi}(t)$ a medida que el tiempo avanza. En principio, si se conoce $\phi(t)$ para todo t, entonces se puede calcular $\dot{\phi}(t)$ mediante la diferenciación directa. Por consiguiente seguir $\dot{\phi}(t)$ así como $\phi(t)$ es, en este sentido, redundante. Sin embargo, seguir ambas variables puede proporcionar ideas nuevas sobre el movimiento, y esto es lo que discutiremos ahora.

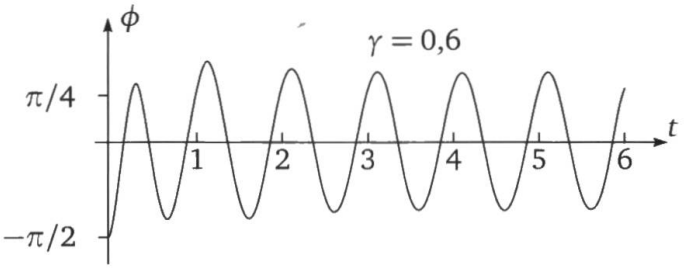


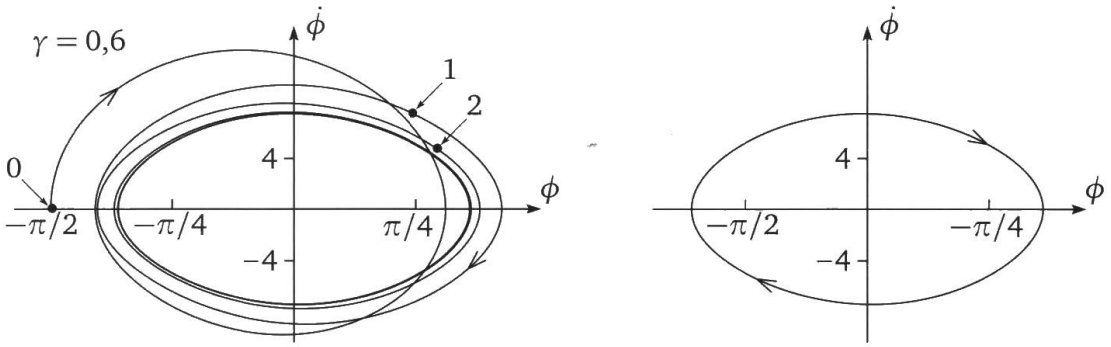
Figura 12.20. Representación convencional de $\phi(t)$ frente a t para un PAF con parámetro de perturbación $\gamma = 0{,}6$. El movimiento se estabiliza rápidamente a una oscilación casi perfectamente sinusoidal.

Existe un problema inmediato en representar las dos variables $\phi(t)$ y $\dot{\phi}(t)$ como funciones de una tercera variable t, porque esto requiere una representación (algo difícil de hacer, y no especialmente ilustrativa si se hace). El procedimiento normal es dibujar el par de valores $[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$ como un punto en un plano bidimensional donde el eje horizontal se denomina ϕ y el eje vertical $\dot{\phi}$. (Por razones que discutiré en un momento, este plano con coordenadas ϕ y $\dot{\phi}$ se denomina *espacio estado*). A medida que pasa el tiempo, el punto $[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$ se mueve en este espacio bidimensional y traza una curva, que se denomina **órbita en el espacio estado** (o trayectoria del espacio de fases). Una vez que nos acostumbramos a interpretar estas órbitas del espacio de estados, veremos que proporcionan una imagen bastante más clara del movimiento del sistema.

Como un primer ejemplo, consideremos un PAF con $\gamma = 0{,}6$ (un parámetro de perturbación para el cual la aproximación lineal es todavía bastante buena) y con nuestras condiciones iniciales favoritas $\phi(0) = -\pi/2$ y $\dot{\phi}(0) = 0$. La Figura 12.20 muestra una representación convencional de $\phi(t)$ frente a t para este caso. Para interpretar esta imagen hay que saber (como ciertamente sabemos) que la posición cambiante $\phi(t)$ se muestra por el desplazamiento vertical de la gráfica mientras que el tiempo t avanza de izquierda a derecha. Con esto entendido, se puede ver claramente que el movimiento comienza en $t = 0$ con $\phi(0) = -\pi/2$ y se aproxima rápidamente al atractor sinusoidal, con $\phi(t)$ de la forma $\phi(t) = A\cos(\omega t - \delta)$.

La Figura 12.21 muestra la órbita del espacio de estados para el mismo PAF con las mismas condiciones iniciales. La parte (a) muestra los primeros veinte ciclos, $0 \leq t \leq 20$. Para interpretar esta imagen, hay que saber que cuando t avanza el par $[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$ traza la curva, en la dirección de las flechas. Con esto entendido, se puede ver claramente que la órbita comienza desde $\phi(0) = -\pi/2$ y $\dot{\phi}(0) = 0$. Como la aceleración inicial $\ddot{\phi}$ es positiva,[19] $\dot{\phi}(t)$ aumenta desde el punto extremo, y $\phi(t)$ comienza a aumentar tan pronto como $\dot{\phi}$ sea distinto de cero. Por consiguiente el punto $[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$ se mueve inicialmente hacia arriba, curvándose

[19] Como se puede comprobar fácilmente, con las condiciones iniciales dadas, tanto la gravedad como la fuerza de perturbación le dan al péndulo una aceleración positiva al principio.



(a) $0 \leq t \leq 20$ **(b)** $5 \leq t \leq 20$

Figura 12.21. Órbita en el espacio de estados para un PAF con parámetro de perturbación $\gamma = 0{,}6$. El espacio de estados es el plano bidimensional con coordenadas ϕ y $\dot{\phi}$; la órbita en el espacio de estados es justo el camino trazado por el punto $[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$ a medida que pasa el tiempo. **(a)** Los primeros 20 ciclos, comenzando desde los valores iniciales $\phi(0) = -\pi/2$ y $\dot{\phi}(0) = 0$. Los tres puntos denominados 0, 1 y 2 muestran las posiciones de $[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$ en $t = 0, 1$ y 2. La órbita hace una espiral hacia adentro y se aproxima rápidamente al atractor de período uno, que aparece como una elipse en el espacio estado. **(b)** Lo mismo que (a) pero con los primeros cinco ciclos omitidos de tal manera que sólo se ve el atractor elíptico. Entre los instantes $5 \leq t \leq 20$, el punto $[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$ se mueve 15 veces alrededor del mismo camino elíptico.

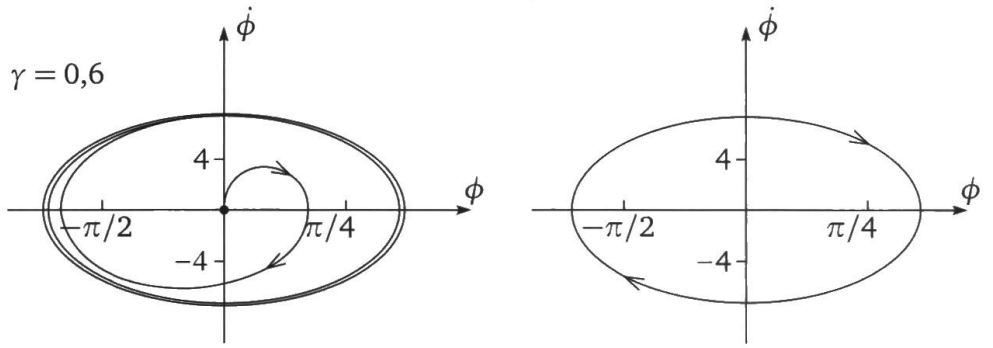
hacia la derecha. La oscilación de $\phi(t)$ se evidencia por el movimiento de atrás hacia adelante y de derecha a izquierda de la órbita; la oscilación de $\dot{\phi}(t)$ por el movimiento vertical arriba y abajo. Finalmente, a medida que los transitorios desaparecen, el movimiento se aproxima a su atractor a largo plazo, en el que (en la aproximación lineal) sabemos que $\phi(t)$ tiene la forma

$$\phi(t) = A\cos(\omega t - \delta). \tag{12.28}$$

Esto implica que la velocidad angular $\dot{\phi}(t)$ tiende a la forma

$$\dot{\phi}(t) = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t - \delta). \tag{12.29}$$

Las dos ecuaciones (12.28) y (12.29) son las ecuaciones paramétricas para una elipse dibujada en el sentido de las agujas del reloj en el plano de $(\phi, \dot{\phi})$, con semiejes mayor y menor A y ωA. Por consiguiente, una vez que los transitorios han desaparecido, el punto $[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$ se mueve alrededor de esta elipse con frecuencia angular igual a la frecuencia de la perturbación ω; esto es, la órbita en el espacio de estados completa una revolución por ciclo de perturbación. En la Figura 12.21(a), la órbita espacio de estados se mueve en espiral hacia esta elipse, y se junta con ella después de unos tres ciclos. [Esto ya ilustra una pequeña ventaja de la órbita espacio de estados sobre la representación convencional de $\phi(t)$ frente a t: en la Figura convencional 12.20 el movimiento real se ha hecho indistinguible del movimiento



(a) $0 \leq t \leq 20$ **(b)** $5 \leq t \leq 20$

Figura 12.22. Órbita en el espacio de estados para un PAF con parámetro de perturbación $\gamma = 0{,}6$ y condiciones iniciales $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$. **(a)** Los primeros 20 ciclos, que comienzan en el origen y y se mueven en espiral hacia el atractor elíptico. **(b)** En los 15 ciclos $5 \leq t \leq 20$, la órbita se mueve 15 veces alrededor del atractor elíptico para dar exactamente la misma imagen que en la Figura 12.21(b).

sinusoidal limitante después de poco más de 1 ciclo; en la representación del espacio de estados de la Figura 12.21(a) las órbitas reales y limitantes se pueden diferenciar durante unos tres ciclos. Por consiguiente la órbita en el espacio de estados proporciona una imagen más sensible de la aproximación al atractor]. La Figura 12.21(b) es igual que la parte (a), excepto que he omitido los primeros 5 ciclos; esto es, en la parte (b), $5 \leq t \leq 20$ y sólo aparece el atractor elíptico. Como nuestro principal interés es normalmente el movimiento limitante, las representaciones en el espacio de estados se dibujan normalmente como en la parte (b), con suficientes ciclos iniciales omitidos, de manera que el movimiento limitante sea visible.

La Figura 12.22 muestra la órbita en el espacio de estados para exactamente el mismo PAF que en la Figura 12.21, pero con condiciones iniciales $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$. En la parte (a) se puede ver fácilmente que la órbita comienza con las condiciones iniciales enunciadas, y realiza una espiral hacia afuera, completando unos 2,5 ciclos antes de fundirse con el atractor elíptico. La parte (b) muestra los 15 ciclos comenzando desde $t = 5$, instante en el cual la órbita es indistinguible de su atractor a largo plazo. En particular, la Figura 12.22(b) es exactamente la misma que la Figura 12.21(b), porque para $\gamma = 0{,}6$ todas las condiciones iniciales conducen al mismo atractor.

Espacio de estados

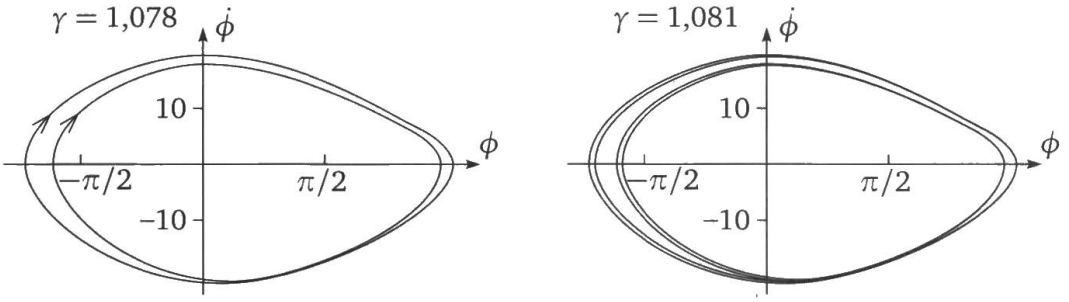
Haré una exposición detallada del espacio de estados en el Capítulo 13, pero he aquí una breve explicación de la terminología. Para nuestro péndulo, el **espacio de estados** (también denominado *espacio de fases*) es el plano bidimensional definido por las dos variables ϕ, la posición angular, y $\dot{\phi}$, la velocidad angular. Esto debe ser contrastado con el **espacio de configuración** unidimensional definido por la única variable ϕ que da la posición, o *configuración* del sistema. Más generalmente, el espacio de

configuración de un sistema mecánico n-dimensional es el espacio n-dimensional de sus coordenadas de posición $q_1, \ldots, q_n$, mientras que el espacio de estados es el espacio $2n$-dimensional de las coordenadas $q_1, \ldots, q_n$ y velocidades $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$. Discutiré varias propiedades y usos del espacio de estados en el Capítulo 13. Aquí menciono una característica importante: el «**estado**» (o «estado del movimiento» en detalle) de un sistema mecánico se usa muchas veces para designar una especificación del movimiento (en cualquier instante elegido t_0) que es suficientemente completo para determinar unívocamente el movimiento en todos los instantes posteriores. Es decir, el estado de un sistema define las *condiciones iniciales* necesarias para especificar una única solución de la ecuación del movimiento. Para nuestro péndulo, la especificación de la posición ϕ en el instante t_0 no es suficiente para determinar una única solución, pero la especificación de ϕ y $\dot{\phi}$ *sí lo es*. Esto es, las dos variables ϕ y $\dot{\phi}$ definen el estado del péndulo, y el espacio de todos los pares $(\phi, \dot{\phi})$ se llama naturalmente *espacio de estados*.

Una **órbita en el espacio de estados** es simplemente el camino trazado en el espacio de estados por el par $[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$ a medida que el tiempo evoluciona. Naturalmente, se debe entender que una órbita en el espacio de estados es muy diferente de la órbita de, por ejemplo, un planeta en el espacio ordinario con coordenadas $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Por ejemplo, un planeta puede tener muchas órbitas diferentes que pasan a través de un único punto $\mathbf{r}$ en un instante dado t_0. Por otro lado, de lo que se acaba de decir sobre las condiciones iniciales, se sigue que para cualquier «punto» $(\phi, \dot{\phi})$ en el espacio de estados, nuestro péndulo tiene exactamente una órbita en el espacio de estados que pasa por $(\phi, \dot{\phi})$ en cualquier t_0 dado. Otra característica curiosa de las órbitas del espacio de estados tiene que ver con su dirección de flujo: como el eje vertical representa la velocidad $\dot{\phi}$, el movimiento en cualquier punto por encima del eje horizontal ($\dot{\phi} > 0$) es siempre hacia la derecha (aumentando ϕ), como se ve en la Figura 12.22. Análogamente, el movimiento en cualquier punto por debajo del eje horizontal tiene que ser hacia la izquierda. Si una órbita cruza el eje horizontal, entonces, como $\dot{\phi} = 0$, la órbita debe moverse exactamente verticalmente (ϕ no cambia). Todas estas propiedades están ilustradas en la Figura 12.22. Implican que cualquier órbita cerrada del espacio de estados, tal como el atractor elíptico de la Figura 12.22(b), siempre se traza en el sentido de las agujas del reloj.

Más órbitas en el espacio de estados

A medida que incrementamos el parámetro de perturbación γ, sabemos que el movimiento de un PAF sufre varios cambios drásticos, algunos de los cuales se muestran muy bien en las representaciones de las órbitas en el espacio de estados. Por ejemplo, la Figura 12.23 muestra las órbitas del espacio de estados para $\gamma = 1{,}078$ y $\gamma = 1{,}081$, ambas en medio de la primera cascada de bifurcación de período mostrada en la Figura 12.8. Ambas representaciones muestran cuarenta ciclos a partir de



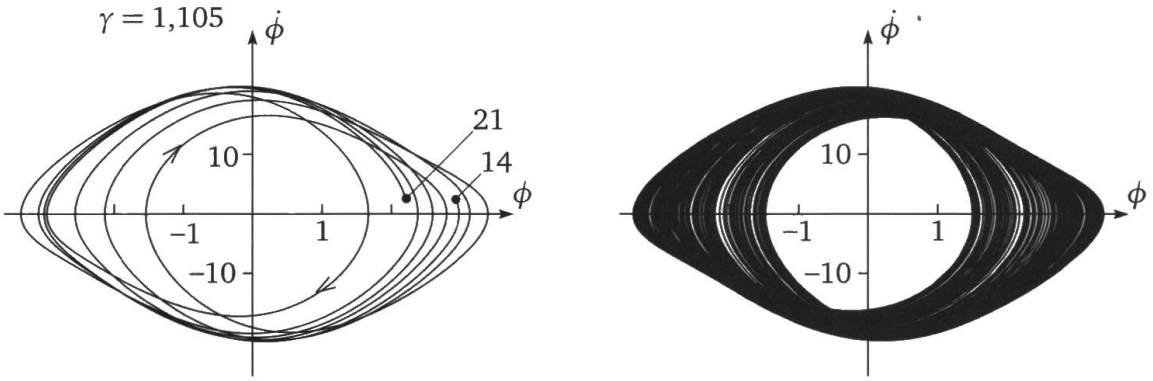
(a) Período 2 **(b)** Período 4

Figura 12.23. Órbitas en el espacio de estados que muestran los atractores periódicos para **(a)** $\gamma = 1{,}078$ con período 2 y **(b)** $\gamma = 1{,}081$ con período 4. Ambas representaciones muestran los cuarenta ciclos desde $t = 20$ hasta 60. En la parte (a), la órbita describe justo dos lazos distintos veinte veces cada uno; en la parte (b) describe cuatro lazos diez veces cada uno. Compárelas con la Figura 12.8 (las dos del medio).

$t = 20$, instante en el cual todos los transitorios iniciales han desaparecido. Esto es, ambas representaciones muestran el movimiento limitante a largo plazo y se deben comparar con la Figura 12.22(b). Como en aquella imagen, estas nuevas órbitas se mueven alrededor del origen describiendo ciclos más o menos elípticos, pero en ambos casos la órbita realiza más de un ciclo antes de cerrarse sobre sí misma. En la parte (a) hay dos lazos diferentes, cada uno de los cuales dura un ciclo de perturbación, así que el movimiento se repite a sí mismo una vez cada dos ciclos (es decir, tiene período dos. En la parte (b) hay cuatro ciclos diferentes, indicando claramente que el período se ha doblado otra vez a período cuatro. Es importante entender que no importa cuántos ciclos representemos en estas dos figuras [siempre que empecemos después de que los transitorios hayan desaparecido, y representemos al menos dos ciclos en la parte (a) y cuatro en la parte (b)]. Podría haber representado desde $t = 20$ hasta 100 o desde 20 hasta 1000, y la parte (a) habría mostrado los mismos dos bucles y la parte (b) los mismos cuatro bucles.

Caos

Si aumentamos un poco más el parámetro de perturbación γ, entramos en una región de caos. La Figura 12.24 muestra la órbita en el espacio de estados para un parámetro de perturbación $\gamma = 1{,}105$, cuyo carácter caótico se mostró en las Figuras 12.10 y 12.13. La parte (a) muestra siete ciclos desde $t = 14$ hasta $t = 21$, y se puede ver claramente que en siete ciclos la órbita deja de repetirse o en cerrarse sobre sí misma. Por consiguiente, si el movimiento es periódico, su período debe ser mayor que siete. Para decidir si *es* o no periódica, necesitamos representar más ciclos. En la parte (b) he representado desde $t = 14$ hasta 200, y la gráfica se ha convertido en una franja negra sólida pero todavía no se ha repetido a sí mismo. [La evidencia



(a) $14 \leq t \leq 21$ **(b)** $28 \leq t \leq 200$

Figura 12.24. Órbitas en el espacio de estados para un PAF con $\gamma = 1{,}105$ mostrando el atractor caótico. **(a)** En los siete ciclos desde $t = 14$ hasta 21 la órbita no se cierra sobre sí misma. **(b)** Lo mismo es cierto en los 186 ciclos desde $t = 14$ hasta 200, y a partir de ese momento está muy claro que el movimiento nunca se va a repetir a sí mismo y es de hecho caótico.

de esta última afirmación es que en una gráfica hasta $t = 400$ (no mostrada) la curva se mueve en varias de las restantes bandas de la parte (b); por consiguiente, ciertamente no ha comenzado a repetirse hacia $t = 200$]. Por tanto, la Figura 12.24 añade un fuerte apoyo a nuestra conclusión de que el movimiento nunca se repite a sí mismo y es de hecho caótico.

La franja negra de la Figura 12.24(b) es muy llamativa, pero está demasiado llena de información para ser de mucha utilidad. Necesitamos una manera de extraer de esta imagen una cantidad menor de información que nos pueda realmente decir algo más. La técnica para hacerlo es la famosa sección de Poincaré, pero antes de verla, me gustaría dar dos ejemplos más de órbitas del espacio de estados.

Órbitas en el espacio de estados para movimiento de rodadura

Ya hemos visto que para $\gamma = 1{,}4$ nuestro PAF ejecuta un «movimiento de rodadura», haciendo una rotación en sentido de las agujas del reloj por cada ciclo de perturbación (Figura 12.19). La órbita en el espacio de estados para este movimiento se muestra en la Figura 12.25. En esta gráfica se puede ver claramente cómo el péndulo estabiliza, después de un par de ciclos, a un movimiento periódico en el cual ϕ disminuye 2π y el péndulo realiza una rotación completa en el sentido de las agujas del reloj por ciclo.

La gráfica de la Figura 12.25 es una manera muy satisfactoria de mostrar la órbita del espacio de estados para un número pequeño de ciclos. Sin embargo, algunas veces (si el movimiento es caótico, por ejemplo) a uno le gustaría mostrar la órbita para un intervalo temporal muy largo (varios cientos de ciclos, quizá) y en este caso ϕ puede abarcar muchos cientos de revoluciones completas. Para mostrar esto, en

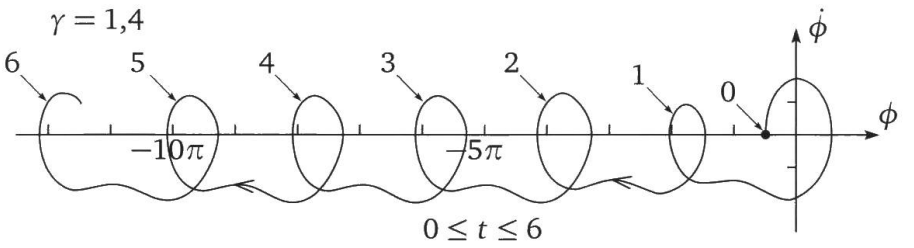


Figura 12.25. Primeros seis ciclos de la órbita del espacio de estados para un PAF con $\gamma = 1{,}4$, mostrando el movimiento de rodadura periódico, en el cual ϕ disminuye 2π en cada ciclo. Los números $0, 1, \ldots, 6$ indican la «posición» del espacio de estados $(\phi, \dot{\phi})$ en los instantes $t = 0, 1, \cdots, 6$.

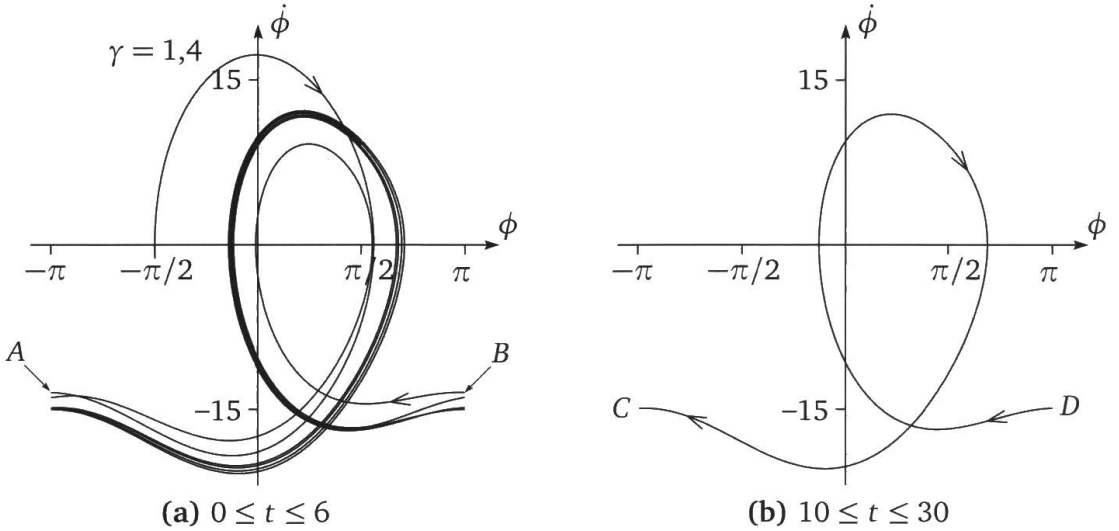


Figura 12.26. **(a)** La misma órbita exacta que en la Figura 12.25 pero con ϕ redefinido de tal manera que permanezca entre $-\pi$ y π. Cada vez que ϕ disminuye hasta $-\pi$ (en A por ejemplo), la órbita desaparece y reaparece en $+\pi$ (en B por ejemplo). **(b)** En el instante $t = 10$ la órbita se ha estabilizado a un movimiento periódico, con cada ciclo sucesivo apoyado exactamente (en esta escala) en la parte de arriba de su predecesor.

el formato de la Figura 12.25, podríamos vernos forzados a comprimir la escala en el eje ϕ hasta el punto en que el movimiento sería completamente indescifrable. La forma normal de abordar esta dificultad es redefinir ϕ para que siempre esté entre $-\pi$ y π: cada vez que ϕ baja por debajo de $-\pi$ añadimos 2π y cada vez que aumenta por encima de π restamos 2π. (Esto es aceptable porque cualesquiera dos valores de ϕ que difieran en un múltiplo de 2π representan la misma posición del péndulo). Con ϕ redefinido de esta manera, la órbita del espacio de estados de la Figura 12.25 parece como se muestra en la Figura 12.26(a). Está nueva representación no es una mejora obvia de la Figura 12.25 (aunque veremos que sí tiene algunas ventajas), pero se debería estudiar cuidadosamente para entender la relación de los dos tipos

de imagen. Se puede pensar en la nueva imagen como que se ha obtenido de la Figura 12.25 cortando por separado los intervalos $-3\pi < \phi < -\pi$ y $-5\pi < \phi < -3\pi$, y así sucesivamente, y pasándolos todos atrás encima del intervalo $-\pi < \phi < \pi$. En la imagen resultante, ϕ realiza un salto discontinuo cada vez que llega a $\phi = \pm\pi$. Por ejemplo, en torno a $t = 0{,}7$, ϕ disminuye hasta $-\pi$ en el punto A y salta hasta el punto B.

Una ventaja de la Figura 12.26(a) sobre la Figura 12.25 es que la nueva imagen proporciona una prueba más incisiva de la periodicidad de la órbita. En la nueva imagen, se puede ver que la órbita se está aproximando a un atractor periódico, pero también está claro que en el intervalo $0 \leq t \leq 6$ la órbita definitivamente no ha *alcanzado* el atractor periódico. (De hecho se puede ver más o menos que hay 6 bucles diferentes). Por otro lado, en el instante $t = 10$ los ciclos sucesivos son indistinguibles en la escala de estas imágenes. Los veinte ciclos mostrados en la Figura 12.26(b) desaparecen todos a la izquierda en el mismo punto C, reaparecen en D, y siguen exactamente el mismo camino hacia atrás hasta C veinte veces.

Una desventaja de cualquiera de las dos representaciones en la Figura 12.26 es la discontinuidad espuria cada vez que ϕ salta desde $-\pi$ hasta π, como en los puntos A y B, por ejemplo. Nos deshacemos de estas discontinuidades (al menos en nuestras mentes) si imaginamos la gráfica cortada y enrollada en un cilindro con líneas verticales $\phi = \pm\pi$ pegadas juntas. De esta manera el punto A se convierte en el mismo que el punto B, y la órbita del espacio de estados se mueve continuamente alrededor del cilindro vertical.

Más caos

Como ejemplo final de una órbita del espacio de estados, he mostrado la órbita para un PAF con $\gamma = 1{,}5$ en la Figura 12.27. Ya sabemos que el movimiento es caótico para este valor de γ, aunque para esta imagen escogí una constante de amortiguamiento menor, $\beta = \omega_0/8$ en lugar del valor $\beta = \omega_0/4$ que usé para todas las imágenes anteriores en este capítulo. Como resultado, este menor amortiguamiento hace el movimiento caótico más salvaje y produce una sección de Poincaré que es incluso más interesante y elegante (como describo en la siguiente sección). Con estos parámetros, el péndulo sigue un movimiento de rodadura errático, realizando muchas revoluciones completas, primero en una dirección y después en la otra. Por consiguiente, estamos forzados a hacer una gráfica con ϕ confinado entre $-\pi$ y π como en la Figura 12.26, pero con resultados radicalmente diferentes. Este movimiento no se repite a sí mismo en los 190 ciclos mostrados, con $10 \leq t \leq 200$. (La evidencia para esta afirmación es que en una representación para $10 \leq t \leq 250$ —no mostrada— la órbita se mueve hacia algunas de las regiones no visitadas de la Figura 12.27. Si hubiera comenzado a repetirse a sí mismo antes de que $t = 200$, no podría visitar nuevas regiones después de $t = 200$).

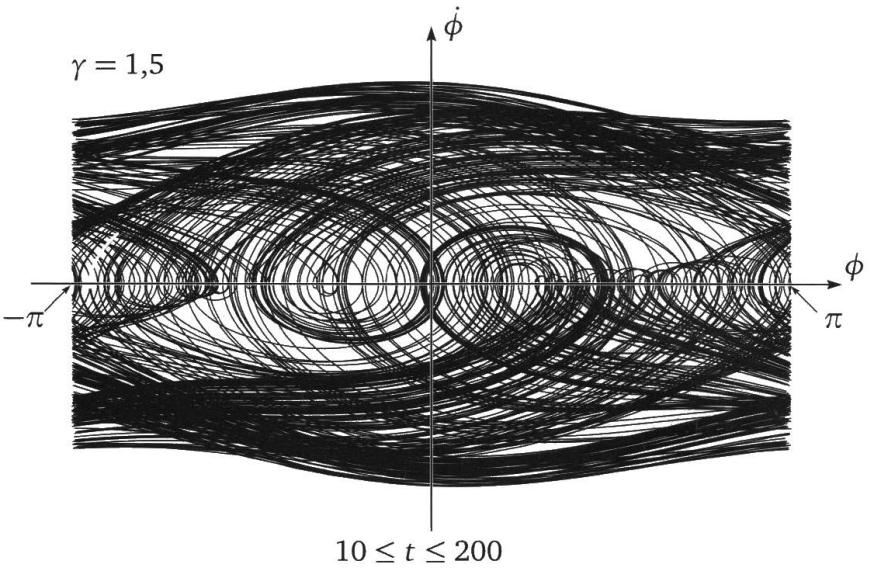


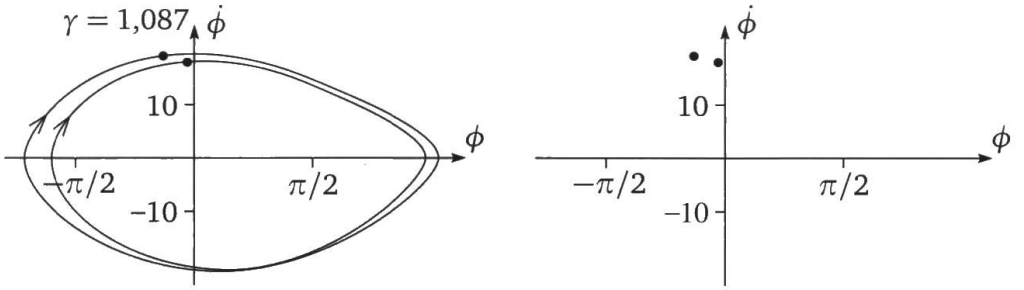
Figura 12.27. La órbita caótica en el espacio de estados para un PAF con $\gamma = 1{,}5$ y $\beta = \omega_0/8$. En los 190 ciclos mostrados el movimiento no se repite a sí mismo y, en realidad, nunca lo hace.

La densa maraña de trazos que recorren la Figura 12.27 proporcionan un fuerte apoyo a la afirmación de que para estos parámetros el movimiento es caótico. Desafortunadamente, uno no podría afirmar que la imagen arroja mucha luz en la naturaleza del movimiento caótico. Está simplemente demasiado densamente empaquetada con información como para mostrar cualquier mensaje útil. En la próxima sección describiré la sección de Poincaré, que es una técnica para extraer suficiente información de imágenes como la de la Figura 12.27 para permitir que emerja un patrón interesante.

12.8 Secciones de Poincaré

Para el movimiento caótico de un PAF, la órbita en el espacio de estados es una manera descriptiva de visualizar la historia del péndulo. Para el movimiento caótico, una órbita del espacio de estados transmite un sentido de la naturaleza dramática del caos, pero está demasiado llena de información para ser de alguna utilidad seria. Una manera de resolver esta dificultad es un truco que ya hemos usado y fue sugerido por Poincaré: en vez de seguir el movimiento como una función de la variable continua t, observamos la posición sólo una vez por ciclo en los instantes $t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \ldots$ La **sección de Poincaré** para un PAF es sólo una gráfica que muestra la «posición» del péndulo $[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$ en el espacio de estados a intervalos de un ciclo

$$t = t_0,\ t_0 + 1,\ t_0 + 2, \ldots, \tag{12.30}$$



(a) Órbita del espacio de estados **(b)** Sección de Poincaré

Figura 12.28. **(a)** Órbita del espacio de estados de un PAF con $\gamma = 1{,}078$ para $20 \leq t \leq 60$. Los puntos muestran las posiciones en $t = 20, 21, 22, \ldots$, pero, como el movimiento tiene período dos, éstas alternan entre sólo dos puntos fijos. El punto derecho muestra las posiciones para $t = 20, 22, \ldots$; el de la izquierda, aquellas para $t = 21, 23, \ldots$ **(b)** En la correspondiente sección de Poincaré, se omite la órbita y se dibujan sólo los puntos que muestran las posiciones en $t = 20, 21, 22, \ldots$ La presencia de sólo dos puntos es una clara indicación de movimiento de período dos.

con t_0 normalmente elegido de tal manera que los transitorios iniciales han desaparecido.[20] Para ilustrar esto, consideremos la órbita en el espacio de estados mostrada en la Figura 12.28(a) para un PAF con $\gamma = 1{,}078$ (y la constante de amortiguamiento renormalizada a nuestro valor normal $\beta = \omega_0/4$). Los dos ciclos de esta órbita indican que (como ya sabíamos) el movimiento a largo plazo tiene período dos. Para enfatizar esto he dibujado puntos para mostrar la posición $[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$ en intervalos de un ciclo, $t = 20, 21, 22, \ldots$ Como el movimiento tiene período dos, éstos alternan entre justo dos posiciones diferentes y sólo aparecen como dos puntos. En una sección de Poincaré se omite la órbita y se dibujan sólo los puntos en intervalos de un ciclo como en la Figura 12.28(b). Cuando el movimiento es periódico, no hay una ventaja particular de la sección de Poincaré sobre la órbita completa en el espacio de estados de la Figura 12.28(a), aunque la sección de Poincaré muestra el período muy claramente. (Una sección de Poincaré con cuatro puntos mostraría un movimiento de período cuatro y así sucesivamente). Por otro lado, cuando el movimiento es caótico, no hay dos ciclos del movimiento iguales, y la órbita del espacio de estados puede ser un completo desastre, como vimos en la Figura 12.27. En este caso, la sección de Poincaré revela algunas estructuras totalmente inesperadas.

Para ilustrar la sección de Poincaré para el movimiento caótico, escojo el péndulo cuya órbita caótica en el espacio de estados se mostró en la Figura 12.27. Es claro que, como este movimiento nunca se repite a sí mismo, la sección de Poincaré contendrá infinitamente más puntos, y todos estos puntos formarán un subconjunto de la órbita completa. Es probablemente justo decir que nadie podía haber *adivinado* cómo sería

[20] Para un sistema multidimensional, la sección de Poincaré incluye tomar un trozo bidimensional, o *sección*, a través del espacio de estados multidimensional. Es por ello la palabra «sección».

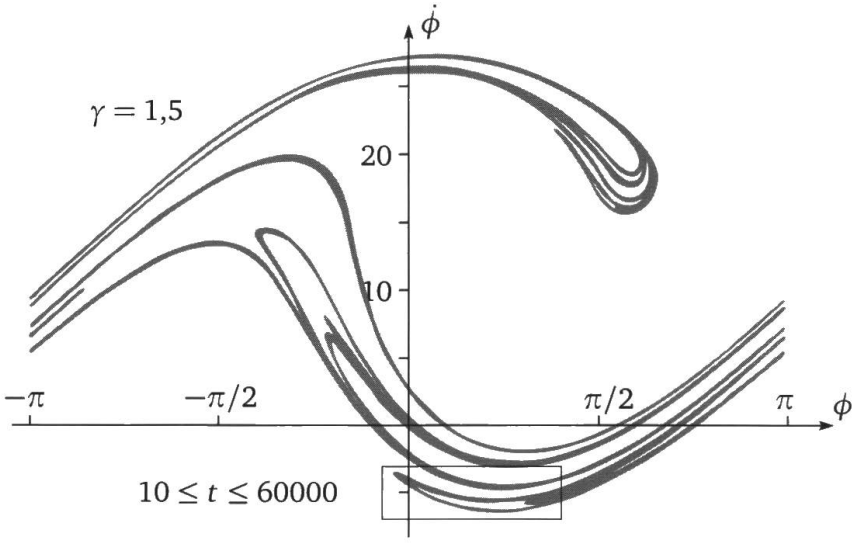


Figura 12.29. La sección de Poincaré para un péndulo con $\gamma = 1{,}5$ y constante de amortiguamiento $\beta = \omega_0/8$ para tiempos $10 \leq t \leq 60\ 000$. Esta figura está hecha de casi 60 000 puntos que muestran la «posición» $[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$ en intervalos de un ciclo, $t = 10, 11, \ldots, 60\ 000$. El rectángulo gris indica la región que está ampliada en la Figura 12.30.

este subconjunto, pero con la ayuda de un ordenador de alta velocidad lo podemos averiguar. El resultado se muestra en la Figura 12.29. Aunque no es ciertamente obvio qué significa exactamente esta elegante figura, *sí* es ciertamente obvio que significa algo. Seleccionando de la Figura 12.27 solo aquellos puntos a intervalos de un ciclo, hemos reducido la maraña densa, y casi sólida, de la Figura 12.27 a la curva elegante de la Figura 12.29. Realmente, mientras que la Figura 12.29 *parece* una curva relativamente sencilla, no es una curva en absoluto, sino más bien un **fractal**. Un fractal se puede definir de varias maneras, pero una característica interesante de los fractales es que cuando se agranda la escala y se amplía una porción de la imagen, se encuentran más estructuras que son en muchos sentidos similares a la imagen original (parecido a una fotografía de una persona que sujeta una fotografía de una persona que a su vez sujeta una fotografía... y así sucesivamente). Para ilustrar esta propiedad de nuestra sección de Poincaré, he ampliado la región indicada por el recuadro gris situado en la parte inferior de la Figura 12.29. Advierta que (en la escala de la Figura 12.29) esta región comprende una «lengua» prominente que apunta hacia la izquierda cerca de la parte izquierda del recuadro. En la Figura 12.30 este recuadro está ampliado cuatro veces. Con esta ampliación queda claro que la lengua aparentemente única situada a la derecha del recuadro de 12.29 son realmente cuatro lenguas, mientras que la de la izquierda son realmente al menos cinco.

Este proceso de ampliación de regiones cada vez más pequeñas de la sección de Poincaré puede, al menos en principio, continuarse indefinidamente. La Figura 12.31 es una ampliación cuatro veces mayor de la región mostrada por el recuadro gris

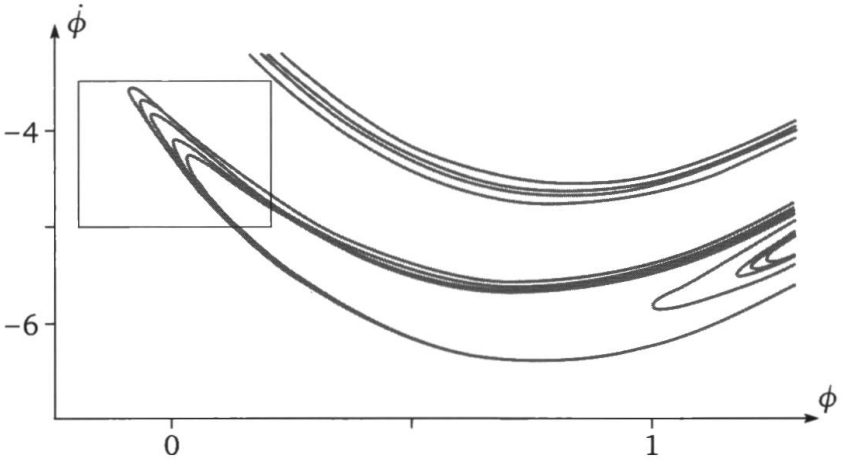


Figura 12.30. Ampliación del pequeño recuadro situado en la parte inferior de la sección de Poincaré de la Figura 12.29. Como se puede ver, cada una de las dos lenguas que aparecen en el recuadro de 12.29 están constituidas por varias lenguas. El recuadro gris situado a la izquierda es la región que será ampliada aún más en la Figura 12.31.

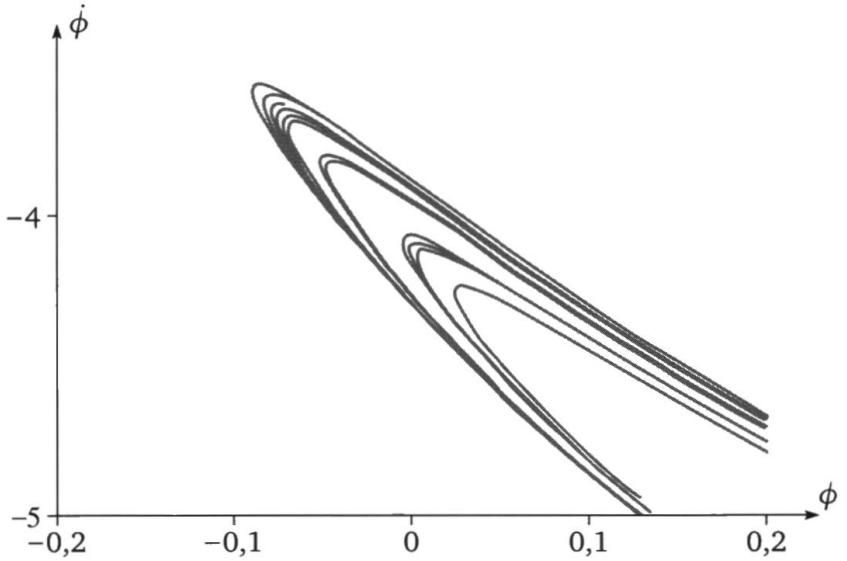


Figura 12.31. Una ampliación aún mayor del recuadro situado a la izquierda de la ampliación de la Figura 12.30. Como se puede ver, cada una de las cinco lenguas del recuadro de 12.30 (excepto quizá la más interna) está compuesta por varias lenguas.

situado a la izquierda de la Figura 12.30. En esta ampliación vemos que cada una de las cinco lenguas de la parte izquierda de la Figura 12.30 (excepto quizá la quinta) realmente consisten en tres o cuatro lenguas separadas. Esta famosa **autosemejanza** de la figura es una de las propiedades características de un fractal.

Cuando la sección de Poincaré del movimiento de un sistema caótico es un fractal, se dice que el movimiento a largo plazo es un **atractor extraño**. Desafortunadamente está bastante más allá del alcance de este libro explicar qué significa que

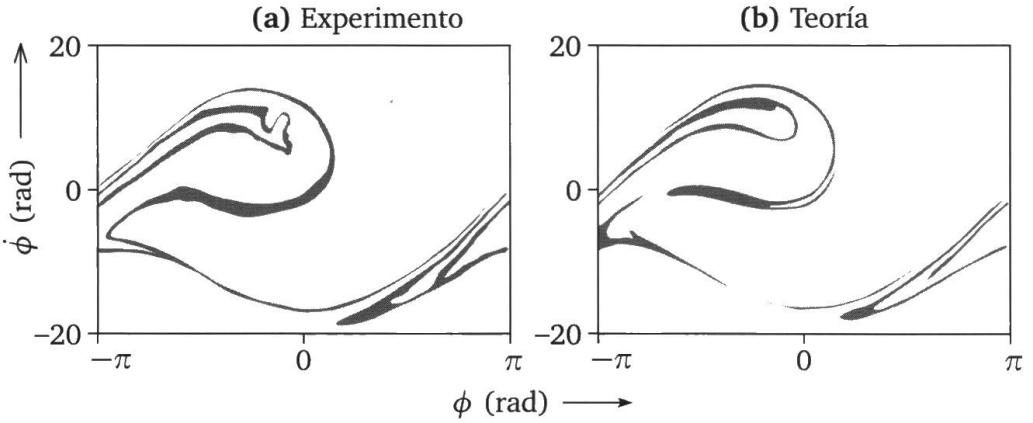


Figura 12.32. Sección de Poincaré para un PAF. **(a)** Resultados experimentales usando el Péndulo Caótico Daedalon. **(b)** Predicciones teóricas usando los mismos parámetros que en la parte (a). Cortesía de los Catedráticos H. J. T. Smith y James Blackburn y de la Daedalon Corporation.

la sección de Poincaré de un atractor caótico es un fractal, y de hecho hay mucho sobre este fenómeno sin entender aún. Sin embargo, es innegablemente fascinante que la estructura geométrica extraña de fractal aparezca en nuestro estudio del comportamiento a largo plazo de sistemas caóticos. Este descubrimiento ha estimulado mucha investigación tanto en la física de los sistemas caóticos como en las matemáticas de los fractales.

Observar un atractor extraño para un péndulo real es obviamente un gran desafío, pero una vez más los experimentadores lo han logrado. La Figura 12.32 muestra una sección de Poincaré formada con el péndulo caótico Daedalon. La parte (a) muestra los resultados experimentales y la parte (b) la predicción teórica (esto es, una solución numérica de la ecuación del movimiento usando los valores experimentales de los parámetros). Considerando la gran sutileza de estas gráficas, la concordancia es excepcional.[21]

12.9 La aplicación logística

Como he enfatizado repetidamente, el fenómeno del caos aparece en muchas situaciones diferentes. En particular, hay ciertos sistemas que pueden exhibir caos, pero cuyas ecuaciones de movimiento (denominadas *aplicaciones*) son más sencillas que las ecuaciones de cualquier sistema mecánico. Aunque estos sistemas no son estric-

[21] Existen, sin embargo, diferencias. Una causa posible es la dificultad de hacer un motor de aplicación que sea totalmente sinusoidal.

tamente parte de la mecánica clásica, vale la pena mencionarlos aquí, por varias razones: debido a que sus ecuaciones de movimiento son sencillas, varios aspectos de su movimiento se pueden entender usando métodos bastante elementales. Cualquier comprensión del caos que obtengamos estudiando estos sistemas puede arrojar luz en el comportamiento correspondiente de los sistemas mecánicos. En particular, hay una íntima conexión entre estas «aplicaciones» y las secciones de Poincaré de los sistemas mecánicos. Finalmente, una discusión del caos en este nuevo contexto pone de manifiesto la diversidad de sistemas que exhiben el fenómeno.

Tiempo discreto y aplicaciones

En casi todos los problemas de mecánica, uno se ocupa de la evolución de un sistema a medida que el tiempo avanza continuamente. Sin embargo, existen sistemas para los cuales el tiempo es una variable discreta. La historia de cualquier suceso que ocurra sólo una vez al año, tal como la Super Bowl, es un ejemplo. La puntuación en los juegos de la Super Bowl está definida sólo en una secuencia de tiempos discretos comenzando en 1967 y espaciados a intervalos de un año:

$$t = 1967, 1968, 1969, \ldots \tag{12.31}$$

La asistencia a una reunión semanal está definida sólo para tiempos discretos espaciados una semana. Las precipitaciones totales en el monzón anual indio están definidas sólo para tiempos discretos espaciados un año.

Incluso cuando una variable está definida como una función de tiempo continuo, podemos darnos cuenta de que necesitamos sus valores sólo a ciertos tiempos discretos. Por ejemplo, los entomólogos que estudian la población de un insecto particular pueden no tener ningún interés en la evolución diaria de la población; en lugar de ello pueden necesitar registrar la población de insectos sólo una vez al año, inmediatamente después de que haya nacido una nueva generación. Otro ejemplo de esta situación es la sección de Poincaré para un sistema mecánico como el que se describe en la Sección 12.8. Nuestro objetivo final es conocer el estado del sistema para todos los tiempos (continuos), pero vimos que a veces es útil anotar sólo el estado a intervalos discretos de un ciclo. Hasta el punto en que estemos dispuestos a aceptar esta menor cantidad de información, la sección de Poincaré reduce el problema del péndulo (o el que sea) a un problema de tiempo discreto, y cualquier cosa que podamos aprender sobre sistemas de tiempo discreto debería darnos alguna pista sobre el posible comportamiento de las secciones de Poincaré.

En el caso del péndulo amortiguado forzado, sabemos que el estado del sistema, dado por el par $[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$, en cualquier instante t determina únivocamente el estado en cualquier instante posterior. En particular, determina el estado $[\phi(t+1), \dot{\phi}(t+1)]$ un ciclo después. Esto significa que existe una función f (que no conocemos, pero que ciertamente existe) que, actuando sobre cualquier par elegido $[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$,

proporciona el par correspondiente $[\phi(t+1), \dot{\phi}(t+1)]$. Esto es,

$$[\phi(t+1), \dot{\phi}(t+1)] = f\left([\phi(t), \dot{\phi}(t)]\right). \tag{12.32}$$

De la misma manera, podríamos imaginar una especie de insecto con la propiedad de que la población n_{t+1} en el año $t+1$ está determinada solamente[22] por la población n_t en el año anterior t. De nuevo esto implicaría la existencia de una función f que lleve cualquier n_t hasta su correspondiente n_{t+1}:

$$n_{t+1} = f(n_t). \tag{12.33}$$

A una expresión de esta forma la podemos denominar **ecuación de crecimiento** para la población de interés.

Ejemplo 12.1 *Crecimiento exponencial de la población*

El ejemplo más sencillo de una ecuación de crecimiento del tipo (12.33) es el caso en que n_{t+1} es proporcional a n_t:

$$n_{t+1} = f(n_t) = rn_t. \tag{12.34}$$

Esto es, la función $f(n)$ que proporciona la población del año siguiente en términos de la de este año es justo

$$f(n) = rn \tag{12.35}$$

donde la constante positiva r se podría denominar **ritmo de crecimiento** o **parámetro de crecimiento** de la población. [Por ejemplo si cada insecto vivo esta primavera se muere antes de la siguiente primavera pero deja dos crías vivas, entonces la población cumpliría (12.34) con $r = 2$]. Resolver la ecuación (12.34) para n_t en términos de n_0 y discutir el comportamiento a largo plazo de n_t.

La solución de (12.34) se ve fácilmente por inspección. Observe que

$$n_1 = f(n_0) = rn_0$$

y

$$n_2 = f(n_1) = f(f(n_0)) = r^2 n_0$$

[22] Este es, por supuesto, un modelo muy simplificado. En el mundo real, la población n_{t+1} ciertamente depende de n_t, pero también de muchos otros factores, tales como las precipitaciones en el año t, el suministro de comida a los insectos y la población de pájaros que comen insectos. Sin embargo, podemos imaginar una isla de clima templado, con un suministro constante de comida para los insectos y sin depredadores de insectos, en la cual n_{t+1} está unívocamente determinado por n_t sola.

de la cual está claro que

$$n_t = f(n_{t-1}) = \overbrace{f(f(\cdots f(}^{t \text{ términos}} n_0)\cdots)) = r^t n_0. \tag{12.36}$$

Vemos que si $r > 1$, la población n_t crece exponencialmente, aproximándose a infinito cuando $t \to \infty$. Si $r = 1$, la población permanece constante, y si $r < 1$ disminuye exponencialmente a cero.

Antes de discutir una ecuación de crecimiento más interesante, necesito introducir algo de terminología. En matemáticas, las palabras «función» y «aplicación» se utilizan como sinónimos casi exactos. Por tanto podemos decir que la expresión (12.33) define n_{t+1} como una *función* de n_t. O podemos decir que (12.33) es una **aplicación** en la que f lleva a n_t hasta la correspondiente[23] n_{t+1}, una relación que podemos representar de este modo:

$$n_t \xrightarrow{f} n_{t+1} = f(n_t). \tag{12.37}$$

La secuencia completa de números, $n_0, n_1, n_2, \cdots$ se puede escribir análogamente como

$$n_0 \xrightarrow{f} n_1 \xrightarrow{f} n_2 \xrightarrow{f} n_3 \xrightarrow{f} \cdots \tag{12.38}$$

Y se describe naturalmente como una **aplicación iterada**, o simplemente **aplicación** para abreviar. Por alguna razón la palabra «aplicación» (en oposición a «función») se usa casi universalmente para describir relaciones como (12.37) entre valores sucesivos de cualquier variable de tiempo discreto. La aplicación (12.37) es una aplicación *unidimensional* porque convierte un único número n_t en un único número n_{t+1}. La relación correspondiente (12.32) para la sección de Poincaré de un PAF define una *aplicación bidimensional*, porque convierte el par de números $[\phi(t), \dot{\phi}(t)]$ en el par $[\phi(t+1), \dot{\phi}(t+1)]$.

La aplicación logística

La aplicación exponencial del Ejemplo 12.1 con $r > 1$ es un modelo razonablemente realista para el crecimiento inicial de muchas poblaciones, pero ninguna población real puede crecer exponencialmente para siempre. Algo (superpoblación o escasez

[23] El origen de este uso un poco extraño parece estar en la cartografía. Un mapa de un cartógrafo de los Estados Unidos, por ejemplo, establece una correspondencia entre cada punto real de los Estados Unidos y el punto correspondiente sobre un trozo de papel, de la misma manera que la función $y = f(x)$ establece una correspondencia entre cada valor x y el correspondiente valor $y = f(x)$.

de comida) finalmente frena el crecimiento. Hay muchas maneras de modificar la aplicación (12.34) para proporcionar un modelo más realista del crecimiento de la población. Una de las más simples es sustituir la función $f(n) = rn$ de (12.34) por

$$f(n) = rn(1 - n/N) \tag{12.39}$$

donde N es una constante grande positiva, cuya importancia veremos ahora mismo. Esto es, sustituimos la aplicación exponencial (12.34) por la conocida **aplicación logística**

$$n_{t+1} = f(n_t) = rn_t(1 - n_t/N). \tag{12.40}$$

Siempre que la población permanece pequeña comparada con N, el término n_t/N en (12.40) no es importante, y nuestra nueva aplicación produce la misma evolución que la aplicación exponencial. Pero si n_t aumenta y tiende a N, el término n_t/N se hace importante, y el paréntesis $(1 - n_t/N)$ empieza a disminuir y «anula» algo del exceso de crecimiento. De este modo este «factor de mortalidad» $(1-n/N)$ en (12.39) produce exactamente la ralentización del crecimiento de la población a medida que n se hace grande, y la superpoblación o el hambre se hacen importantes. En particular, si n_t llegara a alcanzar el valor N, el paréntesis $(1-n_t/N)$ en (12.40) desaparecería, y la población del año siguiente n_{t+1} sería cero. Si n_t fuera mayor que N, entonces n_{t+1} sería negativo (lo cual es imposible). En otras palabras, una población gobernada por la aplicación logística (12.40) nunca puede exceder el valor N, el máximo o **capacidad de carga** del modelo. Advierta que, debido al término que involucra a n en el factor de mortalidad, la aplicación logística (12.39) (no así la aplicación exponencial) es *no lineal*. Es la no linealidad la que hace posible el comportamiento caótico de la aplicación logística.

La Figura 12.33 compara el crecimiento exponencial y el logístico, para un parámetro de crecimiento $r = 2$ y una población inicial de $n_0 = 4$. La curva de arriba

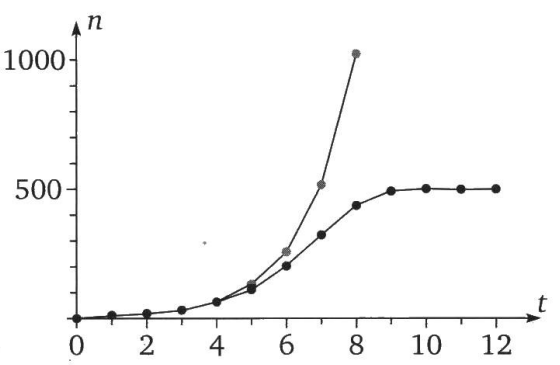


Figura 12.33. Crecimiento exponencial y logístico, ambos con parámetro de crecimiento $r = 2$. Los puntos grises muestran el crecimiento exponencial, que aumenta sin límite; los puntos negros muestran el crecimiento logístico, el cual finalmente se frena y se aproxima a un equilibrio en $n = 500$. Las líneas que acompañan a los puntos son sólo para guiar al ojo.

(puntos grises) muestra la bifurcación sin final del caso exponencial; la curva de abajo (puntos negros) muestra el crecimiento predicho por la aplicación logística (12.40), con el mismo parámetro de crecimiento $r = 2$ y con una capacidad de carga $N = 1000$. Siempre que n permanezca pequeño (mucho menos que 1000), el crecimiento logístico es indistinguible del crecimiento exponencial puro, pero una vez que n alcance 100 o así, el factor de mortalidad frena visiblemente el crecimiento logístico, que finalmente se estabiliza alrededor de $n = 500$.

Antes de discutir la aplicación logística en detalle es conveniente simplificarla cambiando las variables de la población n a la *población relativa*,

$$x = n/N, \tag{12.41}$$

el ratio de la población real n a su valor máximo posible N. Dividiendo ambos miembros de (12.40) por N, vemos que x_t cumple la ecuación de crecimiento

$$x_{t+1} = f(x_t) = rx_t(1-x_t). \tag{12.42}$$

donde he redefinido la aplicación f como una función de x para ser

$$f(x) = rx(1-x). \tag{12.43}$$

Como la población n está confinada al rango $0 \leq n \leq N$, la población relativa $x = n/N$ está restringida a

$$0 \leq x \leq 1. \tag{12.44}$$

Dentro de este rango, la función $x(1-x)$ tiene un máximo de $1/4$ (en $x = 1/2$). Por consiguiente, para garantizar que x_{t+1}, dado por (12.42), nunca excede de 1, debemos limitar el factor de crecimiento a $0 \leq r \leq 4$. Por lo tanto, estaremos estudiando la aplicación (12.42) en los rangos $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq r \leq 4$.

Antes de fijarnos en algunos de los aspectos exóticos de la aplicación logística, observemos primero el par de casos en los que se comporta justo como uno esperaría. La Figura 12.34(a) muestra la población logística para un parámetro de crecimiento $r = 0{,}8$ y para dos valores iniciales diferentes, $x_0 = 0{,}1$ y $x_0 = 0{,}5$. Se puede ver que en ambos casos $x_t \to 0$ cuando $t \to \infty$. De hecho es fácil ver que siempre que $r < 1$, la población finalmente llega a cero sea cual sea su valor inicial: de (12.42) vemos que $x_t \leq rx_{t-1}$ y por tanto que $x_t \leq r^t x_0$; por lo tanto, si $r < 1$, concluimos que $x_t \to 0$ cuando $t \to \infty$.

La Figura 12.34(b) muestra la población logística para un parámetro de crecimiento $r = 1{,}5$ y para las mismas dos condiciones iniciales. Para $x_0 = 0{,}1$ vemos

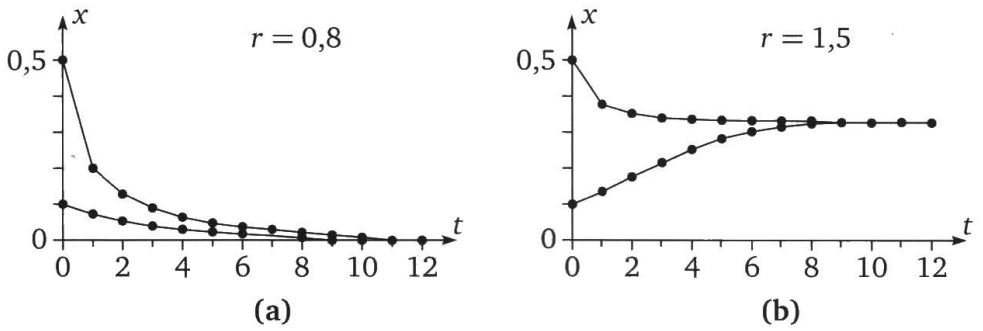


Figura 12.34. La población relativa $x_t = n_t/N$ para la aplicación logística (12.42), con dos condiciones iniciales diferentes para cada uno de dos ritmos de crecimiento diferentes. **(a)** Con el parámetro de crecimiento $r = 0{,}8$, la población tiende a cero rápidamente ya sea $x_0 = 0{,}1$ o $x_0 = 0{,}5$. **(b)** Con $r = 1{,}5$ y las mismas dos condiciones iniciales, la población tiende al valor fijo 0,33.

que la población aumenta al principio. Por otro lado, para el valor inicial mayor $x_0 = 0{,}5$ el factor de mortalidad hace que la población *disminuya* al principio. En cualquiera de los dos casos, se estabiliza finalmente en $x = 0{,}33$.

Puntos fijos

En los dos casos mostrados en la Figura 12.34 podemos decir que la aplicación logística tiene un **atractor** constante hacia el cual la población finalmente se dirige, a saber $x = 0$ para cualquier $r < 1$, y $x = 0{,}33$ para $r = 1{,}5$. Si sucede que la población comienza igual a tal atractor constante, $x_0 = x^*$ digamos, entonces simplemente permanece fija allí todo el tiempo; esto es, $x_t = x^*$ para todo t. Esto obviamente sucede si y sólo si

$$f(x^*) = x^*. \tag{12.45}$$

Cualquier valor x^* que cumpla esta ecuación se denomina **punto fijo** de la aplicación f. Estos puntos fijos son análogos a los puntos de equilibrio de un sistema mecánico, en que el sistema que empieza en un punto fijo permanece allí para siempre.

Para una aplicación dada, podemos resolver la ecuación (12.45) para encontrar sus puntos fijos. Por ejemplo, los puntos fijos de la aplicación logística deben cumplir

$$rx^*(1-x^*) = x^*, \tag{12.46}$$

que se resuelve fácilmente para dar

$$x^* = 0 \qquad \text{o} \qquad x^* = \frac{r-1}{r} \tag{12.47}$$

La primera solución es el punto fijo $x^* = 0$ que ya hemos observado. La segunda solución depende del valor de r. Para $r < 1$ es negativa y por tanto irrelevante. Para

$r = 1$ coincide con la primera solución $x^* = 0$, pero para $r > 1$ es un segundo punto fijo, distinto. Por ejemplo, para $r = 1{,}5$ da el punto fijo que ya hemos observado en $x^* = 1/3$.

Es una cosa buena que podamos realmente resolver la ecuación (12.45) analíticamente para hallar los puntos fijos de la aplicación logística, pero es también instructivo examinar la ecuación gráficamente, porque las consideraciones gráficas proporcionan puntos de vista adicionales y se pueden emplear en muchas aplicaciones diferentes, algunas de las cuales no necesariamente se pueden resolver analíticamente. Para resolver la Ecuación (12.45) gráficamente, simplemente representamos las dos funciones x y $f(x)$ frente a x como en la Figura 12.35 y leemos uno por uno los puntos fijos cuando pasan por aquellos valores x^* donde las dos gráficas se cortan. Cuando r es pequeño, la curva de $f(x)$ está por debajo de la diagonal del primer cuadrante de la gráfica de x frente a x, y la única intersección es en $x = 0$; esto es, el único punto fijo es $x^* = 0$. Cuando r es grande la curva de $f(x)$ pasa por encima de la diagonal y hay dos puntos fijos. La frontera entre los dos casos se encuentra fácilmente advirtiendo que la pendiente de $f(x)$ en $x = 0$ es justo r. Por consiguiente, cuando aumentamos r, la curva cruza la diagonal (cuya pendiente es 1) cuando $r = 1$. De ese modo para $r < 1$ sólo hay un punto fijo en $x^* = 0$; pero cuando $r > 1$ hay dos puntos fijos, uno en $x^* = 0$ y el otro en un $x^* > 0$. La ventaja de este argumento gráfico es que funciona igual de bien para cualquier función similar $f(x)$ siempre que sea un único arco cóncavo hacia abajo. [Por ejemplo, $f(x)$ podría ser la función $f(x) = r\,\text{sen}(\pi x)$ del Problema 12.23].

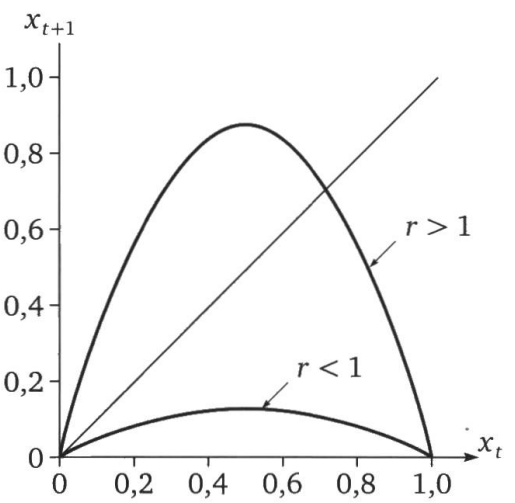


Figura 12.35. Gráficas de x frente a x (la diagonal del primer cuadrante de los ejes) y de la función logística $f(x) = rx(1 - x)$ (las dos curvas) para dos elecciones de r, una menor que uno y otra mayor que 1. Los puntos fijos de la aplicación logística están en las intersecciones de la recta con la curva. Cuando $r < 1$ sólo hay una intersección $x^* = 0$; cuando $r > 1$ hay dos intersecciones, una todavía en $x^* = 0$ y la otra en un $x^* > 0$.

Una demostración de la estabilidad

Que x^* sea un punto fijo (esto es, un valor de equilibrio) para la aplicación logística garantiza que cuando la población comienza en x^* permanecerá allí. Por sí mismo esto no es suficiente para asegurar que el valor x^* es un atractor para la aplicación. Necesitamos comprobar además que x^* es un **punto fijo estable**, esto es, que si la población comienza *cerca* de x^* evolucionará hacia x^* y no se alejará de él. (Esta característica tiene un paralelo exacto en el estudio de los puntos de equilibrio de un sistema mecánico: si un sistema comienza exactamente en un punto de equilibrio, permanecerá (en principio) allí indefinidamente. Pero sólo si el equilibrio es estable, el sistema volverá al equilibrio).

Existe una prueba sencilla para la estabilidad, que podemos obtener como sigue: x_t está cerca de un punto fijo x^*, escribimos naturalmente

$$x_t = x^* + \epsilon_t. \tag{12.48}$$

Es decir, definimos ϵ_t como la *distancia* hasta x_t desde el punto fijo x^*. Si ϵ_t es pequeño, esto nos permite evaluar x_{t+1} como

$$\begin{aligned} x_{t+1} = f(x_t) &= f(x^* + \epsilon_t) \\ &\approx f(x^*) + f'(x^*)\epsilon_t = x^* + \lambda\epsilon_t \end{aligned} \tag{12.49}$$

donde en la última expresión he usado el hecho de que x^* es un punto fijo [así que $f(x^*) = x^*$] y he introducido la notación λ para la derivada de $f(x)$ en x^*,

$$\lambda = f'(x^*). \tag{12.50}$$

Ahora, de acuerdo con (12.48), $x_{t+1} = x^* + \epsilon_{t+1}$. Comparando esta con la última expresión de (12.49) vemos que

$$\epsilon_{t+1} \approx \lambda\epsilon_t. \tag{12.51}$$

Debido a esta sencilla relación, el número $\lambda = f'(x^*)$ se denomina **multiplicador** o **autovalor** del punto fijo. Muestra que si $|\lambda| < 1$, entonces una vez que x_t está cerca de x^*, los valores sucesivos se aproximan más a x^*. Por otro lado, si $|\lambda| > 1$, entonces cuando x_t está cerca de x^*, los valores siguientes se *alejan* de x^*. Esta es nuestra prueba requerida para la estabilidad:

Estabilidad de los puntos fijos

Sea x^* un punto fijo de la aplicación $x_{t+1} = f(x_t)$; esto es, $f(x^*) = x^*$. Si $|f'(x^*)| < 1$, entonces x^* es estable y actúa como un atractor. Si $|f'(x^*)| > 1$, entonces x^* es inestable y actúa como un repulsor.

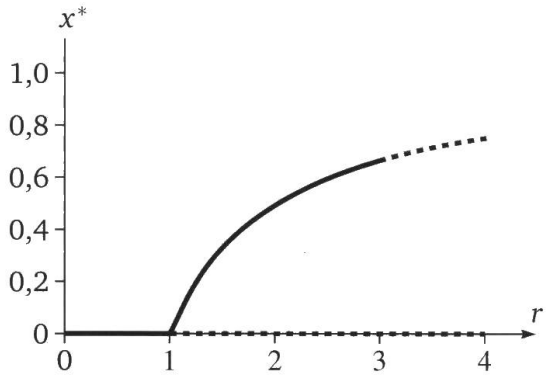


Figura 12.36. Los puntos fijos x^* de la aplicación logística como funciones del parámetro de crecimiento r. Las curvas continuas muestran los puntos fijos estables y las curvas a trazos los inestables. Observe cómo el punto fijo $x^* = 0$ se vuelve inestable precisamente en el lugar ($r = 1$) donde primero aparece el punto fijo distinto de cero.

Podemos aplicar fácilmente esta prueba a los dos puntos fijos de la aplicación logística: como $f(x) = rx(1-x)$, su derivada es

$$f'(x) = r(1-2x).$$

En el punto fijo $x^* = 0$, esto significa que la derivada crucial es

$$f'(x^*) = r\,;$$

por lo tanto, el punto fijo $x^* = 0$ es estable para $r < 1$ pero inestable para $r > 1$. En el punto fijo $x^* = (r-1)/r$, la derivada es

$$f'(x^*) = 2-r\,,$$

así que este punto fijo es estable para $1 < r < 3$, pero inestable para $r > 3$. Estos resultados se resumen en la Figura 12.36, la cual muestra los valores de punto-fijo x^* como funciones del parámetro r con los puntos fijos estables mostrados como curvas continuas y los inestables como curvas a trazos.

Los argumentos antes expuestos muestran exactamente cuándo cada uno de los dos puntos fijos se vuelve inestable y que el segundo aparece exactamente cuando el primero se hace inestable. Por otro lado, estaría bien tener un argumento que hiciera más claro *por qué* los puntos fijos se comportan de la manera que lo hacen y mostrase más claramente (lo que es cierto) que las mismas conclusiones cualitativas se aplican a cualquier otra aplicación unidimensional con las mismas características generales. Tal argumento se puede encontrar examinando la gráfica de la Figura 12.35. En aquella figura vimos que los puntos fijos de la aplicación corresponden a intersecciones de la curva de $f(x)$ frente a x con la diagonal (x frente a x). Cuando r es pequeño, estaba claro que sólo hay una de tales intersecciones en $x^* = 0$. Cuando r

aumentó, la curva se hizo más cóncava hacia arriba y finalmente cruzó la diagonal produciendo una segunda intersección y por tanto un segundo punto fijo, distinto de cero. Vimos que esta segunda intersección aparece cuando la pendiente $f'(0)$ de la curva en $x = 0$ es exactamente 1 (esto es, cuando es tangente a la diagonal). Desde el punto de vista de nuestra prueba para la estabilidad, esto significa que el segundo punto fijo tiene que aparecer en exactamente el momento en que el primero en $x^* = 0$ cambia de estable a inestable.

La primera bifurcación del período

La Figura 12.36 cuenta la historia completa de los puntos fijos de la aplicación logística. Las curvas continuas muestran los puntos fijos estables, que son los atractores constantes. Vemos que para $r < 1$, la población logística tiende a 0 cuando $t \to \infty$; para $1 < r < 3$, se aproxima al otro punto fijo $x^* = (r-1)/r$ cuando $t \to \infty$. Pero, ¿qué pasa (y esto prueba la cuestión más interesante) cuando $r > 3$? En la era de los ordenadores esto se contesta fácilmente. La Figura 12.37 muestra los 30 primeros ciclos de la población logística con un parámetro de crecimiento de $r = 3{,}2$. La característica más llamativa de esta gráfica es que ya no se estabiliza a un único valor constante. En lugar de ello, oscila atrás y adelante entre los dos valores fijos mostrados como x_a y x_b, repitiéndose a sí misma una vez cada dos ciclos. En el lenguaje desarrollado para el péndulo amortiguado forzado, podemos decir que el período se ha doblado a período dos, y este movimiento limitante de período dos se denomina **ciclo-dos**.

Podemos entender la bifurcación del período de la aplicación logística con los métodos gráficos ya desarrollados, aunque el argumento es un poco más complicado. Las observaciones esenciales son estas: primero, ninguno de los dos valores limitantes x_a y x_b es un punto fijo de la aplicación $f(x)$. En lugar de eso,

$$f(x_a) = x_b \qquad \text{y} \qquad f(x_b) = x_a. \tag{12.52}$$

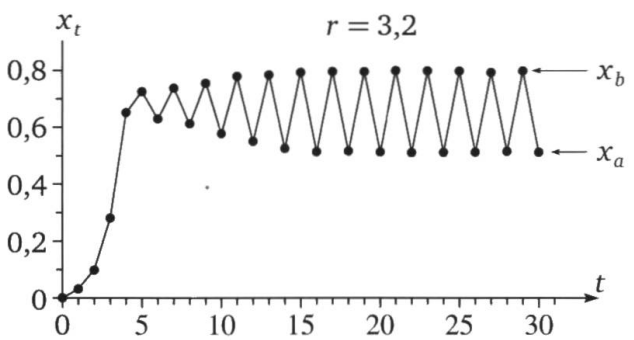


Figura 12.37. Una población logística con parámetro de crecimiento $r = 3{,}2$. La población nunca se estabiliza a un valor constante; en lugar de ello, oscila entre dos valores, repitiéndose a sí misma una vez cada *dos* ciclos. En otras palabras, ha doblado su período a período dos.

Consideremos, sin embargo, la **aplicación duplicada** (o **segunda aplicación iterada**)

$$g(x) = f(f(x)), \tag{12.53}$$

que lleva la población x_t a la población de dos años más tarde a partir de ahora, por tanto,

$$x_{t+2} = g(x_t). \tag{12.54}$$

Está claro de la Figura 12.37 o las ecuaciones (12.52) que tanto x_a como x_b son puntos fijos de la aplicación doble $g(x)$,[24]

$$g(x_a) = x_a \qquad \text{y} \qquad g(x_b) = x_b. \tag{12.55}$$

Por consiguiente, para estudiar los ciclos-dos de la aplicación $f(x)$ sólo tenemos que examinar los puntos fijos de la aplicación doble $g(x) = f(f(x))$, y para ello podemos usar nuestro entendimiento de los puntos fijos. Antes de hacer esto, vale la pena darse cuenta de que cualquier punto fijo de $f(x)$ es automáticamente también punto fijo de $g(x)$. (Si $x_{t+1} = x_t$ para todo t, entonces ciertamente $x_{t+2} = x_t$). Por lo tanto, los ciclos-dos de $f(x)$ corresponden a aquellos puntos fijos de $g(x)$ que no son también puntos fijos de $f(x)$.

Como $f(x)$ es una función cuadrática de x, se sigue que $g(x) = f(f(x))$ es una función cuártica, cuya forma explícita se puede escribir y estudiar. Sin embargo, podemos obtener un mejor entendimiento considerando su gráfica. Cuando r es

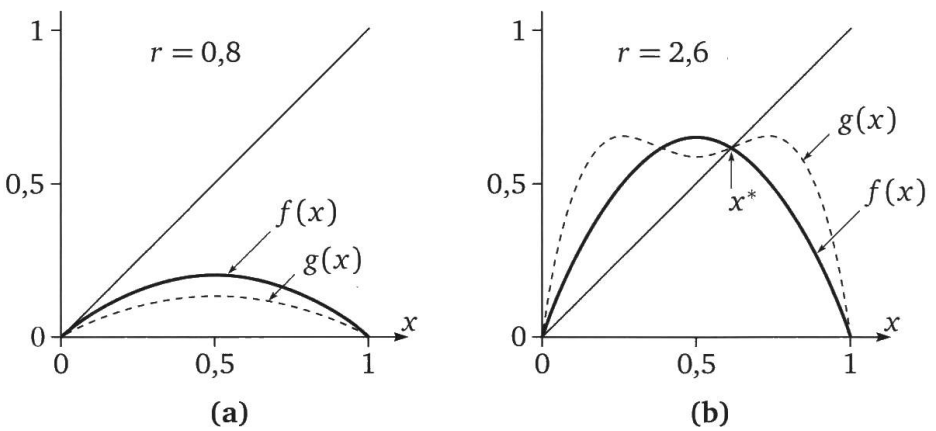


Figura 12.38. La aplicación logística $f(x)$ y su segunda iterada $g(x) = f(f(x))$. **(a)** Para un parámetro de crecimiento $r = 0{,}8$, cada función es un arco único que cruza la diagonal sólo una vez, en el origen. **(b)** Cuando $r = 2{,}6$, $f(x)$ es más alto que antes, pero todavía sólo un único arco; $g(x)$ ha desarrollado dos máximos con un valle en medio. Ambas funciones han adquirido una segunda intersección con la diagonal, en el mismo punto marcado x^*.

[24] Estos puntos se denominan también puntos fijos de segundo orden.

pequeño, sabemos que $f(x)$ es un único arco bajo (como en la Figura 12.35) y uno se puede convencer fácilmente a sí mismo de que $g(x)$ es un arco todavía más bajo, como se esboza en la Figura 12.38(a), que muestra ambas funciones para un parámetro de crecimiento $r = 0{,}8$. Cuando r aumenta, ambos arcos se elevan, y cuando $r = 2{,}6$ la función $g(x)$ ha desarrollado dos máximos como los que aparecen en la Figura 12.38(b). (Se puede explorar la razón de este desarrollo en el Problema 12.26). Además, ambas curvas cruzan ahora la diagonal dos veces, una vez en el origen y una vez en el punto fijo $x^* = (r-1)/r$. Que ambas curvas crucen la diagonal en los mismo puntos muestra dos cosas: primero, como ya sabíamos, cada punto fijo de $f(x)$ es también un punto fijo de $g(x)$, y, segundo, (para los parámetros de crecimiento mostrados en esta figura) cada punto fijo de $g(x)$ es también un punto fijo de $f(x)$; esto es, aún no son ciclos-dos.

Cuando aumentamos el parámetro de crecimiento r todavía más, las dos crestas de la aplicación doble $g(x)$ continúan elevándose, mientras que el valle que hay entre ellas se hace más bajo. (De nuevo, vea el Problema 12.26 para encontrar el motivo). La Figura 12.39 muestra las curvas de $f(x)$ y $g(x)$ para parámetros de crecimiento $r = 2{,}8, 3{,}0$, y $3{,}4$. Con $r = 2{,}8$ [parte (a)], la aplicación doble $g(x)$ todavía tiene justo los mismos puntos fijos que $f(x)$, en $x = 0$ y en el punto indicado como x^*. Para cuando $r = 3{,}4$ [parte (c)], la aplicación doble ha desarrollado dos puntos fijos adicionales, mostrados como x_a y x_b; esto es, la aplicación logística ahora tiene un ciclo-dos. El valor umbral al cual el ciclo-dos aparece es claramente al valor para el que la curva $g(x)$ es *tangente* a la diagonal; a saber, $r = 3$ para la aplicación logística, como en la parte (b) de la figura. Si $r < 3$, la curva $g(x)$ cruza la diagonal sólo una vez, en x^*; si $r > 3$ cruza tres veces, una vez en x^* y dos veces más, en x_a y x_b (una encima y otra debajo de x^*).

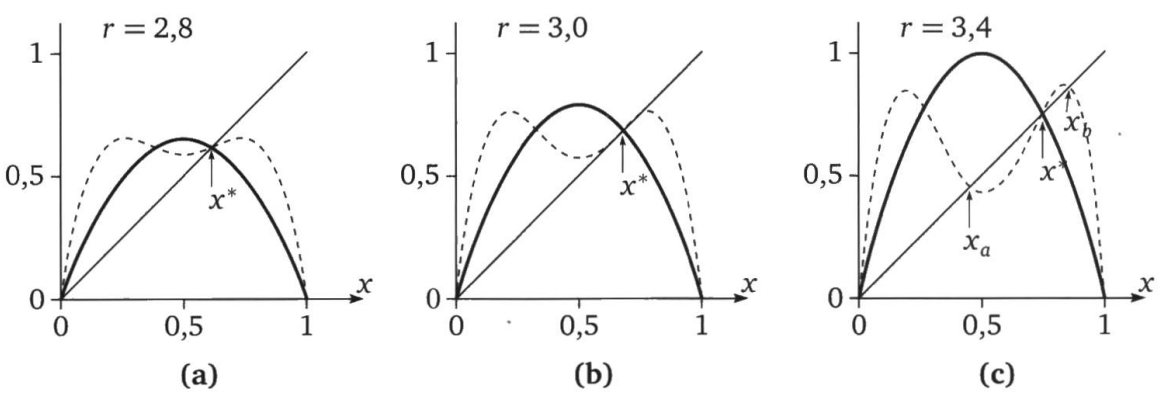


Figura 12.39. La aplicación logística $f(x)$ (curvas continuas) y su segunda iterada $g(x) = f(f(x))$ (a trazos) para $r = 2{,}8, 3{,}0$ y $3{,}4$. **(a)** Con $r = 2{,}8$, la aplicación $g(x)$ tiene los dos mismos puntos fijos que $f(x)$, a saber $x = 0$ y $x = x^*$ como se muestra. **(b)** Cuando r alcanza 3,0, la curva de $g(x)$ es tangente la diagonal, y para cualquier valor mayor que r, como en **(c)**, la aplicación $g(x)$ tiene dos puntos fijos extra denotados por x_a y x_b.

Ya sabemos que $r = 3$ es el umbral en el cual el punto fijo x^* se hace inestable. Por consiguiente, la Figura 12.39 muestra que el ciclo-dos aparece en el momento en que el «ciclo-uno» (esto es, el punto fijo) se hace inestable. Afortunadamente, estamos ahora en posición de ver *por qué* tiene que ser así. Ya advertimos que el ciclo-dos aparece precisamente cuando la curva $g(x)$ es tangente a la diagonal en el punto x^*, esto es, cuando

$$g'(x^*) = 1. \tag{12.56}$$

Para ver lo que esto implica, evaluemos la derivada $g'(x)$ de la aplicación doble $g(x)$ en los dos puntos fijos del ciclo-dos, x_a por ejemplo,

$$\begin{aligned} g'(x_a) &= \frac{d}{dx}g(x)\bigg|_{x_a} = \frac{d}{dx}f(f(x))\bigg|_{x_a} = f'(f(x))\cdot f'(x)\bigg|_{x_a} \\ &= f'(x_b)f'(x_a). \end{aligned} \tag{12.57}$$

Aquí en la última expresión de la primera línea he utilizado la regla de la cadena, y en la segunda línea he usado el hecho de que $f(x_a) = x_b$. Vamos a aplicar este resultado al nacimiento del ciclo-dos en la Figura 12.39(b). En el momento del nacimiento, $x^* = x_a = x_b$, y podemos combinar (12.56) y (12.57) para obtener

$$[f'(x^*)]^2 = 1.$$

Esto significa que $|f'(x^*)| = 1$, y, por la prueba de estabilidad, vemos que el momento en que el ciclo-dos nace es precisamente el momento en que el punto fijo x^* se hace inestable.

Podemos utilizar las mismas técnicas para ver lo que sucede cuando aumentamos r todavía más. Por ejemplo, se puede mostrar (Problema 12.28) que el ciclo-dos que acabamos de ver aparecer en $r = 3$ se hace inestable en $r = 1 + \sqrt{6} = 3{,}449$ y es sucedido por un ciclo-cuatro estable. Sin embargo, para evitar que este capítulo crezca y se haga totalmente inmanejable, sólo esbozaré brevemente algunas características que se pueden encontrar explorando la aplicación logística numéricamente.

Diagramas de bifurcación

En la Figura 12.36 vimos la historia completa de los puntos fijos de la aplicación logística en sí misma. Si añadimos en esa imagen los puntos fijos x_a y x_b de la aplicación doble $g(x) = f(f(x))$ (esto es, los ciclos-dos de la aplicación logística) obtenemos las gráficas mostradas en la Figura 12.40. Estas curvas recuerdan los comienzos del diagrama de bifurcación, Figura 12.17, para el péndulo amortiguado forzado. De hecho, podemos redibujar la Figura 12.40 usando el mismo procedimiento que se utilizó para la Figura 12.17. Primero se toma un número grande de valores igualmente espaciados del parámetro de crecimiento en el rango de interés.

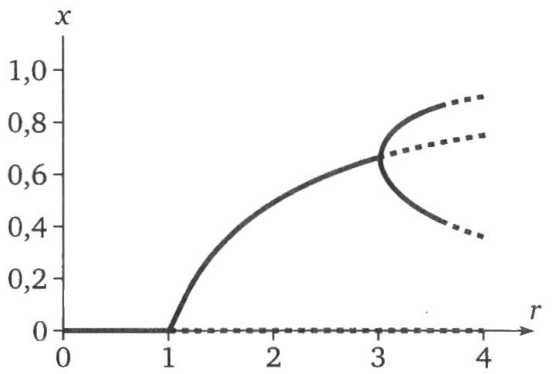


Figura 12.40. Los puntos-fijos y ciclos-dos de la aplicación logística como funciones del parámetro de crecimiento r. Las curvas continuas son estables y las curvas a trazos inestables.

(Yo elegí el rango $2{,}8 \leq r \leq 4$, porque es donde está la animación, y elegí 1200 valores igualmente espaciados en este rango). Entonces para cada valor de r se calcula las poblaciones $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{t_{\text{máx}}}$, donde $t_{\text{máx}}$ es algún tiempo muy grande. (Yo escogí $t_{\text{máx}} = 1000$). Después se elige un tiempo $t_{\text{mín}}$ suficientemente grande como para que todos los transitorios se hayan extinguido. (Yo escogí $t_{\text{mín}} = 900$). Finalmente, en una representación de x frente a r, se muestra los valores de x_t para $t_{\text{mín}} \leq t \leq t_{\text{máx}}$ como puntos por encima del correspondiente valor de r. El diagrama de bifurcación resultante para la aplicación logística se muestra en la Figura 12.41.

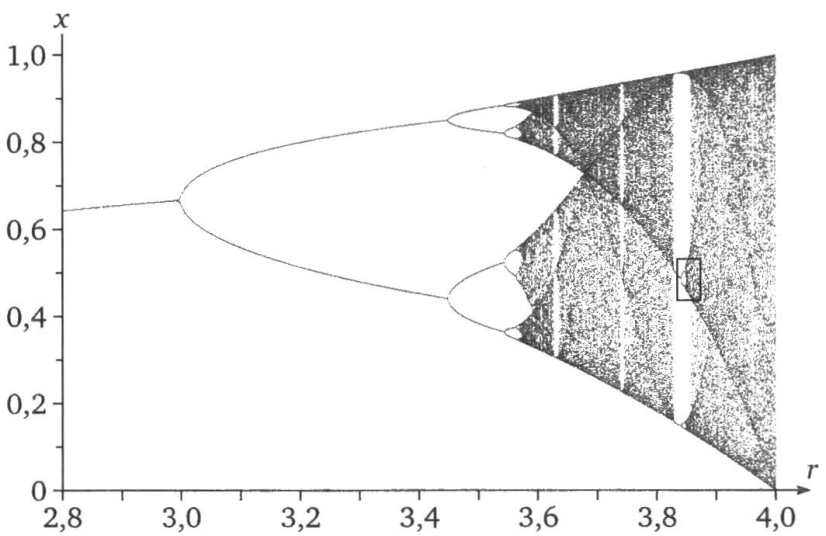


Figura 12.41. Diagrama de bifurcación para la aplicación logística. Una cascada de bifurcación de período es claramente visible comenzando en $r_1 = 3$, con una segunda bifurcación en $r_2 = 3{,}449$, y terminando en caos en $r_c = 3{,}570$. Varias ventanas de periodicidad destacan claramente entre el caos, especialmente la ventana período-tres cerca de $r = 3{,}84$. El diminuto rectángulo cerca de $r = 3{,}84$ es la región que está ampliada en la Figura 12.44.

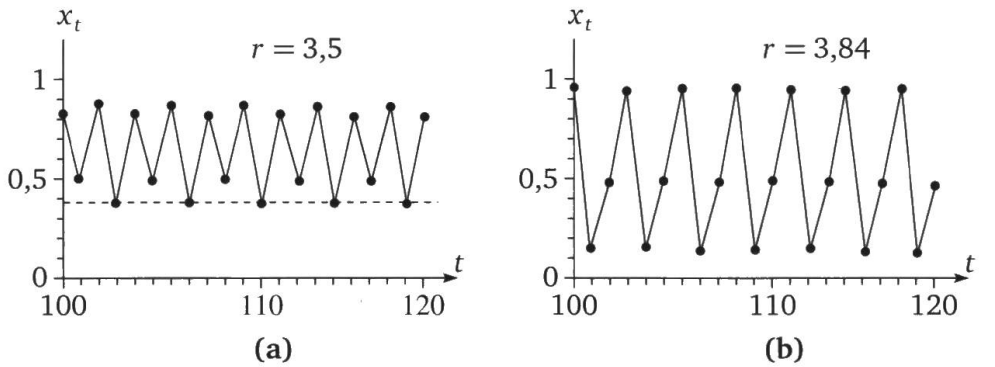


Figura 12.42. Evolución a largo plazo de poblaciones logísticas con parámetros de crecimiento $r = 3{,}5$ y 3,84. **(a)** Período cuatro. Con $r = 3{,}5$, los veinte ciclos $100 \leq t \leq 120$ toman justo cuatro valores distintos en intervalos de cuatro ciclos. (La línea horizontal a trazos es para poner de manifiesto la constancia de cada cuarto punto). **(b)** Período tres. Con $r = 3{,}84$, la población se repite cada tres ciclos.

La analogía del diagrama de bifurcación de la Figura 12.41 para la aplicación logística y la Figura 12.17 para el péndulo forzado es ciertamente llamativa. La interpretación de las dos imágenes es también similar. A la izquierda de la Figura 12.41 vemos el atractor período-uno para $r \leq 3$, seguido por la primera duplicación de período en $r = 3$. Esto va seguido por la segunda duplicación en $r = 3{,}449$, y una cascada completa de bifurcaciones que acaban en caos cerca de $r = 3{,}570$. Con la ayuda de este diagrama podemos predecir el comportamiento a largo plazo de la población logística para cualquier elección particular de r (aunque hay claramente mucho más detalle fino que no puede distinguirse en la escala de la Figura 12.41). Por ejemplo en $r = 3{,}5$, está claro que la población debería tener período cuatro, una afirmación que surge de la Figura 12.42(a), que muestra los veinte ciclos desde $t = 100$ hasta 120 para este valor de r. Análogamente, alrededor de $r = 3{,}84$, cercado entre grandes intervalos de caos, se puede ver una ventana estrecha que parece que tiene período tres, una observación reflejada en la Figura 12.42(b). Como un ejemplo de caos, la Figura 12.43 muestra la evolución de una población con $r = 3{,}7$; en los ochenta ciclos mostrados, no hay evidencia de ninguna repetición.

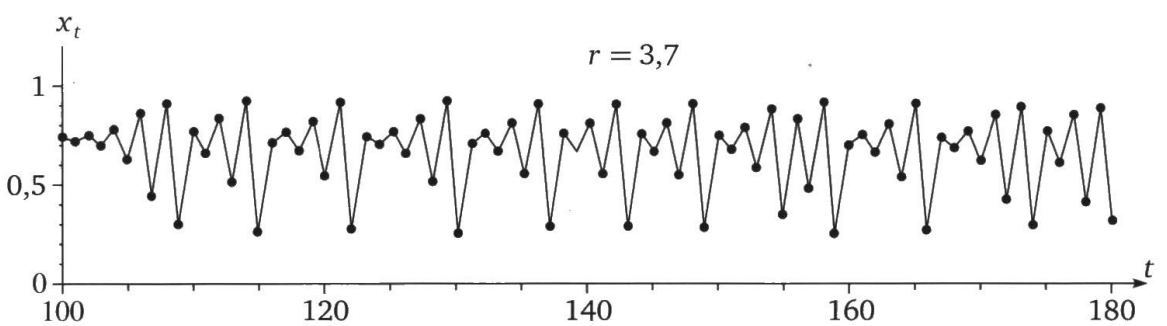


Figura 12.43. Caos. Con $r = 3{,}7$, los ochenta ciclos, $100 \leq t \leq 180$, de la aplicación logística no muestran ninguna tendencia a repetirse a sí mismos.

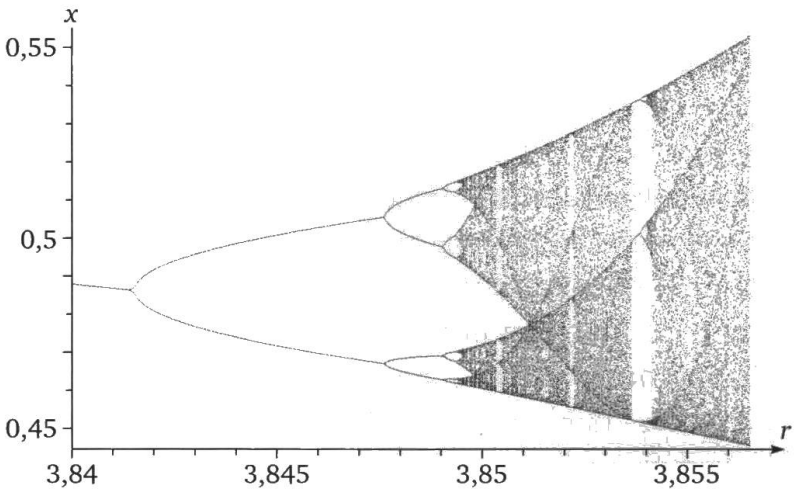


Figura 12.44. Ampliación de muchas veces del pequeño rectángulo en el diagrama de la bifurcación logística de la Figura 12.41. Esta diminuta sección del diagrama original es una copia perfecta boca abajo del original completo. Observe que esta sección es justo una de tres tendencias en la original; de este modo, aunque este diagrama comienza *pareciendo* sólo período 1 doblando a período 2, es realmente período 3 doblando a período 6 y así sucesivamente.

De la Figura 12.41 (y cuidadosas ampliaciones), se puede leer uno por uno los valores umbrales de r a los cuales la duplicación de período ocurre. Si denotamos por r_n el umbral al que el ciclo de período 2^n aparece, éstos son

$$r_1 = 3, \quad r_2 = 3{,}4495, \quad r_3 = 3{,}5441, \quad r_4 = 3{,}5644,$$
$$r_5 = 3{,}5688, \quad r_6 = 3{,}5697, \quad r_7 = 3{,}5699. \tag{12.58}$$

Como se puede comprobar, la separación entre umbrales sucesivos encoge geométricamente, justo como los intervalos correspondientes para la duplicación de período del péndulo forzado. De hecho (Problema 12.29), los números (12.58) encajan perfectamente en la relación de Feigenbaum (12.17) que primero encontramos en conexión con el PAF, con la misma constante de Feigenbaum (12.18). Otro paralelo extraordinario con el péndulo forzado es este (Problema 12.30): para aquellos r para los cuales la evolución es no caótica, si dos poblaciones comienzan suficientemente cerca una de la otra, su diferencia convergerá exponencialmente a cero cuando $t \to \infty$. Para aquellos r para los que la evolución es caótica, la misma diferencia *diverge* exponencialmente cuando $t \to \infty$. Esto es, la evolución caótica de la aplicación logística muestra la misma dependencia sensible en las condiciones iniciales que encontramos para el péndulo forzado.

Quizá la característica más importante del diagrama de la bifurcación logística es que, cuando se amplían ciertas partes del diagrama, emerge una autosemejanza perfecta. El pequeño rectángulo cerca de $r = 3{,}84$ en la Figura 12.41 ha sido ampliado en la Figura 12.44. Aparte de que esta nueva imagen está boca abajo y su escala es

muy diferente, es una copia perfecta del diagrama completo del cual es parte. Este es un ejemplo extraordinario de la *autosemejanza* que aparece en muchos sitios en el estudio del caos y que encontramos en conexión con la sección de Poincaré del PAF mostrada en las Figuras 12.29, 12.30 y 12.31.

Hay muchas otras características de la aplicación logística y más paralelismos con el PAF, todos ellos merecen la pena de ser explorados. Algunos serán tratados como problemas al final de este capítulo. Dejaré aquí, sin embargo, la aplicación logística y cerraré este capítulo con la esperanza de que nos hayamos familiarizado lo suficiente con algunas de las características principales del caos y las herramientas utilizadas para explorarlas. También espero haber despertado la curiosidad del lector para explorar todavía más este tema fascinante.[25]

Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 12

El péndulo amortiguado forzado

Un péndulo amortiguado que está perturbado por una fuerza sinusoidal $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ cumple la ecuación no lineal

$$\ddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_0^2 \operatorname{sen}\phi = \gamma\omega_0^2 \cos\omega t \qquad \text{[Ec. (12.11)]}$$

donde $\gamma = F_0/mg$ se denomina **parámetro de perturbación** y es la razón entre la amplitud de perturbación y el peso.

Bifurcación del período

Para parámetros de perturbación pequeños ($\gamma \lesssim 1$), la respuesta a largo plazo, o **atractor**, del péndulo tiene el mismo período que la fuerza de perturbación. Pero si γ se aumenta por encima de $\gamma_1 = 1{,}0663$, para ciertas condiciones iniciales y frecuencias de perturbación, el atractor realiza una **cascada de bifurcación del período**, en la cual el período se duplica repetidamente, aproximándose a infinito cuando $\gamma \to \gamma_c = 1{,}0829$. [Sección 12.4]

Caos

Si el parámetro de perturbación se aumenta por encima de γ_c, al menos para ciertas elecciones de la frecuencia de perturbación y condiciones iniciales, el movimiento a largo plazo se hace no

[25] Para ver una historia completa, con muy pocas matemáticas, vea *Chaos, Making a New Science* por James Gleick, Viking-Penguin, New York (1987). Para un resumen bastante matemático, pero muy asequible, del caos en muchos campos diferentes, vea *Nonlinear Dynamics and Chaos* por Steven H. Strogatz, Addison-Wesley, Reading, MA (1994). Dos libros que se centran sobre todo en caos en sistemas físicos son *Chaotic Dynamics: An Introduction* por G.L. Baker y J.P. Gollub, Cambridge Universtiy Press,Cambridge (1996) y *Chaos and Nonlinear Dynamics* por Robert C. Hilborn, Oxford University Press, New York (1994).

periódico, y decimos que el **caos** ha aparecido. Cuando γ se aumenta todavía más, el movimiento a largo plazo varía, a veces es caótico y a veces es periódico. [Secciones 12.5 y 12.6]

Sensibilidad a las condiciones iniciales

El movimiento caótico es **extremadamente sensible a las condiciones iniciales.** Si dos péndulos idénticos con fuerzas de perturbación idénticas se lanzan con condiciones iniciales ligeramente diferentes, su separación aumenta exponencialmente con el tiempo, por pequeña que sea la diferencia inicial. [Sección 12.5]

Diagramas de bifurcación

Un **diagrama de bifurcación** es una representación de la posición del sistema en tiempos discretos, $t_0, t_0+1, t_0+2, \cdots$ (más generalmente $t_0, t_0+\tau, t_0+2\tau, \cdots$) como una función del parámetro de perturbación (en general más un parámetro apropiado de control). [Secciones 12.17 y 12.18]

Órbitas en el espacio de estados y secciones de Poincaré

El **espacio de estados** para un sistema con n grados de libertad es el espacio $2n$-dimensional que comprende las n coordenadas generalizadas y las n velocidades generalizadas. Para el PAF, los puntos en el espacio de estados tienen la forma $(\phi, \dot{\phi})$. Una **órbita en el espacio de estados** es justo el camino trazado en el espacio de estados por un sistema cuando t evoluciona. Una **sección de Poincaré** es una órbita en el espacio de estados restringida a tiempos discretos $t_0, t_0+1, t_0+2, \cdots$ (y, cuando $n > 2$, a un subespacio de menores dimensiones). [Secciones 12.7 y 12.8]

La aplicación logística

La **aplicación logística** es una función (o correspondencia) que relaciona un número x_t con intervalos regulares discretos (por ejemplo, la población relativa de cierto insecto una vez al año)

$$x_{t+1} = r x_t (1 - x_t). \qquad \text{[Ec. (12.42)]}$$

Aunque este no es un sistema mecánico, exhibe muchas de las características (bifurcación de período, caos, sensibilidad a las condiciones iniciales) de los sistemas mecánicos no lineales. [Sección 12.9]

Problemas para el Capítulo 12

Los asteriscos indican el nivel aproximado de dificultad, desde los más fáciles (⋆) hasta los más difíciles (⋆ ⋆ ⋆). Advertencia: Incluso cuando el movimiento es no caótico, puede ser muy sensible a errores muy pequeños. En varios problemas de ordenador puede ser necesario aumentar la precisión de los cálculos para obtener resultados satisfactorios.

Sección 12.1 Linealidad y no linealidad

12.1 ⋆ Considerar la ecuación no lineal de primer orden $\dot{x} = 2\sqrt{x-1}$. **(a)** Separando variables, hallar una solución $x_1(t)$. **(b)** La solución obtenida debería contener una constante de integración k, así que se puede esperar razonablemente que sea la solución general. Mostrar, sin embargo, que existe otra solución, $x_2(t) = 1$, que no es de la forma de $x_1(t)$ sea cual sea el valor de k.

(c) Mostrar que aunque $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones, ni $Ax_1(t)$, ni $Bx_2(t)$, ni $x_1(t)+x_2(t)$ son soluciones. (Esto es, el principio de superposición no aplica a esta ecuación).

12.2 ⋆ He aquí un ejemplo diferente de las cosas desagradables que pueden suceder con ecuaciones no lineales. Considerar la ecuación no lineal $\dot{x} = 2\sqrt{x}$. Como es de primer orden, uno esperaría que la especificación de $x(0)$ determinaría una única solución. Mostrar que para esta ecuación existen dos soluciones diferentes, ambas cumpliendo la condición inicial $x(0) = 0$. [*Ayuda*: encontrar una solución $x_1(t)$ separando variables, pero advertir que $x_2(t) = 0$ es otra. Afortunadamente a ninguna de las ecuaciones que se encuentran normalmente en mecánica clásica les afecta esta desagradable ambigüedad].

12.3 ⋆ Considerar una ecuación lineal homogénea de segundo orden de la forma (12.6). **(a)** Escribir una prueba detallada del principio de superposición, que si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones de esta ecuación, entonces también lo es cualquier combinación lineal $a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$, donde a_1 y a_2 son dos constantes cualesquiera. **(b)** Consideremos ahora la ecuación no lineal en la que el tercer término de (12.6) se sustituye por $r(t)\sqrt{x(t)}$. Explicar por qué el principio de superposición no se cumple para esta ecuación.

12.4 ⋆ Considerar una ecuación lineal *no homogénea* de segundo orden de la forma

$$p(t)\ddot{x}(t)+q(t)\dot{x}(t)+r(t)x(t)=f(t). \tag{12.59}$$

Denotar por $x_p(t)$ una solución (una solución «*particular*») de esta ecuación y demostrar que *cualquier* solución $x(t)$ se puede escribir como

$$x(t)=x_p(t)+a_1x_1(t)+a_2x_2(t) \tag{12.60}$$

donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos soluciones independientes de la correspondiente ecuación homogénea (esto es, (12.59) con $f(t)$ suprimida. [*Ayuda:* Escribir las ecuaciones para $x(t)$ y $x_p(t)$ y restarlas]. Este resultado muestra que para hallar *todas* las soluciones de (12.59) sólo tenemos que hallar una solución particular y dos soluciones independientes de la ecuación homogénea correspondiente. **(b)** Explicar claramente por qué el resultado probado en la parte (a) no es, en general, cierto para una ecuación no lineal como

$$p(t)\ddot{x}(t)+q(t)\dot{x}(t)+r(t)\sqrt{x(t)}=f(t).$$

Sección 12.3 Algunas características esperadas del PAF

12.5 ⋆ Usar la relación de Euler y la expresión correspondiente para $\cos\phi$ (en el apéndice) para probar la identidad (12.15).

12.6 ⋆⋆ [Ordenador] **(a)** Utilizar software apropiado para resolver numéricamente la ecuación (12.11), para un PAF con los siguientes parámetros: parámetro de perturbación $\gamma = 0{,}9$, frecuencia de perturbación $\omega = 2\pi$, frecuencia natural $\omega_o = 1{,}5\omega$, constante de amortiguamiento $\beta = \omega_o/4$, y condiciones iniciales $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$. Resolver la ecuación y representar la solución para seis ciclos, $0 \le t \le 6$, y verificar que se obtiene el resultado mostrado en la Figura 12.3. **(b)** y **(c)** Resolver la misma ecuación dos veces más con las dos condiciones iniciales diferentes $\phi(0) = \pm\pi/2$ (ambas con $\dot{\phi}(0) = 0$) y representar las tres soluciones en la misma gráfica. ¿Apoyan estos resultados la afirmación de que, para este parámetro de perturbación, todas las soluciones (sean cuales sean sus condiciones iniciales) tienden al mismo atractor periódico?

Sección 12.4 El PAF: ruta al caos

12.7 ⋆⋆ [Ordenador] Hacer los mismos cálculos que en el Problema 12.6 pero con un coeficiente de perturbación $\gamma = 1{,}06$ y para $0 \le t \le 10$. En la parte (a) verificar que los resultados concuerdan con la Figura 12.4. ¿Sugieren estos resultados que existe todavía un único atractor al cual convergen todas las soluciones (sean cuales sean sus condiciones iniciales? (A primera vista la respuesta puede parecer «no», pero recordar que los valores de ϕ que difieren por 2π deberían considerarse como si fueran los mismos valores).

12.8 ⋆⋆ [Ordenador] Usar un ordenador para hallar una solución numérica de la ecuación del movimiento (12.11) para un PAF con los siguientes parámetros: coeficiente de perturbación $\gamma = 1{,}073$, frecuencia de perturbación $\omega = 2\pi$, frecuencia natural $\omega_0 = 1{,}5\omega$, constante de amortiguamiento $\beta = \omega_0/4$, y condiciones iniciales $\phi(0) = \pi/2$ y $\dot{\phi}(0) = 0$. **(a)** Resolver para $0 \leq t \leq 50$, y después representar los primeros diez ciclos, $0 \leq t \leq 10$. **(b)** Para asegurarse de que los transitorios iniciales se han extinguido, representar los diez ciclos $40 \leq t \leq 50$. ¿Cuál es el período del movimiento a largo plazo (el atractor)?

12.9 ⋆⋆ [Ordenador] Hacer los mismos cálculos que en el Problema 12.8 con todos los mismos parámetros excepto que $\phi(0) = 0$. Representar los primeros 30 ciclos $0 \leq t \leq 30$ y comprobar que se está de acuerdo con la Figura 12.5. Representar los diez ciclos $40 \leq t \leq 50$ y encontrar el período del movimiento a largo plazo.

12.10 ⋆⋆ [Ordenador] Explorar el comportamiento del PAF con los mismos parámetros que en el Problema 12.8, pero con varias condiciones diferentes. Por ejemplo, se puede mantener $\dot{\phi}(0) = 0$ pero probar varios valores diferentes para $\phi(0)$ entre $-\pi$ y π. Se verá que el comportamiento inicial varía bastante de acuerdo con las condiciones iniciales, pero el movimiento a largo plazo es el mismo en todos los casos (siempre que se recuerde que valores de ϕ que difieren por múltiplos de 2π representan la misma posición).

12.11 ⋆⋆ Comprobar lo bien que encajan los valores de los umbrales γ_n dados en la Tabla 12.1 en la relación de Feigenbaum (12.17) como sigue: **(a)** Suponiendo que la relación de Feigenbaum es exactamente cierta, usar para probar que $(\gamma_{n+1} - \gamma_n) = (1/\delta)^{n-1}(\gamma_2 - \gamma_1)$ y, por tanto, que una gráfica de $\ln(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ frente a n debería ser una línea recta con pendiente $-\ln\delta$. **(b)** Hacer esta gráfica para las tres diferencias de la Tabla 12.1. ¿Cómo de bien se ajustan los puntos a la predicción? Ajustar una recta a la gráfica (bien gráficamente o usando un ajuste de mínimos cuadrados) y hallar la pendiente y con ella el número de Feigenbaum δ. [No esperaríamos obtener una concordancia muy buena con el conocido valor (12.18) por dos razones: sólo hay tres puntos para representar y la relación de Feigenbaum (12.17) es sólo aproximada, excepto en el límite de n grande. Bajo estas circunstancias, se verá que la concordancia es reseñable].

12.12 ⋆⋆ He aquí otra manera de observar la relación de Feigenbaum (12.17): **(a)** Suponiendo que (12.17) es exactamente cierta, demostrar que los umbrales γ_n tienden a un límite finito γ_c y entonces demostrar que $\gamma_n = \gamma_c - K/\delta^n$, donde K es una constante. Esto significa que una representación de γ_n frente a δ^{-n} debería ser una línea recta. **(b)** Usando el conocido valor (12.18) de δ y los cuatro valores de γ_n de la Tabla 12.1, hacer esta gráfica. ¿Parece ajustarse con nuestra predicción? La intersección vertical de la gráfica debería ser γ_c. ¿Cuál es el valor y cómo de bien concuerda con (12.20)?

Sección 12.5 Caos y sensibilidad a las condiciones iniciales

12.13 ⋆ Se puede ver en la Figura 12.13 que para $\gamma = 1{,}105$, la separación de dos péndulos idénticos con condiciones iniciales ligeramente diferentes aumenta exponencialmente. Específicamente $\Delta\phi$ comienza en 10^{-4} y para $t = 14{,}5$ ha alcanzado casi 1. Usar esto para estimar el exponente de Liapunov λ tal como está definido en (12.26), $\Delta\phi(t) \sim Ke^{\lambda t}$. La respuesta debería confirmar que $\lambda > 0$ para el movimiento caótico.

12.14 ⋆⋆ [Ordenador] **(a)** Resolver numéricamente la ecuación del movimiento (12.11) para un PAF con coeficiente de perturbación $\gamma = 1{,}084$, y los siguientes parámetros: frecuencia de perturbación $\omega = 2\pi$, frecuencia natural $\omega_0 = 1{,}5\omega$, constante de amortiguamiento $\beta = \omega_0/4$, y condiciones iniciales $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$. Resolver para los primeros siete ciclos de perturbación ($0 \leq t \leq 7$) y llamar a la solución $\phi_1(t)$. Resolver otra vez para todos los mismos parámetros excepto que $\phi(0) = 0{,}00001$ y llamar a esta solución $\phi_2(t)$. Hacer $\Delta\phi(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t)$ y una gráfica de $\log|\Delta\phi(t)|$ frente a t. Con este coeficiente de perturbación el movimiento es caótico. ¿Confirma esto la gráfica? ¿En qué sentido? **(b)** Extender la gráfica a $t = 10$. Explicar por qué el crecimiento exponencial visto en la parte (a) no puede continuar indefinidamente de ninguna manera.

12.15 ⋆⋆ [Ordenador] Resolver numéricamente la ecuación del movimiento (12.11) para un PAF con los siguientes parámetros: coeficiente de perturbación $\gamma = 0{,}3$, frecuencia de perturbación $\omega = 2\pi$, frecuencia natural $\omega_0 = 1{,}5\omega$, constante de amortiguamiento $\beta = \omega_0/4$, y condiciones iniciales $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$. Resolver para los primeros cinco ciclos de perturbación ($0 \leq t \leq 5$) y llamar a la solución $\phi_1(t)$. Resolver otra vez para todos los mismos parámetros excepto que $\phi(0) = 1$ (esto es, al ángulo inicial es un radián) y llamar a esta solución $\phi_2(t)$. Hacer $\Delta\phi(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t)$ y una gráfica de $\log|\Delta\phi(t)|$ frente a t. ¿Confirma la gráfica que $\Delta\phi(t)$ se va a cero exponencialmente? Nota: el decaimiento exponencial continúa indefinidamente, pero $\Delta\phi(t)$ finalmente se hace tan pequeño que es menor que los errores asociados, y el decaimiento exponencial no se puede ver. Si se quiere ir más allá, será necesario truncar la precisión.

12.16 ⋆⋆ Considerar el movimiento caótico de un PAF para el cual el exponente de Liapunov es $\lambda = 1$, con el tiempo medido en unidades del período de perturbación, como siempre. (Este es muy parecido al valor hallado en el Problema 12.13). **(a)** Suponer que se necesita predecir $\phi(t)$ con una precisión de $1/100$ radianes y que se sabe el valor inicial $\phi(0)$ con una precisión de 10^{-6} radianes. ¿Cuál es el tiempo máximo $t_{\text{máx}}$ para el que se puede predecir $\phi(t)$ con la precisión requerida. Esta $t_{\text{máx}}$ se denomina a veces **horizonte de tiempo** para una predicción con una precisión especificada. **(b)** Suponer que, con un gran esfuerzo económico y material, se consigue mejorar la precisión del valor inicial hasta 10^{-9} radianes (una mejora de mil veces). ¿Cuál es el horizonte temporal ahora (para la misma precisión requerida de predicción)? Qué factor ha mejorado $t_{\text{máx}}$? Los resultados ilustran la dificultad de realizar predicciones precisas a largo plazo para el movimiento caótico.

12.17 ⋆⋆ [Ordenador] En la Figura 12.15 se puede ver que para $\gamma = 1{,}503$ el PAF «intenta» ejecutar un movimiento de rodadura continuo cambiando a razón de 2π una vez cada ciclo, pero que hay una oscilación errática superpuesta y que la dirección de la rodadura cambia de una vez para otra. Para otros valores de γ, el movimiento del péndulo realmente sí se aproxima a una rodadura continua y periódica. **(a)** Resolver la ecuación del movimiento (12.11) para un coeficiente de perturbación $\gamma = 1{,}3$ y todos los demás parámetros como en la primera parte del Problema 12.14, para $0 \leq t \leq 8$. Llamar a la solución $\phi_1(t)$ y representar como una función de t. Describir el movimiento. **(b)** Es difícil estar seguro de que el movimiento es periódico basándose en esta gráfica, debido a la rodadura continúa a través de -2π cada ciclo. Como mejor comprobación, representar $\phi_1(t) + 2\pi t$ frente al tiempo. Describir lo que esto muestra. Este tipo de rodadura periódica se describe a veces como **cierre de fases**.

12.18 ⋆⋆ [Ordenador] Como el movimiento de rodadura del Problema 12.17 es periódico (y por lo tanto no caótico) esperaríamos que la diferencia $\Delta\phi(t)$ entre soluciones vecinas (soluciones de la misma ecuación, pero con condiciones iniciales ligeramente diferentes) disminuyera exponencialmente. Para ilustrar esto, hacer la parte (a) del Problema 12.17 y después encontrar la solución del mismo problema excepto que $\phi(0) = 1$. Llamar a esta segunda solución $\phi_2(t)$ y hacer $\Delta\phi(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t)$. Hacer una gráfica de $\log|\Delta\phi(t)|$ frente a t y comentar.

Sección 12.7 Órbitas en el espacio de estados

12.19 ⋆ Considerar un oscilador armónico simple sin amortiguamiento y sin fuerza externa (una masa m al final de un muelle cuya constante recuperadora es k. **(a)** Escribir la solución general $x(t)$ para la posición como una función del tiempo t. Usar esto para esbozar la órbita en el espacio de estados, mostrando el movimiento del punto $[x(t), \dot{x}(t)]$ en el espacio de estados bidimensional con coordenadas $(x, \dot{x})$. Explicar la dirección en la que se traza la órbita cuando avanza el tiempo. **(b)** Escribir la energía total del sistema y usar la conservación de la energía para demostrar que la órbita del espacio de estados es una elipse.

12.20 ⋆ Considerar un oscilador débilmente amortiguado, pero no forzado, como el descrito por la ecuación (5.28). El movimiento general está dado por (5.38). **(a)** Usar esto para esbozar la órbita en el espacio de estados, mostrando el movimiento de $(x, \dot{x})$ para $0 \leq t \leq 10$ con los parámetros $\delta = 0$, $\omega_1 = 2\pi$ y $\beta = 0{,}5$. **(b)** Este sistema tiene un único atractor estacionario. ¿Cuál es? Explicarlo tanto haciendo referencia al dibujo como en términos de la conservación de la energía.

Sección 12.9 La aplicación logística

12.21 ⋆⋆ He aquí una aplicación iterada que se estudia fácilmente con la ayuda de nuestra calculadora: hagamos $x_{t+1} = f(x_t)$ donde $f(x) = \cos(x)$. Si elegimos cualquier valor para x_0, podemos encontrar $x_1, x_2, x_3, \cdots$ simplemente apretando el botón coseno de nuestra calculadora una y otra vez. (Asegurándonos de que la calculadora está en el modo radianes). **(a)** Intentar esto para varias elecciones de x_0, hallando los primeros 30 valores o así de x_t. Describir lo que sucede. **(b)** Se debería haber hallado que al parecer hay un único atractor fijo. ¿Cuál es? Explicarlo examinando (gráficamente, por ejemplo) la ecuación para un punto fijo $f(x^*) = x^*$ y aplicando nuestra prueba para la estabilidad [a saber, que un punto fijo x^* es estable si $|f'(x^*)| < 1$].

12.22 ⋆⋆ Consideremos la aplicación iterada $x_{t+1} = f(x_t)$ donde $f(x) = x^2$. **(a)** Mostrar que tiene exactamente dos puntos fijos de los cuales sólo uno es inestable. ¿Cuáles son? **(b)** Mostrar que x_t tiende al punto fijo estable si y sólo si $-1 < x_0 < 1$. El intervalo $-1 < x_0 < 1$ se denomina **cuenca de atracción** porque todas las secuencias $x_0, x_1, \cdots$ que comienzan en la «cuenca» son atraídas al mismo atractor. **(c)** Mostrar que $x_t \to \infty$ si y sólo si $|x_0| > 1$.(De este modo podríamos decir que la aplicación tiene un segundo punto fijo estable en $x = \infty$ y la cuenca de atracción para este punto fijo es el conjunto $|x_0| > 1$). Para sistemas caóticos, la cuenca de atracción puede ser mucho más complicada que estos ejemplos y suelen ser muchas veces fractales.

12.23 ⋆⋆ [Ordenador] Considerar la **aplicación seno** $x_{t+1} = f(x_t)$ donde $f(x) = r\,\text{sen}(\pi x)$. El comportamiento interesante de esta aplicación es para $0 \le x \le 1$ y $0 \le r \le 1$, así que restringiremos nuestra atención a estos rangos. **(a)** Usando una representación análoga a la Figura 12.35, discutir los puntos fijos de esta aplicación. Mostrar que la aplicación tiene o bien uno o bien dos puntos fijos, dependiendo del valor de r. Mostrar que cuando r es pequeño hay sólo un punto fijo, que es estable. **(b)** ¿En qué valor de r (llamarlo r_0) aparece el segundo punto fijo? Mostrar que r_0 es también el valor de r en el que el primer punto fijo se hace inestable. **(c)** Cuando r aumenta, el segundo punto fijo se hace finalmente inestable. Hallar numéricamente el valor r_1 en el que ocurre esto.

12.24 ⋆⋆ [Ordenador] Considerar la aplicación seno del Problema 12.23. Usando una calculadora programable (o un ordenador) se puede encontrar fácilmente los primeros diez o veinte valores de x_t para cualquier valor inicial elegido x_0. Tomando $x_0 = 0{,}3$, calcular los primeros diez valores de x_t para cada uno de los siguientes valores del parámetro r: **(a)** $r = 0{,}1$, **(b)** $r = 0{,}5$, **(c)** $r = 0{,}78$. En cada caso representar los resultados (x_t frente a t) y describir el atractor a largo plazo. Si se hizo el Problema 12.23, son los resultados coherentes con lo que se ha demostrado aquí?

12.25 ⋆⋆ [Ordenador] La aplicación seno del Problema 12.23 exhibe cascadas de bifurcación de período justo como la aplicación logística. Para ilustrarlo, tomar $x_0 = 0{,}8$ y hallar los primeros veinte valores x_t para cada uno de los siguientes valores del parámetro r: **(a)** $r = 0{,}60$, **(b)** $r = 0{,}79$, **(c)** $r = 0{,}85$ y **(d)** $r = 0{,}865$. Representar los resultados (como cuatro gráficas separadas)y comentar.

12.26 ⋆⋆ La aparición de un ciclo-dos de la aplicación logística en el momento exacto en que el ciclo-uno se hace inestable se sigue directamente del comportamiento de las gráficas de $f(x)$ y $g(x) = f(f(x))$ como se muestra en las Figuras 12.38 y 12.39. El punto crucial es que la función $f(x)$ es un arco simple que se hace continuamente mayor a medida que aumentamos el parámetro de control r desde 0; al mismo tiempo, $f(f(x))$ comienza como un arco simple que es más bajo que $f(x)$, pero genera dos máximos [más altos que $f(x)$] con un mínimo [más bajo que $f(x)$] entre medias. Explicar claramente con palabras por qué este comportamiento de $f(f(x))$ se sigue inevitablemente de aquél de $f(x)$. [*Ayuda:* Como $f(x)$ es simétrica alrededor de $x = 0{,}5$, sólo es necesario considerar su comportamiento cuando x va desde 0 hasta 0,5. La ventaja de este argumento es que aplica a cualquier aplicación similar $f(x)$ (tal como la aplicación seno del Problema 12.23)].

12.27 ⋆⋆ [Ordenador] Los ciclos-dos de la aplicación $f(x)$ corresponden a puntos fijos de la segunda iterada $g(x) = f(f(x))$. Por consiguiente los dos valores mostrados como x_a y x_b en la

Figura 12.37 son raíces de la ecuación $f(f(x)) = x$. En el caso de la aplicación logística esta es una ecuación cuártica, que no es tan difícil de resolver: **(a)** Verificar que para la función logística $f(x)$

$$x - f(f(x)) = rx\left(x - \frac{r-1}{r}\right)\left[r^2x^2 - r(r+1)x + r + 1\right] \tag{12.61}$$

Por tanto la ecuación de punto-fijo $x - f(f(x)) = 0$ tiene cuatro raíces. Las primeras dos son $x = 0$ y $x = (r-1)/r$. Explicarlas y mostrar que las otras dos raíces son

$$x_a, x_b = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}. \tag{12.62}$$

Explicar cómo se sabe que éstos son dos puntos de un ciclo-dos. **(b)** Mostrar que para $r < 3$ estas raíces son complejas y por tanto no existe un ciclo-dos real. **(c)** Para $r \geq 3$ estas dos raíces son reales y sí existe un ciclo-dos. Encontrar los valores de x_a y x_b para el caso $r = 3{,}2$ y verificar los valores mostrados en la Figura 12.37.

12.28 ⋆⋆ [Ordenador] La ecuación (12.62) en el Problema 12.27 proporciona los dos puntos fijos del ciclo-dos de la aplicación logística. Sólo se puede observar este ciclo-dos si es estable, lo cual sucederá si $|g'(x)| < 1$, donde $g(x)$ es la aplicación doble $g(x) = f(f(x))$ y x es cualquiera de los valores x_a o x_b. **(a)** Combinar (12.62) con la ecuación (12.57) para hallar $g'(x_a)$. [Advertir que como (12.57) es simétrica en x_a y x_b, se obtendrá el mismo resultado ya se use x_a o x_b; esto es, los dos puntos se hacen necesariamente estables o inestables al mismo tiempo). **(b)** Mostrar que el ciclo-dos es estable para $3 < r < 1 + \sqrt{6}$. Esto establece que el umbral al cual período 2 es sustituido por período 4 es $r_2 = 1 + \sqrt{6} = 3{,}449$.

12.29 ⋆⋆ [Ordenador] Los umbrales r_n para la bifurcación de período de la aplicación logística están dadas por la ecuación (12.58). Éstos deben cumplir la relación de Feigenbaum (12.17), al menos en el límite en que $n \to \infty$ (con γ reemplazado por r, por supuesto). Comprobar esta afirmación como sigue: **(a)** Si no se ha hecho el Problema 12.11, probar que la relación de Feigenbaum (si se toma exactamente cierta) implica que $(r_{n+1} - r_n) = K/\delta^n$. Hacer una gráfica de $\ln(r_{n+1} - r_n)$ frente a n. Hallar la línea recta que mejor se ajuste a los datos y de su pendiente predecir la constante de Feigenbaum. ¿Cómo se compara la respuesta con el valor aceptado $\delta = 4{,}67$?

12.30 ⋆⋆ [Ordenador] La evolución caótica de la aplicación logística muestra la misma sensibilidad a las condiciones iniciales que vimos en el PAF. Para ilustrarlo, hacer lo siguiente: **(a)** Usando un ritmo de crecimiento $r = 2{,}6$, calcular x_t para $1 \leq t \leq 40$ comenzando desde $x_0 = 0{,}4$. Repetir pero con la condición inicial $x_0' = 0{,}5$ (la prima es sólo para distinguir esta segunda solución de la primera; no significa diferenciación) y después represéntese $\log|x_t' - x_t|$ frente a t. Describir el comportamiento de la diferencia $x_t' - x_t$. **(b)** Repetir la parte (a) pero con $r = 3{,}3$. En este caso, la evolución a largo plazo tiene período 2. Describir de nuevo el comportamiento de la diferencia $x_t' - x_t$. **(c)** Repetir las partes (a) y (b), pero con $r = 3{,}6$. En este caso, la evolución es caótica, y esperamos que la diferencia *crezca* exponencialmente; por lo tanto, es más interesante tomar los dos valores iniciales mucho más cercanos. Para concretar, tomar $x_0 = 0{,}4$ y $x_0' = 0{,}400001$. ¿Cómo se comporta la diferencia?

12.31 ⋆⋆ [Ordenador] Cuando la evolución de la aplicación logística es no caótica, dos soluciones con el mismo r que comiencen suficientemente cerca convergerán exponencialmente. (Esto fue ilustrado en el Problema 12.30). Esto no quiere decir que *cualesquiera* dos soluciones con el mismo r lo harán. **(a)** Repetir el Problema 12.30(a), con todos los mismos parámetros excepto que $r = 3{,}5$ (un valor para el cual sabemos que el movimiento a largo plazo tiene período 4). ¿Tiende $x_t' - x_t$ a cero? **(b)** Hacer ahora el mismo ejercicio pero con las condiciones iniciales $x_0 = 0{,}45$ y $x_0' = 0{,}5$. Comentar. ¿Se puede explicar por qué, si el período es mayor que 1, es imposible que la diferencia $x_t' - x_t$ se vaya a cero para todas las elecciones de condiciones iniciales?

12.32 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Hacer un diagrama de bifurcación para la aplicación logística, en el estilo de la Figura 12.41 pero para el rango $0 \leq r \leq 3{,}55$. Tomar $x_0 = 0{,}1$. Comentar sus características

principales. [*Ayuda:* Comenzar usando un número muy pequeño de puntos, quizá sólo r yendo desde 0 hasta 3,5 en pasos de 0,5 y t yendo desde 51 hasta 54. Esto nos permitirá calcular para cada uno de los valores de r individualmente, y darnos cuenta de cómo funcionan las cosas. Para hacer un buen diagrama, se necesitará entonces aumentar el número de puntos (r yendo desde 0 hasta 3,55 en pasos de 0,025, y t desde 51 hasta 60, quizá), y se necesitará ciertamente automatizar el cálculo del gran número de puntos].

12.33 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Reproducir el diagrama de la bifurcación logística de la Figura 12.41 para el rango $2{,}8 \leq r \leq 4$. Tomar $x_0 = 0{,}1$. [*Ayuda:* Para hacer la Figura 12.41 he usado unos 50 000 puntos, pero ciertamente no se necesitan tantos. En cualquier caso, comenzar usando un número pequeño de puntos, quizá simplemente r yendo desde 2,8 hasta 3,4 en pasos de 0,2 y t yendo desde 51 hasta 54. Esto nos permitirá calcular para cada uno de los valores de r individualmente, y darnos cuenta de cómo funcionan las cosas. Para hacer un buen diagrama, se necesitará aumentar el número de puntos (r yendo desde 2,8 hasta 4 en pasos de 0,025, y t desde 500 hasta 600, quizá), y ciertamente se necesitará automatizar el cálculo del gran número de puntos].

12.34 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Hacer un diagrama de bifurcación para la aplicación seno de los Problemas 12.23 y 12.25. Éste se parecerá a la Figura 12.41 pero para el rango $0{,}6 \leq r \leq 1$. Tomar $x_0 = 0{,}1$. Comentar sus principales características. [*Ayuda:* Comenzar usando un número muy pequeño de puntos, quizá sólo r yendo desde 0,6 hasta 0,8 en pasos de 0,05 y t yendo desde 51 hasta 54. Esto nos permitirá calcular para cada uno de los valores de r individualmente, y darnos cuenta de cómo funcionan las cosas. Para hacer un buen diagrama, se necesitará aumentar el número de puntos (r yendo desde 0,6 hasta 1 en pasos de 0,005, y t desde 400 hasta 500, quizá), y se necesitará ciertamente automatizar el cálculo del gran número de puntos].

CAPÍTULO 13

Mecánica hamiltoniana

En los primeros seis capítulos de este libro, hemos trabajado enteramente con la forma newtoniana de la mecánica, que describe el mundo en términos de fuerzas y aceleraciones (tal y como se establece en la segunda ley) y es especialmente apropiada para ser aplicada en sistemas de coordenadas cartesianas. En el Capítulo 7, nos encontramos con la formulación lagrangiana. Esta segunda formulación es totalmente equivalente a la de Newton, en el sentido de que ambas pueden deducirse la una de la otra, pero la formulación lagrangiana se considera más flexible en lo que respecta a la elección de coordenadas. Las n coordenadas cartesianas que describen un sistema en términos newtonianos son reemplazadas por n coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \ldots, q_n$, y las ecuaciones de Lagrange son igualmente válidas para casi cualquier elección de $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Como ya hemos comprobado en muchas ocasiones, esta versatilidad nos permite resolver muchos problemas de una manera mucho más sencilla usando la formulación lagrangiana. Este enfoque también cuenta con la ventaja de eliminar las fuerzas de ligadura. Por otro lado, el método lagrangiano está en desventaja cuando se aplica a sistemas disipativos (como por ejemplo los sistemas con rozamiento). Llegados a este punto, espero que el lector se sienta cómodo con ambas formulaciones y que esté ya familiarizado con las ventajas y desventajas de ambos métodos.

Newton expuso su mecánica newtoniana por primera vez en su *Principia Mathematica*, publicado en 1687; Lagrange publicó su formulación en su libro *Méchanique Analytique* en 1788. A principios del siglo XIX, varios físicos, incluido Lagrange, desarrollaron una tercera formulación de la mecánica, completada en 1834 por el matemático irlandés William Hamilton (1805-1865) y que ha terminado por denominarse mecánica hamiltoniana. Es esta tercera formulación la que nos ocupa en este capítulo.

Al igual que la versión lagrangiana, la mecánica hamiltoniana es equivalente a la newtoniana, aunque mucho más flexible en su elección de coordenadas. De hecho, en este sentido es incluso más flexible que el enfoque lagrangiano. De la misma manera en que el formalismo lagrangiano se centra en la función lagrangiana $\mathcal{L}$, el método hamiltoniano se basa en la función hamiltoniana $\mathcal{H}$ (o hamiltoniano que vimos brevemente en el Capítulo 7). En la mayoría de los sistemas que veremos, $\mathcal{H}$ es justo la energía total. Por lo tanto una de las ventajas del formalismo hamiltoniano es que está basado en una función, $\mathcal{H}$, que (a diferencia de la lagrangiana $\mathcal{L}$) tiene una evidente importancia física y a menudo se conserva. La formulación hamiltoniana también es muy apropiada para el manejo de otras cantidades que se conservan y la implementación de diferentes planos de aproximación. Se ha generalizado a distintas ramas de la física y, en particular, la mecánica hamiltoniana nos lleva de la mecánica clásica a la mecánica cuántica de una manera muy natural. Por todas estas razones la formulación hamiltoniana juega un papel muy importante en muchas ramas de la física moderna, como la astrofísica, la física del plasma y el diseño de aceleradores de partículas. Lamentablemente, el nivel de este libro hace que sea difícil demostrar muchas de las ventajas de la versión hamiltoniana respecto de la lagrangiana, y en este capítulo tendré que pedir al lector que se conforme con aprender la primera simplemente como alternativa a la segunda, cuyas ventajas mencionaré pero no exploraré en profundidad. Si el lector sigue avanzando en mecánica clásica o si decide estudiar mecánica cuántica, desde luego se encontrará otra vez con muchas de las ideas expuestas en este capítulo.

13.1 Variables básicas

Como la versión hamiltoniana de la mecánica se aproxima más a la lagrangiana que a la newtoniana y además surge de manera natural de la primera, empezaremos por repasar las principales características de ésta, que se centra en la función lagrangiana $\mathcal{L}$ (o lagrangiano). En la mayoría de los sistemas de interés, $\mathcal{L}$ es simplemente la diferencia entre la energía cinética y la potencial $\mathcal{L} = T - U$, y en este capítulo centraremos nuestra atención en los sistemas en los que éste es el caso. La lagrangiana $\mathcal{L}$ es una función de las n coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$, de sus n derivadas del tiempo (o velocidades generalizadas) $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, y, quizá del tiempo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = T - U. \tag{13.1}$$

Las n coordenadas $(q_1, \ldots, q_n)$ especifican una posición o «configuración» del sistema y puede decirse que definen un punto en un **espacio de configuración** n-dimensional. Las $2n$ coordenadas $(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ definen un punto en el **espacio de estados**, y especifican un grupo de condiciones iniciales (para cualquier

tiempo t_0) que determinan una solución única para n ecuaciones diferenciales de movimiento de segundo orden, las ecuaciones de Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad [i = 1, \ldots, n]. \tag{13.2}$$

Para cada grupo de condiciones iniciales, estas ecuaciones del movimiento determinan un camino u «órbita» única a través del espacio de estados.

También hay que recordar que definimos un **momento generalizado** dado por

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \tag{13.3}$$

Si las coordenadas $(q_1, \ldots, q_n)$ son de hecho coordenadas cartesianas, los momentos generalizados p_i son las componentes correspondientes de los momentos habituales; en general p_i no es en realidad un momento, pero sí juega un papel análogo, como ya hemos visto. El momento generalizado p_i también se llama **momento canónico** o **momento conjugado** q_i.

En la formulación hamiltoniana, el papel principal de la lagrangiana $\mathcal{L}$ lo asume la **función hamiltoniana**, o simplemente **hamiltoniano**, $\mathcal{H}$ definida como

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}. \tag{13.4}$$

Las ecuaciones de movimiento, que deduciremos en las siguientes dos secciones, implican derivadas de $\mathcal{H}$ más que de $\mathcal{L}$ como en las ecuaciones de Lagrange. Vimos brevemente la función hamiltoniana en la Sección 7.8, donde demostramos que, siempre que las coordenadas generalizadas $(q_1, \ldots, q_n)$ sean «naturales» (esto es, la relación entre las q's y las coordenadas cartesianas subyacentes es independiente del tiempo), $\mathcal{H}$ es simplemente la energía total del sistema, por lo que resulta familiar y fácil de visualizar.

Existe una segunda diferencia importante entre los formalismos lagrangiano y hamiltoniano. En el primero definimos el estado del sistema mediante las $2n$ coordenadas

$$(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n), \qquad \text{[Lagrange]} \tag{13.5}$$

mientras que en el segundo usaremos las coordenadas

$$(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n), \qquad \text{[Hamilton]} \tag{13.6}$$

que consisten en las n posiciones generalizadas y los n *momentos* generalizados (en lugar de velocidades generalizadas). Esta selección de coordenadas tiene varias ventajas, algunas de las cuales esbozaré, pero otras habrá que darlas por sentado.

Al igual que podemos considerar que las $2n$ coordenadas (13.5) de la formulación lagrangiana definen un punto en un espacio de estados $2n$-dimensional, también podemos considerar que las $2n$ coordenadas (13.6) del enfoque hamiltoniano definen un punto en un espacio $2n$-dimensional, que normalmente se llama **espacio de fases.**[1] Igual que las ecuaciones de Lagrange del movimiento (13.2) determinan un único camino en el espacio de estados comenzando en cualquier punto inicial (13.5), sucede que (como veremos) las ecuaciones de Hamilton determinan un único camino en el espacio de fases comenzando en cualquier punto inicial (13.6). Una manera sucinta de enunciar algunas de las ventajas del formalismo hamiltoniano es que el espacio de fases tiene ciertas propiedades geométricas que lo hacen más conveniente que el espacio de estados.

Al igual que la formulación de Lagrange, la de Hamilton funciona mejor con sistemas que no están sometidos a fuerzas de rozamiento. De acuerdo con esto, supondré en este capítulo que todas las fuerzas de interés son conservativas o pueden al menos derivarse de una función de energía potencial. Aunque esta restricción excluye muchos sistemas mecánicos interesantes, incluye todavía un número muy grande de sistemas importantes, especialmente en astrofísica y a nivel microscópico (atómico y molecular).

13.2 Ecuaciones de Hamilton para sistemas unidimensionales

Para minimizar las complicaciones en las notaciones, primero obtendré las ecuaciones del movimiento de Hamilton para un sistema unidimensional, conservativo, con una única coordenada «natural» generalizada q. Por ejemplo, se podría pensar en un sencillo péndulo plano, en cuyo caso q podría ser el ángulo habitual ϕ, o una cuenta de collar ensartada en un alambre estacionario, en cuyo caso q podría ser la distancia horizontal x a lo largo del alambre. Para cualquier sistema como estos, la lagrangiana es una función de q y $\dot{q}$, esto es,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q). \tag{13.7}$$

Recuerde que, en general, la energía cinética puede depender de q además de $\dot{q}$, mientras que para sistemas conservativos, la energía potencial sólo depende de q.

[1] Muchos autores utilizan los nombres «espacio de estados» y «espacio de fases» indistintamente, pero es conveniente tener espacios diferentes, y reservaré «espacio de estados» para el espacio de posiciones y velocidades generalizadas, y «espacio de fases» para el de posiciones y momentos generalizados.

Por ejemplo, para el péndulo simple (masa m y longitud L),

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) = \tfrac{1}{2}mL^2\dot{\phi}^2 - mgL(1-\cos\phi), \tag{13.8}$$

en cuyo caso, la energía cinética únicamente incluye a $\dot{\phi}$, y no a ϕ. Para una cuenta que se desliza por un alambre sin rozamiento, de altura variable $y = f(x)$, vimos en el Ejemplo 11.1 (página 481) que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \dot{x}) = T - U = \tfrac{1}{2}m[1 + f'(x)^2]\dot{x}^2 - mgf(x). \tag{13.9}$$

En este caso la dependencia de x de la energía cinética surgió cuando escribimos v en $\frac{1}{2}mv^2$ en términos de la distancia horizontal x. Los dos ejemplos (13.8) y (13.9) ilustran un resultado general que ya demostramos en la Sección 7.8 en el que el lagrangiano para un sistema conservativo con coordenadas «naturales» (y en este caso en una dimensión) tiene la forma general

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}) = T - U = \tfrac{1}{2}A(q)\dot{q}^2 - U(q). \tag{13.10}$$

Observe que mientras la energía cinética puede depender de q de una forma complicada, a través de la función $A(q)$, su dependencia de $\dot{q}$ es sólo a través del factor cuadrático sencillo $\dot{q}^2$. Como puede comprobarse escribiéndolo, la ecuación de Lagrange para este lagrangiano se convierte automáticamente en una ecuación diferencial de segundo orden para q.

El hamiltoniano se define por (13.4), que en una dimensión se reduce a

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L}. \tag{13.11}$$

En la discusión de la Sección 7.8 ofrecí un motivo por el cual una función definida de esta manera sería una función interesante para estudiar. Por ahora nos conformaremos con aceptar la definición como una inspirada sugerencia de Hamilton, una sugerencia cuyo mérito se verá a medida que avanzamos.[2] Dada la forma (13.10) de $\mathcal{L}$, podemos calcular el momento generalizado p como

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = A(q)\dot{q} \tag{13.12}$$

de manera que $p\dot{q} = A(q)\dot{q}^2 = 2T$. Sustituyendo por (13.11), encontramos que

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} = 2T - (T - U) = T + U.$$

---

[2] En realidad, el cambio de $\mathcal{L}$ a $\mathcal{H}$ como objeto de interés principal es un ejemplo de una maniobra matemática denominada *transformación de Legendre*, que juega un papel importante en varios campos, siendo el más destacable el de la termodinámica. Por ejemplo, el cambio de la energía interna termodinámica U a entalpía H es una transformación de Legendre, muy parecida al cambio de Hamilton de $\mathcal{L}$ a $\mathcal{H}$.

Esto es, el hamiltoniano $\mathcal{H}$ para el sistema «natural» aquí considerado es precisamente la energía total, el mismo resultado que demostramos para cualquier sistema «natural» en cualquier número de dimensiones, en la Sección 7.8.

El siguiente paso para establecer el formalismo hamiltoniano es quizá el más sutil. En la propuesta lagrangiana, pensamos en $\mathcal{L}$ como una función de q y $\dot{q}$, tal y como se indica de manera explícita en (13.10). De manera similar, (13.12) nos da el momento generalizado p en términos de q y $\dot{q}$. Sin embargo, podemos resolver (13.12) para $\dot{q}$ en términos de q y p:

$$\dot{q} = p/A(q) = \dot{q}(q,p), \tag{13.13}$$

por ejemplo. Ahora, con $\dot{q}$ expresado como una función de q y p, veamos el hamiltoniano. Siempre que $\dot{q}$ aparezca en $\mathcal{H}$, podemos reemplazarlo por $\dot{q}(q,p)$, y $\mathcal{H}$ se convierte en una función de q y p. Con todo detalle, (13.11) se convierte en

$$\mathcal{H}(q,p) = p\,\dot{q}(q,p)\mathcal{L}(q,\dot{q}(q,p)). \tag{13.14}$$

El último paso es conseguir las ecuaciones del movimiento de Hamilton. Para encontrarlas, simplemente tenemos que evaluar las derivadas de $\mathcal{H}(q,p)$ con respecto a q y p. En primer lugar, usando la regla de la cadena, derivamos (13.14) con respecto a q:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = p\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right].$$

Ahora, en el tercer término del segundo miembro, puede verse que $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q} = p$. Entonces, los términos primero y tercero de ese miembro se cancelan entre ellos, dejando solo

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = -\frac{d}{dt}p = -\dot{p} \tag{13.15}$$

donde la segunda igualdad se deduce de la ecuación de Lagrange(13.2). Esta ecuación nos da la derivada temporal de p (esto es, $\dot{p}$) en términos del hamiltoniano $\mathcal{H}$ y es la primera de las dos ecuaciones del movimiento hamiltonianas. Pero antes de empezar a hablar de ella, vamos a obtener la segunda.

Derivando (13.14) con respecto a p y usando la regla de la cadena, encontramos que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \left[\dot{q} + p\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q} \tag{13.16}$$

ya que los términos segundo y tercero de la expresión de en medio se cancelan entre ellos. Esta es la segunda ecuación de movimiento hamiltoniana y da $\dot{q}$ en términos del hamiltoniano $\mathcal{H}$. Juntando ambas (y ordenándolas un poco), obtenemos las **ecuaciones de Hamilton** para un sistema unidimensional:

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \quad \text{y} \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}. \tag{13.17}$$

En el formalismo lagrangiano, la ecuación de movimiento de un sistema unidimensional es una ecuación diferencial *sencilla de segundo orden* para q. En la formulación hamiltoniana, existen dos ecuaciones *de primer orden*, una para q y otra para p. Antes de ampliar este resultado a sistemas más generales o de discutir acerca de las ventajas de esta nueva formulación, vamos a ver un par de ejemplos sencillos.

Ejemplo 13.1 *Una cuenta ensartada en un alambre rectilíneo*

Consideremos una cuenta de collar que se desliza por un alambre rectilíneo y sin rozamiento, a lo largo del eje x, como se muestra en la Figura 13.1. La cuenta tiene masa m y está sometida a una fuerza conservativa, con su correspondiente energía potencial $U(x)$. Escribir el lagrangiano y la ecuación de movimiento de Lagrange. Encontrar el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton y comparar ambas formulaciones.

Naturalmente, tomamos como coordenada generalizada q la cartesiana x. Entonces el lagrangiano es

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = T - U = \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 - U(x).$$

La ecuación de Lagrange correspondiente es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \quad \text{o} \quad -\frac{dU}{dx} = m\ddot{x} \tag{13.18}$$

que es la $F = ma$ de Newton, tal y como cabría esperar. Para establecer la formulación hamiltoniana, primero debemos encontrar el momento generalizado,

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}.$$

Tal y como esperábamos, esto es simplemente el momento convencional mv. Esta ecuación puede resolverse para dar $\dot{x} = p/m$, que puede entonces sustituirse por el hamiltoniano para obtener

$$\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{m} - \left[\frac{p^2}{2m} - U(x)\right] = \frac{p^2}{2m} + U(x)$$

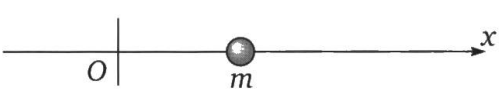


Figura 13.1. Una cuenta de masa m que se desliza por un alambre rectilíneo y sin rozamiento.

que se reconocerá como la energía total, con el término cinético $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ reescrito en relación al momento como $p^2/(2m)$. Finalmente, las dos ecuaciones de Hamilton (13.17) son

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \qquad \text{y} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{dU}{dx}.$$

Desde el punto de vista newtoniano, la primera de éstas es justo la definición tradicional del momento, y cuando sustituimos esta definición por la segunda ecuación, de nuevo nos da $m\ddot{x} = -dU/dx$. Como tenía que ser, Newton, Lagrange y Hamilton, todos nos llevan hasta la misma conocida ecuación. En este ejemplo sencillo, ni Lagrange ni Hamilton disponen de más ventajas que Newton.

Ejemplo 13.2 *Máquina de Atwood*

Establecer la formulación hamiltoniana para la máquina de Atwood que se muestra primero en la Figura 4.15 y de nuevo aquí en la Figura 13.2. Utilizar la altura x de m_1 medida hacia abajo como coordenada generalizada.

El lagrangiano es $\mathcal{L} = T - U$, donde, como vimos en el Ejemplo 7.3 (página 282),

$$T = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 \qquad \text{y} \qquad U = -(m_1 - m_2)gx. \tag{13.19}$$

Podemos calcular el hamiltoniano $\mathcal{H}$ bien como $\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L}$ o bien, lo cual es normalmente un poco más rápido (siempre que sea cierto[3]), como $\mathcal{H} = T + U$. De cual-

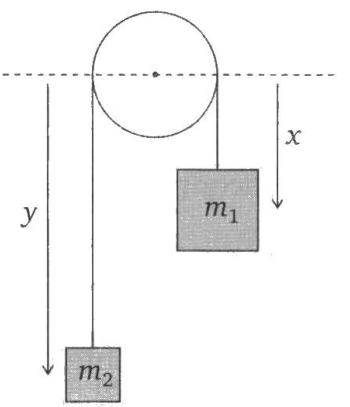


Figura 13.2. Una máquina de Atwood compuesta por dos masas, m_1 y m_2, suspendidas de una cuerda sin masa e inextensible que pasa por una polea sin masa ni rozamiento. Como la longitud de la cuerda es fija, la posición de todo el sistema la determina la distancia x de m_1 por debajo de cualquier nivel fijo conveniente.

[3] Recuerde que esta segunda expresión es cierta siempre que la coordenada generalizada sea «natural», esto es, la relación entre la coordenada generalizada y las coordenadas cartesianas subyacentes es independiente del tiempo; una condición que generalmente se cumple aquí (Problema 13.4).

quiera de las dos maneras, debemos encontrar primero el momento generalizado $p = \partial \mathcal{L}/\partial \dot{x}$ o, como U no incluye a $\dot{x}$,

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x}.$$

Resolvemos esto para obtener $\dot{x}$ en términos de p como $\dot{x} = p/(m_1 + m_2)$, que sustituimos en $\mathcal{H}$ para obtener $\mathcal{H}$ como una función de x y p:

$$\mathcal{H} = T + U = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} - (m_1 - m_2)gx. \tag{13.20}$$

Podemos ahora escribir las dos ecuaciones del movimiento de Hamilton (13.17) como

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m_1 + m_2} \qquad \text{y} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = (m_1 - m_2)g.$$

De nuevo, la primera de ellas es simplemente otra forma de enunciar la definición de momento generalizado y, cuando combinamos ésta con la segunda, obtenemos el resultado bien conocido para la aceleración de la máquina de Atwood,

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Estos dos ejemplos ilustran varias de las características generales de la formulación hamiltoniana: nuestra primera tarea es siempre escribir el hamiltoniano $\mathcal{H}$ (al igual que en la formulación lagrangiana la primera tarea es escribir $\mathcal{L}$). En el enfoque hamiltoniano hay normalmente un par de pasos extra, que son escribir el momento generalizado, para resolver la ecuación resultante para la velocidad generalizada, y expresar $\mathcal{H}$ como una función de la posición y del momento. Una vez hecho esto, uno puede simplemente darle vueltas a la manivela y obtener las ecuaciones de Hamilton. En general, no hay ninguna garantía de que las ecuaciones resultantes serán fáciles de resolver, pero es una propiedad maravillosa de la formulación de Hamilton (como la de Lagrange) que proporciona una manera casi infalible de encontrar las ecuaciones de movimiento.

13.3 Ecuaciones de Hamilton en varias dimensiones

Nuestra deducción de las ecuaciones de Hamilton para un sistema unidimensional se extiende fácilmente a sistemas multidimensionales. El único problema real es que las ecuaciones se pueden abarrotar incómodamente con índices, así que, para minimizar este problema, usaré la abreviación introducida en la Sección 11.5: la

configuración de una sistema n-dimensional está dada por n coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$, que representaré con una única **q** negrita:

$$\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n).$$

Análogamente, las velocidades generalizadas pasan a ser $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n)$, y los momentos generalizados son

$$\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n).$$

Es importante recordar que por ahora una **q** o **p** negrita no es necesariamente un vector tridimensional. Más bien **q** y **p** son vectores n-dimensionales en el espacio de posiciones generalizadas o momentos generalizados.

Las ecuaciones de Hamilton se siguen directamente de las ecuaciones de Lagrange en su forma estándar. Por consiguiente, para probar las primeras sólo tenemos que suponer que las últimas son ciertas. Sin embargo, para concretar, haré las mismas suposiciones que utilizamos en el Capítulo 7: supondré que cualesquiera ligaduras son holónomas; esto es, el número de grados de libertad es igual al número de coordenadas generalizadas. También supondré que las fuerzas que no son de ligadura se pueden obtener de una función de energía potencial, aunque no es esencial que sean conservativas (esto es, la energía potencial puede depender de t). Las ecuaciones que relacionan las N coordenadas cartesianas subyacentes $\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N$ con las n coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$ *pueden* depender del tiempo; es decir, no es esencial que las coordenadas generalizadas sean «naturales». Estas suposiciones son suficientes para garantizar que el formalismo lagrangiano estándar es aplicable, y nos permitirán deducir de él el formalismo hamiltoniano. De este modo, nuestro punto de partida es que existe un lagrangiano

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T - U$$

y que la evolución de nuestro sistema está gobernada por las n ecuaciones de Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad [i = 1, \ldots, n]. \tag{13.21}$$

Definimos la función Hamiltoninana como en (13.4),

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}, \tag{13.22}$$

donde los momentos generalizados están definidos por

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} \qquad [i = 1, \ldots, n] \tag{13.23}$$

como en (13.3). Justo como en el caso unidimensional, nuestro siguiente paso es expresar el hamiltoniano como una función de las $2n$ variables $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$. Para llevar esto a cabo, advierta que podemos entender las ecuaciones (13.23) como n ecuaciones simultáneas para las n velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}}$. Podemos en principio resolver estas ecuaciones para obtener las velocidades generalizadas en términos de las variables $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, y t:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) \qquad [i = 1, \ldots, n]$$

o, más sutilmente

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t).$$

Podemos eliminar ahora las velocidades de nuestra definición del hamiltoniano para obtener (otra vez con todo detalle)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t). \tag{13.24}$$

A partir de ahora la deducción de las ecuaciones de Hamilton se realiza de forma análoga a como se hace en una dimensión. Dejaré al lector completar los detalles (Problema 13.15). Siguiendo los mismos pasos que condujeron de (13.14) hasta (13.17), diferenciamos $\mathcal{H}$ con respecto a q_i y después p_i, y esto nos lleva a las **ecuaciones de Hamilton**:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \qquad \text{y} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \qquad [i = 1, \cdots, n]. \tag{13.25}$$

Observe que para un sistema con n grados de libertad, el método hamiltoniano nos da $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden en vez de las n ecuaciones de segundo orden de Lagrange.

Antes de discutir un ejemplo de las ecuaciones de Hamilton, hay otra derivada más de $\mathcal{H}$ a considerar, su derivada con respecto al tiempo. Ésta es realmente más sutil. La función $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ podría variar con el tiempo por dos razones: primero, a medida que el movimiento tiene lugar, las $2n$ coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ varían, y esto podría causar que $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ cambiase; además, $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ puede tener una dependencia explícita del tiempo, tal como indica el argumento final t, y esto también puede hacer que $\mathcal{H}$ varíe con el tiempo. Matemáticamente, esto significa que $d\mathcal{H}/dt$ contiene $2n + 1$ términos, como sigue:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \tag{13.26}$$

Es importante entender la diferencia entre las dos derivadas de $\mathcal{H}$ en esta ecuación. La derivada de la izquierda, $d\mathcal{H}/dt$ (a veces denominada derivada total), es la tasa real de variación de $\mathcal{H}$ a medida que el movimiento tiene lugar, con todas las coordenadas $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ cambiando cuando t avanza. La de la derecha, $\partial\mathcal{H}/\partial t$, es la derivada parcial, que es la tasa de variación de $\mathcal{H}$ si variamos su último argumento t manteniendo todos los demás argumentos fijos. En particular, si $\mathcal{H}$ no depende explícitamente de t, su derivada parcial será cero. Ahora es fácil ver que, por las ecuaciones de Hamilton (13.25), cada par de términos en la suma de (13.26) es exactamente cero, así que tenemos el resultado sencillo

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}.$$

Es decir, $\mathcal{H}$ varía con el tiempo sólo hasta el punto que es explícitamente dependiente del tiempo. En particular, si $\mathcal{H}$ no depende explícitamente de t (como suele ser el caso), entonces $\mathcal{H}$ es una constante en el tiempo; esto es, la cantidad $\mathcal{H}$ se conserva. Este es el mismo resultado que dedujimos en la Sección 7.8.[4]

En la Sección 7.8 probamos un segundo resultado que tiene que ver con la dependencia temporal: si la relación de las coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$ con las coordenadas rectangulares subyacentes es independiente de t (es decir, nuestras coordenadas generalizadas son «naturales»), entonces el hamiltoniano $\mathcal{H}$ es justo la energía total, $\mathcal{H} = T + U$. En el resto de este capítulo, consideraré sólo el caso en que las coordenadas generalizadas *son* «naturales» *y también* que $\mathcal{H}$ *no* es explícitamente dependiente del tiempo. Por consiguiente, de ahora en adelante será cierto que $\mathcal{H}$ es la energía total y que la energía total se conserva.

Veamos ahora un ejemplo del formalismo hamiltoniano para un sistema en dos dimensiones espaciales. Desafortunadamente, como en todos los ejemplos razonablemente sencillos, la formulación hamiltoniana no presenta ninguna ventaja significativa respecto de la lagrangiana; más bien, en este ejemplo, el enfoque hamiltoniano es sólo una ruta alternativa a la misma ecuación final de movimiento.

Ejemplo 13.3 *Ecuaciones de Hamilton para una partícula en un campo de fuerza central*

Establecer las ecuaciones de Hamilton para una partícula de masa m sometida a un campo de fuerza central conservativo con energía potencial $U(r)$, usando como coordenadas generalizadas las coordenadas polares usuales r y ϕ.

[4] Demostramos allí, en las ecuaciones (7.89) y (7.90), que $\mathcal{H}$ se conserva si y sólo si $\mathcal{L}$ no depende explícitamente del tiempo. Estas dos condiciones ($\mathcal{H}$ no dependiente explícitamente del tiempo o bien $\mathcal{L}$) son equivalentes, como se puede fácilmente comprobar, $\partial\mathcal{H}/\partial t = -\partial\mathcal{L}/\partial t$. Vea el Problema 13.16.

Por conservación del momento angular, sabemos que el movimiento está confinado a un plano fijo, en el cual podemos definir las coordenadas polares r y ϕ. La energía cinética está dada en términos de estas coordenadas generalizadas por la expresión familiar

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2). \tag{13.27}$$

Como las ecuaciones que relacionan (r, ϕ) con (x, y) son dependientes del tiempo, sabemos que $\mathcal{H} = T + U$, que debemos expresar en términos de r y ϕ y de los momentos generalizados correspondientes p_r y p_ϕ. Estos últimos están definidos por la relación[5] $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i = \partial T/\partial\dot{q}_i$, que da

$$p_r = \partial T/\partial\dot{r} = m\dot{r} \qquad \text{y} \qquad p_\phi = \partial T/\partial\dot{\phi} = mr^2\dot{\phi}. \tag{13.28}$$

El momento p_r conjugado de r es justo la componente radial del momento ordinario $m\mathbf{v}$, pero, como vimos primero en la Sección 7.1 [Ecuación (7.26)], el momento p_ϕ conjugado de ϕ es el momento *angular*. Debemos resolver entonces las dos ecuaciones (13.28) para obtener las velocidades $\dot{r}$ y $\dot{\phi}$ en términos de los momentos p_r y p_ϕ:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \qquad \text{y} \qquad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}.$$

Podemos ahora sustituirlas en (13.27) y llegamos al hamiltoniano, expresado como una función de las variables convenientes,

$$\mathcal{H} = T + U = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right) + U(r). \tag{13.29}$$

Podemos ahora escribir las cuatro ecuaciones de Hamilton (13.25). Las dos ecuaciones radiales son

$$\dot{r} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \qquad \text{y} \qquad \dot{p_r} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{dU}{dr}. \tag{13.30}$$

La primera de ellas reproduce la definición del momento radial. Si sustituimos la primera en la segunda, obtenemos el resultado familiar de que $m\ddot{r}$ es la suma de la fuerza radial real $(-dU/dr)$ más la fuerza centrífuga p_ϕ^2/mr^3. [Vea las Ecuaciones (8.24) y (8.26)]. Las dos ecuaciones de ϕ son

$$\dot{\phi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \qquad \text{y} \qquad \dot{p_\phi} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} = 0. \tag{13.31}$$

---

[5] En cualquier problema donde la energía potencial $U = U(\mathbf{q})$ sea independiente de las velocidades $\dot{\mathbf{q}}$ (como ciertamente estamos suponiendo aquí), se puede hacer esta pequeña simplificación de sustituir $\mathcal{L}$ por T en la definición de p_i.

La primera de ellas reproduce la definición de p_ϕ. La segunda nos dice lo que ya sabíamos, que el momento angular se conserva. Como en los dos ejemplos anteriores, vemos que el formalismo hamiltoniano proporciona una ruta alternativa a las mismas ecuaciones finales de movimiento que podríamos encontrar usando la formulación newtoniana o la lagrangiana.

Este ejemplo ilustra el procedimiento general a seguir para establecer las ecuaciones de Hamilton para cualquier sistema dado:

1. Elegir las coordenadas generalizadas, $q_1, \ldots, q_n$.
2. Escribir las energías cinética y potencial, T y U, en términos de las q's y las $\dot{q}$'s.
3. Encontrar los momentos generalizados $p_1, \ldots, p_n$. (Estamos suponiendo ahora que nuestro sistema es conservativo, así que U es independiente de $\dot{q}_i$ y podemos usar $p_i = \partial T / \partial \dot{q}_i$. En general, uno debe usar $p_i = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$).
4. Resolver para las $\dot{q}$'s en términos de las p's y las q's.
5. Escribir el hamiltoniano $\mathcal{H}$ como una función de las p's y las q's. [Siempre que nuestras coordenadas sean «naturales» (relación entre coordenadas generalizadas y cartesianas subyacentes independiente del tiempo), $\mathcal{H}$ es justo la energía total $\mathcal{H} = T + U$, pero cuando haya dudas, se debe usar $\mathcal{H} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$. Vea los Problemas 13.11 y 13.122].
6. Escribir las ecuaciones de Hamilton (13.25).

Si volvemos atrás al último ejemplo, veremos que la solución siguió estos seis pasos, y lo mismo será cierto de todos los siguientes ejemplos y problemas. Antes de ver otro ejemplo, comparemos estos seis pasos con los correspondientes pasos en la formulación lagrangiana. Para establecer las ecuaciones de Lagrange, seguimos los primeros dos pasos (elegir coordenadas generalizadas y escribir T y U). Los pasos (3) y (4) son innecesarios, porque no tenemos que saber los momentos generalizados, ni que eliminar las $\dot{q}$'s en favor de las p's. Finalmente, uno debe llevar a cabo los análogos de (5) y (6); a saber, escribir el lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange. Evidentemente, establecer la formulación hamiltoniana supone dos pequeños pasos extra [Pasos (3) y (4) arriba] comparado con la lagrangiana. Aunque ambos pasos son normalmente bastante directos, esta es innegablemente una pequeña desventaja del formalismo hamiltoniano. Aquí tenemos otro ejemplo.

Ejemplo 13.4 *Ecuaciones de Hamilton para una masa sobre un cono*

Consideremos una masa m que está confinada a moverse sobre la superficie sin rozamiento de un cono vertical $\rho = cz$ (en coordenadas polares cilíndricas ρ, ϕ, z con $z > 0$) en un campo gravitatorio uniforme g verticalmente hacia abajo (Figura 13.3).

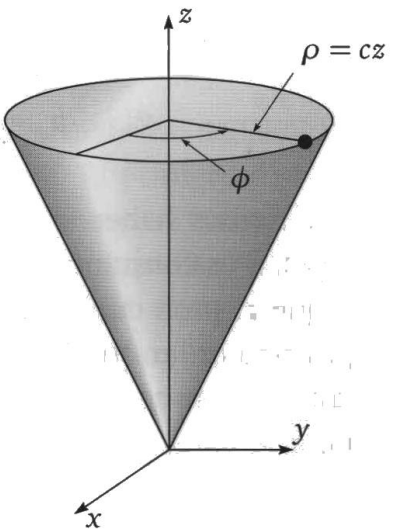


Figura 13.3. Una masa m está confinada a moverse sobre la superficie del cono mostrado. Por claridad, el cono se muestra truncado a la altura de la masa, aunque realmente continúa hacia arriba indefinidamente.

Deducir las ecuaciones de Hamilton usando z y ϕ como coordenadas generalizadas. Mostrar que para cualquier solución dada existen alturas máximas y mínimas $z_{\text{máx}}$ y $z_{\text{mín}}$ entre las cuales el movimiento está confinado. Utilizar el resultado para describir el movimiento de la masa sobre el cono. Mostrar que para cualquier valor dado de $z > 0$ hay una solución en la que la masa describe una trayectoria circular a una altura fija z.

Nuestras coordenadas generalizadas son z y ϕ, con ρ determinado por la ligadura de que la masa permanece en el cono, $\rho = cz$. La energía cinética es por lo tanto

$$T = \tfrac{1}{2}m\left[\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2\right] = \tfrac{1}{2}m\left[(c^2+1)\dot{z}^2 + (cz\dot{\phi})^2\right].$$

La energía potencial es por supuesto $U = mgz$. Los momentos generalizados son

$$p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m(c^2+1)\dot{z} \qquad \text{y} \qquad p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mc^2z^2\dot{\phi}. \tag{13.32}$$

Éstas se resuelven de manera trivial para $\dot{z}$ y $\dot{\phi}$, y podemos escribir el hamiltoniano,

$$\mathcal{H} = T + U = \frac{1}{2m}\left[\frac{p_z^2}{(c^2+1)} + \frac{p_\phi^2}{c^2z^2}\right] + mgz. \tag{13.33}$$

Las ecuaciones de Hamilton se encuentran ahora fácilmente: las dos z ecuaciones son

$$\dot{z} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m(c^2+1)} \qquad \text{y} \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = \frac{p_\phi^2}{mc^2z^3} - mg. \tag{13.34}$$

Las dos ϕ ecuaciones son

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mc^2 z^2} \qquad \text{y} \qquad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0 \tag{13.35}$$

La última nos dice algo que podríamos haber adivinado, que p_ϕ, que es justo la componente z del momento angular, es constante.

La manera más fácil de ver que z, para cualquier solución dada, está confinada entre dos fronteras, $z_{\text{mín}}$ y $z_{\text{máx}}$, es recordar que la función hamiltoniana (13.33) es igual a la energía total, y que la energía se conserva. Por consiguiente, para cualquier solución dada, (13.33) es igual a la constante fija E. Ahora bien, la función $\mathcal{H}$ en (13.33) es la suma de tres términos positivos, y cuando $z \to \infty$ el último término tiende a infinito. Como $\mathcal{H}$ debe igualar a la constante fija E, debe existir una $z_{\text{máx}}$ que z no puede superar. De la misma manera, el segundo término en (13.33) tiende a infinito cuando $z \to 0$; así que tiene que haber una $z_{\text{mín}} > 0$ por debajo de la cual z no puede existir. Más concretamente, esto significa que la masa nunca puede caer todo el camino hasta el fondo del cono en $z = 0$.[6] El movimiento de la masa sobre el cono es ahora fácil de describir. Se mueve alrededor del eje z con momento angular constante $p_\phi = mc^2 z^2 \dot{\phi}$. Como p_ϕ es constante, la velocidad angular $\dot{\phi}$ varía: aumenta cuando z se hace más pequeño y disminuye cuando z se hace más grande. Al mismo tiempo, la altura de la masa z oscila arriba y abajo entre $z_{\text{mín}}$ y $z_{\text{máx}}$. (Vea los Problemas 13.14 y 13.17 para más detalles).

Para investigar la posibilidad de una solución en la que la masa permanece a una altura fija z, advierta que esto requiere que $\dot{z} = 0$ durante todo el tiempo. Esto al final supone que $p_z = 0$ durante todo el tiempo, y por lo tanto $\dot{p}_z = 0$. De la segunda de las ecuaciones de z (13.34), vemos que $\dot{p}_z = 0$ si y sólo si

$$p_\phi = \pm\sqrt{m^2 c^2 g z^3}. \tag{13.36}$$

Si, para cualquier altura inicial elegida z, lanzamos la masa con $p_z = 0$ y p_ϕ igual a uno de esos dos valores (yendo bien en sentido de las agujas del reloj, bien en sentido contrario), entonces como $\dot{p}_z = 0$, p_z y por lo tanto $\dot{z}$ siguen siendo ambos cero, y la masa continúa moviéndose a su altura inicial alrededor de un círculo horizontal.

---

[6] Dos comentarios: es fácil ver que el segundo término en (13.33) está relacionado con la fuerza centrífuga; de este modo, podemos decir que la masa se mantiene lejos del fondo del cono por la fuerza centrífuga. Segundo, la única excepción a esta afirmación es que si el momento angular es $p_\phi = 0$; en este caso, la masa se mueve arriba y abajo del cono en la dirección radial (ϕ constante) y *caerá* finalmente hasta el fondo.

13.4 Coordenadas ignorables

Hasta aquí hemos establecido el formalismo de Hamilton y hemos visto que es válido siempre que lo sea el de Lagrange. El primero disfruta de casi todas las ventajas y desventajas del último, cuando se compara cualquiera de los dos con el formalismo newtoniano. Pero no está todavía claro que haya alguna ventaja significativa en usar el de Hamilton en lugar del de Lagrange. Como ya he mencionado, en trabajos teóricos más avanzados, la formulación de Hamilton tiene algunas ventajas distintas, por lo que intentaré dar algunas ideas para aprovechar algunas de estas ventajas en las siguientes cuatro secciones.

En el Capítulo 7 vimos que si el lagrangiano $\mathcal{L}$ resulta ser independiente de una coordenada q_i, entonces el momento generalizado correspondiente p_i es constante. [Esto se seguía directamente de la ecuación de Lagrange $\partial\mathcal{L}/\partial q_i = (d/dt)\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$, que se puede reescribir como $\partial\mathcal{L}/\partial q_i = \dot{p}_i$. Por lo tanto, si $\partial\mathcal{L}/\partial q_i = 0$, se sigue inmediatamente que $\dot{p}_i = 0$]. Cuando esto sucede, decimos que la coordenada q_i es **ignorable**.

De la misma manera, si el hamiltoniano $\mathcal{H}$ es independiente de q_i, se sigue de la ecuación de Hamilton $\dot{p}_i = -\partial\mathcal{H}/\partial q_i$ que su momento conjugado p_i es una constante. Vimos esto en la Ecuación (13.31) del último ejemplo, en donde $\mathcal{H}$ era independiente de ϕ, y el momento conjugado p_ϕ (realmente el momento angular) era constante. Los resultados de este y del último párrafo son de hecho el *mismo* resultado, porque es fácil de probar que $\partial\mathcal{L}/\partial q_i = -\partial\mathcal{H}/\partial q_i$ (Problema 13.22). De este modo $\mathcal{L}$ es independiente de q_i si y sólo si $\mathcal{H}$ es independiente de q_i. Si una coordenada q_i es ignorable en el lagrangiano entonces también es ignorable en el hamiltoniano y viceversa.

Es no obstante cierto que el formalismo hamiltoniano es más conveniente para manejar coordenadas ignorables. Para verlo, consideremos un sistema con sólo dos grados de libertad y supongamos que el hamiltoniano es independiente de q_2. Esto significa que el hamiltoniano depende sólo de tres variables,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, p_1, p_2). \tag{13.37}$$

Por ejemplo, el hamiltoniano (13.29) para el problema de fuerza central tiene esta propiedad, siendo independiente de la coordenada ϕ. Esto significa que $p_2 = k$, una constante que está determinada por las condiciones iniciales. La sustitución de esta constante en el hamiltoniano produce

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, p_1, k)$$

que es una función sólo de las dos variables q_1 y p_1, y la solución del movimiento se reduce a un problema unidimensional con este hamiltoniano efectivamente unidimensional. Más generalmente, si un sistema con n grados de libertad tiene una

coordenada ignorable q_i, entonces la solución del movimiento en el marco hamiltoniano es exactamente equivalente a un problema con $(n-1)$ grados de libertad en el cual q_i y p_i se pueden ignorar completamente. Si hay varias coordenadas ignorables, entonces el problema se puede simplificar todavía más, lógicamente.

En el formalismo lagrangiano es por supuesto cierto que si q_i es ignorable, entonces p_i es constante, pero esto no conduce a la misma elegante simplificación: suponiendo otra vez que el sistema tiene dos grados de libertad y que q_2 es ignorable, entonces correspondiendo con (13.37) tendríamos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2).$$

Ahora bien, incluso aunque q_2 sea ignorable y p_2 sea una constante, no es necesariamente cierto que $\dot{q}_2$ lo sea. Por consiguiente, el lagrangiano no se reduce limpiamente a una función unidimensional que depende sólo de q_1 y $\dot{q}_1$. [Por ejemplo, en el problema de fuerza central, el lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\phi})$, pero, incluso aunque ϕ sea ignorable, $\dot{\phi}$ aún varía cuando se desarrolla el movimiento, y el problema no se reduce automáticamente a un problema con un grado de libertad[7]].

13.5 Ecuaciones de Lagrange frente a ecuaciones de Hamilton

Para un sistema con n grados de libertad, el formalismo lagrangiano nos presenta n ecuaciones diferenciales de segundo orden para las n variables $q_1, \cdots, q_n$. Para el mismo sistema, el formalismo hamiltoniano nos produce $2n$ ecuaciones diferenciales de *primer orden* para las $2n$ variables $q_1, \cdots, q_n, p_1, \ldots, p_n$. El hecho de que Hamilton podría convertir n ecuaciones de segundo orden en $2n$ ecuaciones de primer orden no es una sorpresa particular. De hecho es fácil ver que *cualquier* conjunto de n ecuaciones de segundo orden se puede reestructurar de esta manera: por simplicidad, consideremos el caso en que sólo hay un grado de libertad, de modo que la formulación lagrangiana nos da sólo una ecuación de segundo orden para la coordenada q. Esta ecuación se puede reescribir como

$$f(\ddot{q}, \dot{q}, q) = 0 \tag{13.38}$$

donde f es alguna función de sus tres argumentos. Definamos ahora una segunda variable

$$s = \dot{q}. \tag{13.39}$$

[7] En este caso particular, la dificultad es bastante fácil de salvar. En la discusión de la Sección 8.4 escribimos la ecuación radial de Lagrange (8.24) en términos de la variable $\dot{\phi}$ y después la reescribimos eliminando $\dot{\phi}$ en favor de $p_\phi = \ell$, que es constante.

En términos de esta segunda variable, $\ddot{q} = \dot{s}$ y nuestra ecuación diferencial original (13.38) se convierte en

$$f(\dot{s}, s, q) = 0. \tag{13.40}$$

Acabamos de sustituir la ecuación de segundo orden (13.38) para q por las dos ecuaciones de primer orden (13.39) y (13.40) para q y s.

Evidentemente, el hecho de que las ecuaciones de Hamilton sean de primer orden mientras que las de Lagrange son de segundo orden no es una mejora particular. Sin embargo, la forma específica de las ecuaciones de Hamilton es de hecho una gran mejora. Para verlo, reescribamos las ecuaciones de Hamilton de una forma más conveniente. Primero podemos reescribir las primeras n de las ecuaciones (13.25) como

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \qquad [i = 1, \ldots, n] \tag{13.41}$$

donde cada f_i es alguna función de $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$, y podemos combinar estas n ecuaciones en una única ecuación n-dimensional

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{13.42}$$

donde la negrita $\mathbf{f}$ representa el vector compuesto por las n funciones $f_i = \partial \mathcal{H}/\partial p_i$. De la misma manera podemos reescribir las n ecuaciones para las $\dot{p}_i$ de una forma similar:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{13.43}$$

donde la negrita $\mathbf{g}$ representa el vector compuesto por las n funciones $g_i = -\partial \mathcal{H}/\partial q_i$. Finalmente, podemos introducir el vector $2n$-dimensional

$$\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n). \tag{13.44}$$

Este **vector del espacio de fases** o **punto de fase z** comprende todas las coordenadas generalizadas *así como* todos sus momentos conjugados. Cada valor de $\mathbf{z}$ denota un único punto en el espacio de fases e identifica un único conjunto de condiciones iniciales para nuestro sistema. Con esta nueva notación podemos combinar las dos ecuaciones (13.42) y (13.43) en una ecuación de movimiento de $2n$-componentes, única y grande

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{h}(\mathbf{z}) \tag{13.45}$$

donde la función $\mathbf{h}$ es un vector compuesto por las $2n$ funciones $f_1, \cdots, f_n$ y $g_1, \ldots, g_n$ de las Ecuaciones (13.42) y (13.43).

La ecuación (13.45) expresa las ecuaciones de Hamilton como una ecuación diferencial de primer orden para el vector del espacio de fases $\mathbf{z}$. Todavía más, es una ecuación de primer orden con la forma especial simple:[8]

$$(\text{primera derivada de } \mathbf{z}) = (\text{función de } \mathbf{z}).$$

Una gran parte de la literatura matemática sobre ecuaciones diferenciales se dedica a ecuaciones con esta forma estándar, y es una ventaja significativa del formalismo hamiltoniano que las ecuaciones de Hamilton (al contrario que las de Lagrange) sean automáticamente de esta forma.

Nuestra combinación de las n coordenadas de posición $\mathbf{q}$ con los n momentos $\mathbf{p}$ para formar un único vector del espacio de fases $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sugiere una cierta igualdad entre las coordenadas de la posición y el momento en el espacio de fases, y esta sugerencia se demuestra correcta. Hemos sabido desde el Capítulo 7 que una de las virtudes del formalismo lagrangiano es su gran flexibilidad con respecto a las coordenadas: cualquier conjunto de coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ puede sustituirse por un segundo conjunto $\mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n)$, donde cada una de las nuevas Q_i es una función de las originales $(q_1, \ldots, q_n)$,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}), \tag{13.46}$$

y las ecuaciones de Lagrange serán justo tan válidas con respecto a las nuevas coordenadas $\mathbf{Q}$ como lo fueron con respecto a las viejas $\mathbf{q}$.[9] Podemos parafrasear esto diciendo que las ecuaciones de Lagrange quedan inalteradas (o son invariantes) bajo cualquier cambio de coordenadas en el espacio de configuración n-dimensional definido por $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$. El formalismo hamiltoniano comparte esta misma flexibilidad (las ecuaciones de Hamilton son invariantes bajo cualquier cambio de coordenadas (13.46) en el espacio de configuración. Sin embargo, el formalismo hamiltoniano realmente tiene mucha más flexibilidad y permite ciertos cambios de coordenadas en el espacio de fases $2n$-dimensional. Podemos considerar cambios de coordenadas de la forma

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \tag{13.47}$$

esto es, cambios de coordenadas en los que tanto las q's y las p's están entremezcladas. Si las ecuaciones (13.47) satisfacen determinadas condiciones, este cambio de

---

[8] Si el hamiltoniano fuera explícitamente dependiente del tiempo, entonces (13.45) adoptaría la forma (todavía muy simple) $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{h}(\mathbf{z}, t)$. La forma (13.45) sin ninguna dependencia explícita se dice que es *autónoma*.

[9] Por supuesto, esta afirmación tiene que ser convenientemente cualificada: las coordenadas $\mathbf{Q}$ deben ser «razonables» en el sentido de que cada conjunto $\mathbf{Q}$ determina un único conjunto $\mathbf{q}$ y viceversa, y la función $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ tiene que ser convenientemente diferenciable.

coordenadas se denomina una **transformación canónica**, y resulta que las ecuaciones de Hamilton son invariantes bajo estas transformaciones canónicas. Cualquier discusión sobre transformaciones canónicas nos llevaría mucho más allá del alcance de este libro, pero debemos ser conscientes de su existencia y de que son una de las propiedades que hacen de la formulación hamiltoniana una herramienta teórica tan poderosa.[10] Los Problemas 13.24 y 13.25 ofrecen dos ejemplos de transformaciones canónicas.

13.6 Órbitas en el espacio de fases

Se puede interpretar el vector del espacio de fases $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ de (13.44) como que define la «posición» del sistema en el espacio de fases. Cualquier punto $\mathbf{z}_0$ define una posible condición inicial (en cualquier tiempo elegido t_0), y las ecuaciones de Hamilton (13.45) definen una única **órbita del espacio de fases** o **trayectoria** que empieza en $\mathbf{z}_0$ en t_0 y que el sistema sigue a medida que progresa el tiempo. Como el espacio de fases tiene $2n$ dimensiones, la visualización de estas órbitas plantea un problema a no ser que $n = 1$. Por ejemplo, para una única partícula sin rozamiento, en tres dimensiones, $n = 3$, el espacio de fases es de seis dimensiones (algo que la mayoría de nosotros no visualizamos con facilidad). Existen diversas técnicas, como la sección de Poincaré, que se describe en la Sección 12.8, para visualizar órbitas del espacio de fases en un subespacio de menos dimensiones que el espacio de fases completo, pero aquí únicamente daré dos ejemplos de sistemas para los que $n = 1$, y por lo tanto, el espacio de fases es sólo bidimensional.

Antes de ver estos ejemplos, hay una propiedad importante de las órbitas en el espacio de fases que merece una mención inmediata: es fácil ver que dos órbitas diferentes del espacio de fases no pueden pasar a través del mismo punto en el espacio de fases; es decir, dos órbitas del espacio de fases no se pueden cruzar una a la otra. Supongamos que dos órbitas pasan a través del mismo punto $\mathbf{z}_0$, como en la Figura 13.4.

Ahora bien, de las ecuaciones de Hamilton (13.45), se sigue que para cualquier punto $\mathbf{z}_0$ sólo puede haber una órbita distinta que pasa por $\mathbf{z}_0$. Por tanto las dos órbitas que pasan a través de $\mathbf{z}_0$ tienen que ser la misma. Advierta que este resultado excluye que órbitas distintas pasen por el mismo punto *incluso en instantes diferentes*: si una órbita pasa a través de $\mathbf{z}_0$ hoy, entonces ninguna órbita diferente puede pasar

[10] Debería hacer hincapié en que no existe una transformación correspondiente similar en la mecánica lagrangiana, la cual opera en el espacio de estados definido por el vector $2n$-dimensional $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Como $\dot{\mathbf{q}}$ se define mediante la derivada temporal de $\mathbf{q}$, no existe análogo con (13.47) en el que las q's y $\dot{q}$'s se entremezclan.

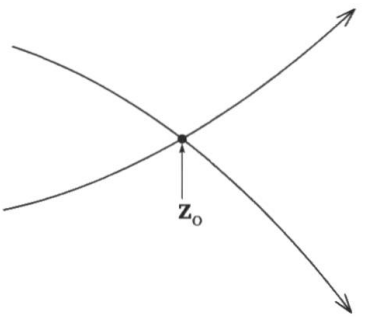


Figura 13.4. Uno puede imaginar dos órbitas a través del mismo punto $\mathbf{z}_0$ en el espacio de fases. Sin embargo, las ecuaciones de Hamilton garantizan que para cualquier punto dado $\mathbf{z}_0$, hay una única órbita que pasa a través de $\mathbf{z}_0$, así que las dos órbitas deben ser en realidad la misma.

a través de $\mathbf{z}_0$ hoy, ayer, o mañana.[11] Este resultado (que dos órbitas del espacio de fases no pueden cruzarse) establece varias restricciones en la manera en que estas órbitas son trazadas en el espacio de fases. Tiene consecuencias importantes en, por ejemplo, el análisis del movimiento caótico de los sistemas hamiltonianos.

Ejemplo 13.5 *El oscilador armónico unidimensional*

Establecer las ecuaciones de Hamilton para un oscilador armónico simple unidimensional con masa m y constante de fuerza k, y describir las posibles órbitas en el espacio de fases definidas por las coordenadas (x, p).

La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ y la energía potencial es $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, si introducimos la frecuencia natural $\omega = \sqrt{k/m}$. El momento generalizado es $p = \partial T/\partial \dot{x} = m\dot{x}$, y el hamiltoniano (escrito como una función de x y p) es

$$\mathcal{H} = T + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \tag{13.48}$$

Por consiguiente, las ecuaciones dan

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \qquad \text{y} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -m\omega^2x.$$

La manera más sencilla de resolver estas dos ecuaciones es eliminar p y obtener la familiar ecuación de segundo orden $\ddot{x} = -\omega^2x$, con la solución igualmente familiar

$$x = A\cos(\omega t - \delta) \qquad \text{y por tanto} \qquad p = m\dot{x} = -m\omega A\,\text{sen}(\omega t - \delta). \tag{13.49}$$

[11] Esto se debe a que nuestro hamiltoniano es independiente del tiempo. $\mathcal{H}$ es dependiente del tiempo explícitamente, entonces podemos afirmar sólo que dos órbitas no pueden pasar a través de un punto al mismo tiempo.

El espacio de fases para el oscilador unidimensional es el espacio de dos dimensiones con coordenadas (x, p). En este espacio, la solución (13.49) es la forma paramétrica para una elipse, trazada en sentido de las agujas del reloj, como en la Figura 13.5, que muestra dos órbitas del espacio de fases para los casos en que el oscilador comenzó desde el reposo en $x = A$ (curva continua) y en $x = A/2$ (curva a trazos). Que las órbitas *tienen* que ser elipses se sigue de la conservación de la energía: la energía total está dada por el hamiltoniano (13.48), cuyo valor inicial (para la curva continua con $x = A$ y $p = 0$) es $\frac{1}{2}m\omega^2A^2$. De este modo la conservación de la energía implica que

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

o

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{(m\omega A)^2} = 1. \tag{13.50}$$

Esta es la ecuación para una elipse con semiejes mayor y menor A y $m\omega A$, respectivamente, de acuerdo con (13.49).

Merece quizá seguir una de las órbitas del espacio de fases de la Figura 13.5 en detalle. Para la curva continua, el movimiento comienza desde el reposo con x en su máximo, en el punto $x = A, p = 0$, mostrado como un punto en la figura. La fuerza restauradora hace que m se acelere otra vez hacia $x = 0$, así que x se hace más pequeño mientras que p se hace cada vez más negativo. Para cuando x ha alcanzado el 0, p ha alcanzado su valor negativo mayor $p = -m\omega A$. El oscilador ahora rebasa el punto de equilibrio, así que x se hace cada vez más negativo, mientras que p es todavía negativo pero cada vez menos. Para cuando x alcanza $-A$, p es otra vez cero,

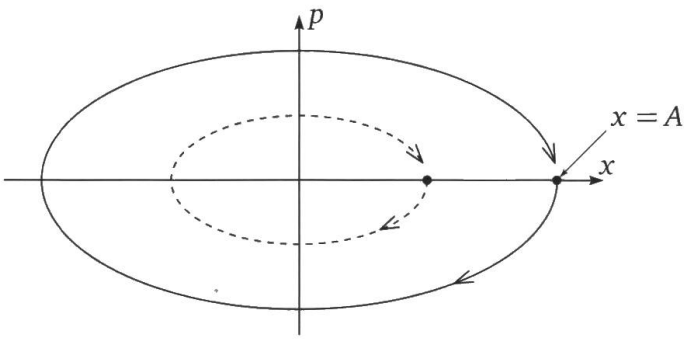


Figura 13.5. El espacio de fases para un oscilador armónico unidimensional es un plano, con ejes denotados por x (la posición) y p (el momento), en los que el punto que representa el estado del movimiento traza una elipse en sentido de las agujas del reloj. Existe una única órbita (curva continua) a través de cada punto de fase (x, p). La órbita más externa comenzó desde el reposo con $x = A$ y $p = 0$; la más interna comenzó desde $x = A/2$ y $p = 0$.

y así sucesivamente, hasta que el oscilador vuelve de nuevo a su punto de partida $x = A, p = 0$ y el ciclo comienza otra vez. Advierta que, de acuerdo con nuestro argumento general, las dos órbitas mostradas en la Figura 13.5 no se cruzan una a la otra. De hecho, es fácil ver que ninguna de las dos elipses con la forma (13.50) pueden tener algún punto en común a menos que tengan el mismo valor de A (en cuyo caso son la *misma* elipse).

En este caso unidimensional sencillo, la representación del espacio de fases no nos dice nada que no pudiéramos aprender de la solución simple $x = A\cos(\omega t - \delta)$, pero espero que estemos de acuerdo en que sí muestra más claramente algunos detalles del movimiento.

Si se ha leído el Capítulo 12, se reconocerá que una órbita del espacio de fases está estrechamente relacionada con la órbita del espacio de estados descrita en la Sección 12.7. La única diferencia es que la primera traza la evolución del sistema en el plano (x, p) mientras que la segunda usa el plano $(x, \dot{x})$. En el caso que nos ocupa casi no hay diferencia, porque para el movimiento unidimensional a lo largo del eje x, p es proporcional a $\dot{x}$ (específicamente, $p = m\dot{x}$). Por consiguiente los dos tipos de gráfica son idénticos excepto que el primero está estirado por un factor m en la dirección vertical. Sin embargo, en el caso general $2n$-dimensional, los espacios definidos por $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ y por $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ pueden ser muy diferentes. Como veremos en la siguiente sección, la representación del espacio de fases tiene algunas propiedades elegantes que no comparte la del espacio de estados.

Ocurre muchas veces que uno necesita seguir no sólo una órbita, sino varias órbitas distintas a través del espacio de fases. Por ejemplo, en el estudio del caos vimos que es de gran interés seguir la evolución de dos sistemas idénticos que son lanzados con condiciones iniciales ligeramente diferentes. Si el movimiento es no caótico, entonces los dos sistemas permanecen cerca en el espacio de fases, pero si el movimiento es caótico se alejan tan rápidamente que su movimiento detallado es efectivamente impredecible. En el siguiente ejemplo, observamos cuatro órbitas vecinas del espacio de fases de una partícula que cae bajo la influencia de la gravedad.

Ejemplo 13.6 *Un cuerpo que cae*

Establecer el formalismo hamiltoniano para una masa m obligada a moverse en una línea vertical, sometida sólo a la fuerza de la gravedad. Utilizar la coordenada x, medida hacia abajo desde un origen conveniente, y su momento conjugado. Describir las órbitas del espacio de fases y en particular esbozar las órbitas desde el instante 0 hasta un instante posterior t para las siguientes cuatro condiciones iniciales en $t = 0$:

(a) $x_0 = p_0 = 0$ (esto es, la masa se deja libre desde el reposo en $x = 0$);

(b) $x_0 = X$, pero $p_0 = 0$ (la masa se deja libre desde el reposo en $x = X$);
(c) $x_0 = X$ y $p_0 = P$ (la masa se lanza desde $x = X$ con momento inicial $p = P$);
(d) $x_0 = 0$ y $p_0 = P$ (la masa se lanza desde $x = 0$ con momento inicial $p = P$).

Las energías cinética y potencial son $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ y $U = -mgx$. (Recuerde que x se mide hacia abajo). El momento conjugado es, por supuesto, $p = m\dot{x}$ y el hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = T + U = \frac{p^2}{2m} - mgx. \tag{13.51}$$

Para encontrar la forma de las órbitas del espacio de fases, no tenemos que resolver las ecuaciones de movimiento, porque la conservación de la energía requiere que satisfagan $\mathcal{H}$ = constante. Para el hamiltoniano (13.51), esto define una parábola con la forma $x = kp^2 +$ constante con su eje de simetría en el eje x.

Para dibujar las cuatro órbitas que se piden, es útil resolver las ecuaciones de movimiento

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \qquad \text{y} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = mg.$$

La segunda de éstas da

$$p = p_0 + mgt$$

y la primera entonces da

$$x = x_0 + \frac{p_0}{m}t + \frac{1}{2}gt^2$$

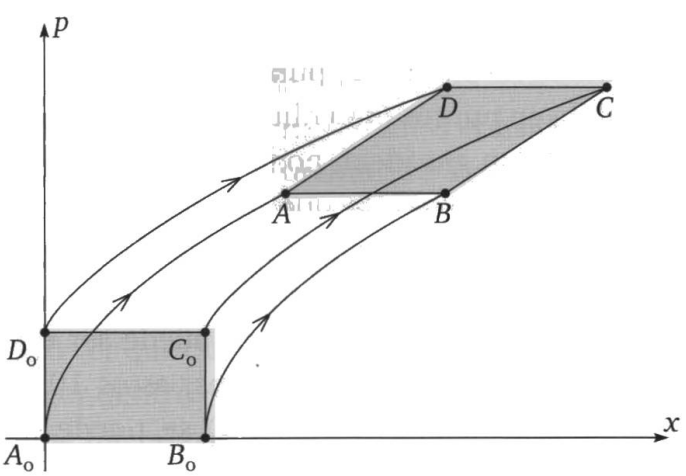


Figura 13.6. Cuatro órbitas distintas del espacio de fases para un cuerpo que se mueve verticalmente bajo la influencia de la gravedad, con posición x (medida verticalmente hacia abajo) y momento p. Los cuatro estados diferentes en el instante 0 se muestran mediante puntos denotados por A_0, B_0, C_0 y D_0, con estados finales correspondientes en un instante t posterior etiquetados A, B, C y D.

(ambos resultados son muy familiares de mecánica elemental). Imponiendo las condiciones iniciales dadas, uno obtiene las cuatro curvas mostradas en la Figura 13.6. Como era de esperar, las cuatro órbitas $A_0A, \ldots, D_0D$ son parábolas, y ninguna de ellas cruza a ninguna otra. Se puede ver que el rectángulo inicial $A_0B_0C_0D_0$ se ha convertido en un paralelogramo $ABCD$. Sin embargo, es fácil demostrar que el área del paralelogramo es el mismo que el del rectángulo original. (Misma base, $A_0B_0 = AB$, y misma altura. Vea el Problema 13.27). Veremos en la siguiente sección que estas dos propiedades (cambiar la forma pero no cambiar el área) son propiedades generales de todas las órbitas del espacio de fases. En particular, que el área no cambie es un ejemplo del importante resultado conocido como Teorema de Liouville.

13.7 Teorema de Liouville*

* *Esta sección contiene material más avanzado que la mayoría de los materiales presentes en el resto del libro. En concreto, utiliza el operador divergencia y el teorema de la divergencia del cálculo vectorial. Si no ha visto antes estas ideas, puede omitir esta sección si lo desea.*

En el Ejemplo 13.6 vimos que podemos usar una representación del espacio de fases para seguir el movimiento de varios sistemas idénticos que evolucionan a partir de varias condiciones iniciales distintas. En muchos problemas, especialmente en los de mecánica estadística, se tiene la ocasión de seguir el movimiento de un número enorme de sistemas idénticos. El estado de cada sistema se puede representar por un punto en el espacio de fases, y, si el número de estos puntos es suficientemente grande, podemos ver la nube resultante de puntos como si fuera algún tipo de fluido, con una densidad ρ medida en puntos por volumen del espacio de fases. Por ejemplo, en la mecánica estadística de un gas ideal, podemos querer seguir el movimiento de unas 10^{23} moléculas idénticas a medida que se mueven dentro de un recipiente. Cada molécula está gobernada por el mismo hamiltoniano y se mueve en el mismo espacio de fases de seis dimensiones con coordenadas (x, y, z, p_x, p_y, p_z). De este modo el estado del sistema en cualquier instante puede ser especificado dando las posiciones de 10^{23} puntos en este espacio de fases; estos 10^{23} puntos forman una nube cuyo movimiento (para muchos propósitos) se puede tratar como el de un fluido. En la mayor parte de esta sección puede tener en cuenta este ejemplo, aunque en determinados casos muchas veces me especializaré en un sistema con sólo una dimensión espacial y por tanto con dos dimensiones del espacio de fases.

El seguimiento del movimiento de muchos sistemas idénticos utilizando nubes de puntos en su espacio de fases se ilustra en la Figura 13.7. Esta imagen podría verse como una representación esquemática de un espacio de fases multidimensio-

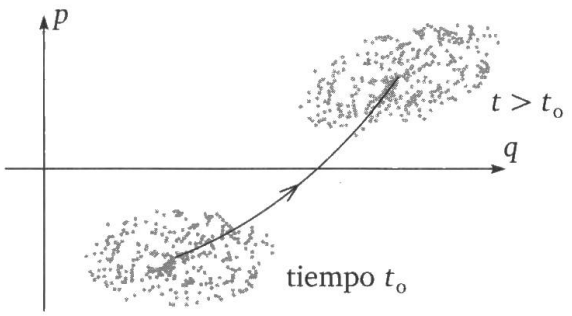


Figura 13.7. Los puntos en la nube más baja denotan los estados de unos 300 sistemas idénticos en el instante t_0. A medida que avanza el tiempo, cada punto se mueve a través del espacio de fases de acuerdo con las ecuaciones de Hamilton, y la nube completa se mueve a la posición de arriba.

nal, pero, por simplicidad, pensemos en él como el espacio de fases bidimensional, con las coordenadas $\mathbf{z} = (q, p)$ de un sistema con un grado de libertad. Cada punto en la nube más baja representa el estado inicial de un sistema (por ejemplo, una molécula de un gas) dando su posición $\mathbf{z} = (q, p)$ en el espacio de fases en el instante t_0. Las ecuaciones de Hamilton determinan la «velocidad» con la que cada punto se mueve a través del espacio de fases:

$$\text{(velocidad del espacio de fases)} = \dot{\mathbf{z}} = (\dot{q}, \dot{p}) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right). \tag{13.52}$$

Por cada punto $\mathbf{z}$ en la nube inicial, existe una única velocidad $\dot{\mathbf{z}}$, y cada punto se aleja con su velocidad asignada. En general, puntos diferentes tendrán velocidades diferentes, y la nube puede cambiar su forma y orientación, como se muestra. Por otro lado, como demostraremos en breve, el volumen ocupado por la nube no puede cambiar; resultado llamado teorema de Liouville.

Para hacer más precisa esta idea, necesitamos considerar una superficie cerrada en el espacio de fases tal como la que se muestra en la parte inferior izquierda de la Figura 13.8. Cada punto en esta superficie cerrada define un único conjunto de condiciones iniciales y se mueve por la órbita correspondiente del espacio de fases a medida que el tiempo avanza. Por consiguiente toda la superficie se mueve a través del espacio de fases. Es fácil ver que cualquier punto que está inicialmente *dentro* de la superficie debe permanecer dentro de ella durante todo el tiempo: por ejemplo, supongamos que un punto que inicialmente está en el interior pudiera salir fuera. Entonces en cierto momento tendría que cruzar la superficie que se mueve. En ese momento tendría dos órbitas distintas cruzándose entre sí, lo cual sabemos que es imposible. Por el mismo argumento, cualquier punto que esté inicialmente fuera de la superficie permanecerá fuera durante todo el tiempo. De este modo el número de puntos (que representan moléculas, por ejemplo) que están dentro de la superficie es una constante en el tiempo. El resultado principal de esta sección (el Teorema de Liouville) es que

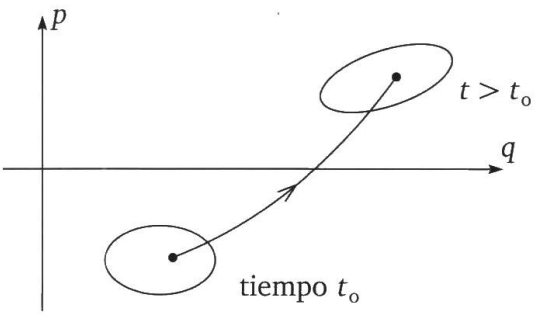


Figura 13.8. A medida que avanza el tiempo, la superficie cerrada situada en la parte inferior izquierda se desplaza a través del espacio de fases. Cualquier punto que está inicialmente dentro de la superficie permanece dentro de ella para siempre.

el volumen de la superficie cerrada que se desplaza en la Figura 13.8 es constante en el tiempo. Para demostrarlo necesitamos conocer la relación entre la tasa de variación de este tipo de volumen y la famosa *divergencia* del vector velocidad.

Volúmenes cambiantes

Los dos resultados matemáticos que necesitamos se cumplen en espacios con cualquier número de dimensiones. Necesitaremos aplicarlos en el espacio de fases $2n$-dimensional. No obstante, considerémoslos en el contexto familiar de nuestro espacio tridimensional cotidiano. Imaginemos un espacio tridimensional lleno de un fluido en movimiento. El fluido en cada punto $\mathbf{r}$ se está moviendo con velocidad $\mathbf{v}$. Para cada posición $\mathbf{r}$ hay una única velocidad $\mathbf{v}$, pero $\mathbf{v}$ puede, por supuesto, tener valores distintos en puntos $\mathbf{r}$ distintos; por ello podemos escribir $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$. Esto es completamente análogo a la situación en el espacio de fases, en donde cada punto de fase $\mathbf{z}$ se está moviendo con una velocidad que está unívocamente determinada por su posición en el espacio de fases, $\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$.

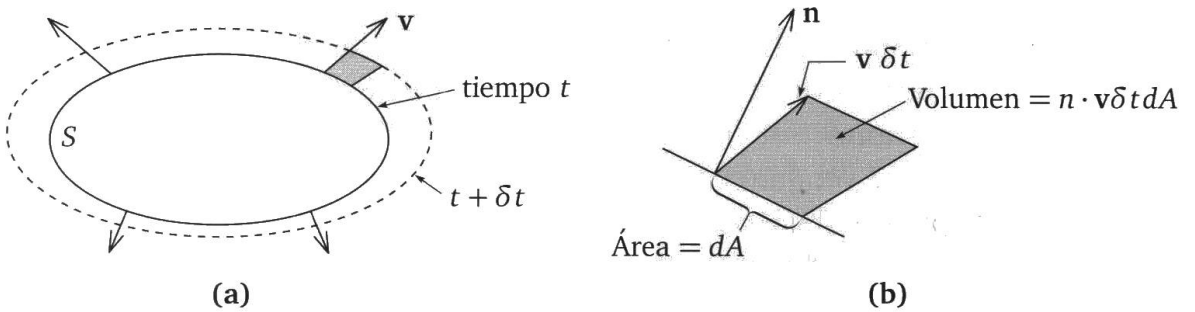


Figura 13.9. **(a)** La superficie S se mueve con el fluido desde su posición inicial (curva continua) en un tiempo t a una nueva posición (curva a trazos) en un tiempo $t + \delta t$. La variación en V es justo el volumen comprendido entre las dos superficies. **(b)** Vista ampliada del volumen sombreado de la parte (a). El vector $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a la superficie S, que apunta hacia fuera.

Consideremos ahora una superficie cerrada S en el fluido en un instante determinado t. Podemos imaginar que marcamos esta superficie con tinta de tal manera que podemos seguir su movimiento a medida que se desplaza con el fluido. La pregunta que tenemos que hacernos es la siguiente: si V denota el volumen contenido dentro de S, ¿con qué rapidez cambia V a medida que el fluido se mueve? La Figura 13.9(a) muestra dos posiciones sucesivas de la superficie S en dos instantes sucesivos separados por un corto intervalo de tiempo δt. La variación en V durante el intervalo δt es el volumen encerrado entre estas dos superficies. Para evaluar esto, consideremos primero la contribución del pequeño volumen sombreado en la Figura 13.9(a), que está ampliado en la Figura 13.9(b). Este pequeño volumen es un cilindro cuya base tiene un área dA. El lado del cilindro está dado por el desplazamiento de $\mathbf{v}\delta t$, así que la altura del cilindro es la componente de $\mathbf{v}\delta t$ normal a la superficie. Si introducimos un vector unitario $\mathbf{n}$ en la dirección de la normal hacia fuera de S, entonces la altura del cilindro es $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\delta t$ y su volumen es $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\delta t\, dA$. La variación total en el volumen encerrado por la superficie S se calcula añadiendo todas estas pequeñas contribuciones, siendo

$$\delta V = \int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\delta t\, dA, \tag{13.53}$$

donde la integral es una integral de superficie evaluada sobre toda la superficie cerrada S. Dividiendo ambos miembros por δt y haciendo $\delta t \to 0$, obtenemos el primero de dos resultados clave:

$$\frac{dV}{dt} = \int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\, dA. \tag{13.54}$$

La Figura 13.9(a) mostraba una corriente de fluido con la velocidad $\mathbf{v}$ dirigida hacia afuera en todas partes, como sería el caso para aire en expansión en el interior de un globo cuya temperatura está subiendo. Con $\mathbf{v}$ hacia fuera, el producto escalar $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}$ es positivo (porque $\mathbf{n}$ fue definido como la normal hacia afuera) y la integral (13.54) es positiva, lo que implica que V está aumentando, como debería ocurrir. Si $\mathbf{v}$ apuntase en todas partes hacia dentro (aire dentro de un globo cuya temperatura está descendiendo), entonces $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}$ sería negativo y V estaría disminuyendo. En general, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}$ puede ser positivo en algunas partes de la superficie S y negativo en otras. En particular, si el fluido es incompresible, de modo que V no puede cambiar, entonces las contribuciones de valores positivos y negativos de $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}$ deben cancelarse exactamente para que dV/dt pueda ser cero.

Hemos deducido el resultado (13.54) para una superficie S y un volumen V en tres dimensiones, pero es igualmente válido en cualquier número de dimensiones. En un espacio m-dimensional ambos vectores $\mathbf{n}$ y $\mathbf{v}$ tienen m componentes y su producto escalar es $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = n_1v_1 + \cdots + n_mv_m$. Con esta definición, el resultado (13.54) es válido sea cual sea el valor de m.

El teorema de la divergencia

El segundo resultado matemático que necesitamos se conoce como **teorema de la divergencia** o **teorema de Gauss**. Este es uno de los resultados característicos del cálculo vectorial (similar al teorema de Stokes que utilizamos en el Capítulo 4) y se puede encontrar su demostración en cualquier texto sobre cálculo vectorial,[12] aunque su demostración es bastante directa e instructiva en varios casos sencillos. (Vea el Problema 13.37). El teorema incluye el operador vectorial denominado divergencia. Para cualquier vector $\mathbf{v}$, la **divergencia** de $\mathbf{v}$ se define como

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}; \tag{13.55}$$

aquí $\mathbf{v}$ puede ser cualquier vector (una fuerza o un campo eléctrico, por ejemplo), aunque para nosotros siempre será una velocidad. Si no ha visto el operador divergencia antes, quizá quiera practicar con alguno de los Problemas 13.31, 13.32 o 13.34.

El teorema de la divergencia afirma que la integral de superficie en (13.54) se puede expresar en términos de $\nabla\cdot\mathbf{v}$:

$$\int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,dA = \int_V \nabla\cdot\mathbf{v}\,dV. \tag{13.56}$$

Aquí la integral de la derecha es una integral de volumen sobre el volumen V encerrado por la superficie S. Este teorema es una herramienta increíblemente poderosa. Juega un papel crucial en aplicaciones de la ley de Gauss en electrostática. Muchas veces nos permite evaluar integrales que de otra manera serían muy difíciles de evaluar. En concreto, hay muchos flujos de fluidos interesantes que presentan la propiedad de que $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$; para tales fluidos, la integral de la izquierda puede ser muy complicada de evaluar directamente, pero gracias al teorema de la divergencia podemos ver inmediatamente que la integral es en realidad cero. Como esta es la manera en que vamos a utilizar el teorema de la divergencia, vamos a examinar un ejemplo de un fluido de este tipo enseguida.

Ejemplo 13.7 *Un flujo laminar*

La velocidad de flujo de cierto fluido es

$$\mathbf{v} = ky\hat{\mathbf{x}} \tag{13.57}$$

[12] Vea, por ejemplo, Mary Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (Wiley, 1983), p. 271.

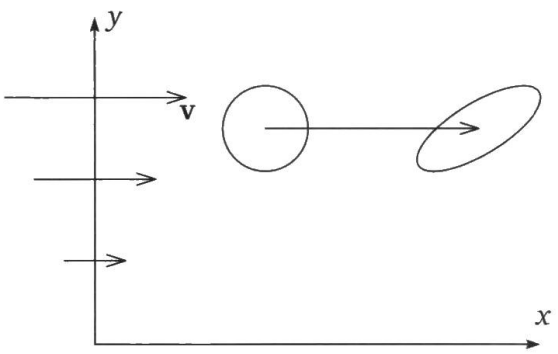


Figura 13.10. El fluido descrito por (13.57) es un fluido laminar. Los planos paralelos al plano $y = 0$ se mueven todos en la dirección x con velocidad proporcional a y. Este movimiento laminar estira la esfera para formar una elipse.

donde k es una constante; esto es, $v_x = ky$ y $v_y = v_z = 0$. Describir este flujo y esbozar el movimiento de una superficie cerrada que empieza siendo una esfera. Evalúe la divergencia $\nabla\cdot\mathbf{v}$ y muestre que el volumen encerrado por cualquier superficie cerrada S que se mueve con el fluido no puede cambiar; es decir, el fluido fluye de manera incompresible.

La velocidad $\mathbf{v}$ apunta en todas partes en la dirección x y depende sólo de y. Por consiguiente, todos los puntos en cualquier plano $y =$ constante se mueven como una plancha rígida que se desliza: un patrón denominado flujo laminar.[13] La velocidad aumenta con y, de manera que cada plano se mueve un poco más rápido que el que esta debajo de él, en un *movimiento de cizalladura*, como se indica mediante las tres flechas en la Figura 13.10. Si consideramos una superficie cerrada que se mueve con el fluido y es inicialmente esférica, entonces su parte de arriba será arrastrada un poco más rápido que su parte de abajo y será estirada para formar un elipsoide de excentricidad siempre creciente, como se muestra.

Podemos evaluar fácilmente $\nabla\cdot\mathbf{v}$ usando la definición (13.55)

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial ky}{\partial x} + 0 + 0 = 0. \tag{13.58}$$

Ahora, combinando los dos resultados (13.54) y (13.56), vemos que la tasa de variación del volumen interior a cualquier superficie cerrada es

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{v}\, dV. \tag{13.59}$$

[13] Del latin *lamina*, que significa capa o plancha delgada, de la cual también tenemos el adjetivo «laminar».

Como hemos mostrado que $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$ en todas partes, se sigue que $dV/dt = 0$ y el volumen dentro de cualquier superficie cerrada que se mueve con el fluido es constante para el flujo de (13.57).

Si no se ha visto el teorema de la divergencia antes, es recomendable intentar alguno de los dos Problemas 13.33 y 13.37. Permítanme mencionar una última cosa sobre la importancia de $\nabla\cdot\mathbf{v}$. Si aplicamos (13.59) a un volumen suficientemente pequeño V, entonces $\nabla\cdot\mathbf{v}$ será aproximadamente constante en toda la región de integración, el segundo miembro de (13.59) se hace justo $(\nabla\cdot\mathbf{v})V$ y (13.59) por sí sola implica que

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$$

para cualquier volumen pequeño V. Como dV/dt se puede llamar flujo saliente de $\mathbf{v}$, podemos decir que $\nabla\cdot\mathbf{v}$ es el *flujo saliente por unidad de volumen*. Si $\nabla\cdot\mathbf{v}$ es positiva en cualquier punto $\mathbf{r}$, entonces existe un flujo saliente alrededor de $\mathbf{r}$ y cualquier pequeño volumen alrededor de $\mathbf{r}$ se esta expandiendo (como un gas en un globo que se esta calentando); si $\nabla\cdot\mathbf{v}$ es negativo, entonces existe un flujo entrante y cualquier pequeño volumen alrededor de $\mathbf{r}$ se esta contrayendo (como un gas en un globo que se esta enfriando). En nuestro ejemplo, $\nabla\cdot\mathbf{v}$ era cero, y cualquier volumen que se moviera con el fluido era constante.

La divergencia se generaliza fácilmente a cualquier número de dimensiones. En un espacio m-dimensional con coordenadas $(x_1,\ldots,x_m)$ la divergencia de un vector $\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_m)$ se define como

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial v_m}{\partial x_m}$$

y, con estas definiciones, el resultado crucial (13.59) toma exactamente la misma forma, excepto que la integral es una integral sobre una región m-dimensional con elemento de volumen $dV = dx_1\,dx_2\cdots dx_m$.

Teorema de Liouville

Estamos ya preparados para demostrar el objetivo principal de esta sección, el Teorema de Liouville. Este es un teorema sobre movimiento en el espacio de fases, el espacio $2n$-dimensional con coordenadas $\mathbf{z} = (\mathbf{q},\mathbf{p}) = (q_1,\ldots,q_n,p_1,\cdots,p_n)$. Para simplificar la notación, consideraré un sistema con un grado de libertad, de modo que $n = 1$ y el espacio de fases es bidimensional con puntos de fase $\mathbf{z} = (q,p)$. El caso general se hace casi de la misma manera, como se puede comprobar haciendo el Problema 13.36.

Cada punto de fase $\mathbf{z} = (q, p)$ se mueve a través del espacio bidimensional de acuerdo con las ecuaciones de Hamilton, con velocidad

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{z}} = (\dot{q}, \dot{p}) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right). \tag{13.60}$$

Consideramos una superficie cerrada arbitraria S que se mueve a través del espacio de fases por los puntos de fases, como se ilustraba en la Figura 13.8. El ritmo al que varía el volumen dentro de S esta dado por (13.59), donde ahora el volumen es un volumen bidimensional (realmente un área) y

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right) = 0, \tag{13.61}$$

que es cero porque el orden de las dos derivaciones en las derivadas segundas es indiferente. Como $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, se sigue que $dV/dt = 0$, y hemos demostrado que el volumen V encerrado por cualquier superficie cerrada es una constante cuando la superficie se mueve en el espacio de fases. Este es el **Teorema de Liouville**.

Existe otra manera de enunciar el Teorema de Liouville: vimos antes que el numero N de puntos, que representan sistemas idénticos, dentro de cualquier volumen V no puede cambiar. (Ningún punto puede cruzar la frontera S desde el interior al exterior o viceversa). Hemos visto ahora que el volumen V no puede cambiar. Por lo tanto, la densidad de puntos, $\rho = N/V$ tampoco puede cambiar. Esta afirmación se parafrasea a veces diciendo que la nube de puntos se mueve a través del espacio de fases como un fluido incompresible. Sin embargo, es importante entender bien lo que significa esta afirmación. La densidad ρ puede, por supuesto, ser diferente en puntos de fase diferentes $\mathbf{z} = (q, p)$; todo lo que estamos diciendo es que cuando seguimos un punto de fase a lo largo de su órbita, la densidad en este punto no cambia.

Lamentablemente no podemos tratar aquí las consecuencias del Teorema de Liouville, pero puedo simplemente mencionar un ejemplo: vimos en el Capítulo 12 que cuando el movimiento es caótico, dos sistemas idénticos que comienzan con condiciones iniciales casi idénticas se alejan rápidamente en el espacio de fases. Por consiguiente si consideramos un pequeño volumen inicial en el espacio de fases, tal como el mostrado en la Figura 13.8, y si el movimiento es caótico, entonces al menos algunos pares de puntos dentro del volumen deben alejarse rápidamente. Pero acabamos de ver que el volumen total V no puede cambiar. Por lo tanto, cuando el volumen crece en una dirección, debe contraerse en otra dirección, convirtiéndose en algo parecido a un puro. Sucede frecuentemente que la región en la cual los puntos de fase se pueden mover esta cerrada. (Por ejemplo, la conservación de la energía tiene este efecto en el oscilador armónico de la Figura 13.5). En este caso, cuando el volumen V se hace más largo y más fino, tiene que doblarse intrincadamente sobre sí mismo, añadiendo otro capítulo a la ya fascinante historia del movimiento caótico.

Finalmente, un par de puntos sobre la validez del Teorema de Liouville: primero, en todos los ejemplos de este capítulo, hemos supuesto que el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$, que las fuerzas son conservativas y las coordenadas «naturales», así que $\mathcal{H} = T + U$. Sin embargo, ninguna de estas hipótesis es necesaria para la veracidad del teorema de Liouville. La demostración dada en esta sección depende sólo de la validez de las ecuaciones de Hamilton, y cualquier sistema que cumpla las ecuaciones de Hamilton cumple también el teorema de Liouville. Por ejemplo, una partícula cargada en un campo electromagnético obedece las ecuaciones de Hamilton (Problema 13.18) y por tanto también el Teorema de Liouville, incluso aunque $\partial\mathcal{H}/\partial t$ pueda ser distinto de cero y $\mathcal{H}$ no sea ciertamente igual a $T + U$. Segundo, el teorema de Liouville aplica al espacio de fases hamiltoniano con coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, y no hay un teorema correspondiente para el espacio de estados lagrangiano con coordenadas $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Esta es una de las ventajas más importantes de la formulación hamiltoniana sobre la lagrangiana.

Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 13

El hamiltoniano

Si un sistema tiene coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, \cdots, q_n)$, lagrangiano $\mathcal{L}$, y momentos generalizados $p_i = \partial\ell/\partial\dot{q}_i$, su **hamiltoniano** se define como

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}, \qquad \text{[Ec. (13.22)]}$$

siempre considerado como una función de las variables $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$ (y posiblemente t).

Ecuaciones de Hamilton

La evolución temporal de un sistema está dada por las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} \qquad \text{y} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} \qquad [i = 1, \ldots, n]. \qquad \text{[Ec. (13.25)]}$$

Espacio de fases y órbitas en el espacio de fases

El **espacio de fases** de un sistema es el espacio $2n$-dimensional con puntos $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ definidos por las n coordenadas generalizadas q_i y los correspondientes n momentos generalizados p_i. Una **órbita en el espacio de fases** es el camino trazado en el espacio de fases por un sistema a medida que el tiempo avanza. [Secciones 13.5 y 13.6]

Teorema de Liouville

Si imaginamos un número grande de sistemas idénticos lanzados al mismo tiempo con condiciones iniciales ligeramente diferentes, los puntos del espacio de fases que representan los sistemas se pueden ver como formando un fluido. El teorema de Liouville afirma que la densidad de este

fluido es constante en el tiempo (o, análogamente, que el volumen ocupado por cualquier grupo de puntos es constante). [Sección 13.7]

Problemas para el Capítulo 13

Los asteriscos indican el nivel aproximado de dificultad, desde los más fáciles (⋆) hasta los más difíciles (⋆ ⋆ ⋆).

Sección 13.2 Ecuaciones de Hamilton para sistemas unidimensionales

13.1 ⋆ Hallar el lagrangiano, el momento generalizado y el hamiltoniano para una partícula libre (ninguna fuerza en absoluto) confinada a moverse a lo largo del eje x. (Usar x como coordenada generalizada). Hallar y resolver las ecuaciones de Hamilton.

13.2 ⋆ Considerar una masa m que está limitada a moverse en una línea vertical bajo la influencia de la gravedad. Usando la coordenada x medida verticalmente hacia abajo desde un origen conveniente O, escribir el lagrangiano $\mathcal{L}$ y encontrar el momento generalizado $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}$. Encontrar el hamiltoniano $\mathcal{H}$ como una función de x y p y escribir las ecuaciones de Hamilton del movimiento. (Para un sistema tan fácil es demasiado esperar que se pudiera aprender algo nuevo usando la formulación hamiltoniana, pero comprobar que las ecuaciones del movimiento tienen sentido).

13.3 ⋆ Considerar la máquina de Atwood de la Figura 13.2, pero suponiendo que la polea es un disco uniforme de masa M y radio R. Utilizando x como coordenada generalizada, escribir el lagrangiano, el momento generalizado p y el hamiltoniano $\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L}$. Encontrar las ecuaciones de Hamilton y usarlas para hallar la aceleración $\ddot{x}$.

13.4 ⋆ El hamiltoniano $\mathcal{H}$ está siempre dado por $\mathcal{H} = pq - \mathcal{L}$ (en una dimensión), que es la forma que se debería usar en caso de duda. Sin embargo, si la coordenada generalizada q es «natural» (la relación entre q y las coordenadas cartesianas subyacentes es independiente del tiempo) entonces $\mathcal{H} = T + U$, y esta forma es casi siempre más fácil de escribir. Por lo tanto, en la resolución de cualquier problema se debería comprobar rápidamente si la coordenada generalizada es «natural», y, si lo es, se puede utilizar la forma más sencilla $\mathcal{H} = T + U$. Para la máquina de Atwood del Ejemplo 13.2 (página 582), comprobar que la coordenada generalizada era «natural». [*Ayuda:* Hay una coordenada generalizada x y dos coordenadas cartesianas subyacentes x e y. Solo hay que escribir las ecuaciones para las dos cartesianas en términos de las coordenadas generalizadas y comprobar que no incluyen el tiempo, de modo que no haya problema en usar $\mathcal{H} = T + U$. ¡Esto es ridículamente facil!].

13.5 ⋆ ⋆ Una cuenta de collar de masa m está enhebrada en un alambre sin rozamiento que está doblado formando una hélice con coordenadas polares cilíndricas (ρ, ϕ, z) que cumplen $z = c\phi$ y $\rho = R$, con c y R constantes. El eje z apunta verticalmente hacia arriba y la gravedad verticalmente hacia abajo. Usando ϕ como coordenada generalizada, escribir las energías cinética y potencial, y con ellas el hamiltoniano $\mathcal{H}$ como una función de ϕ y su momento conjugado p. Escribir las ecuaciones de Hamilton y resolver para $\ddot{\phi}$ y por tanto $\ddot{z}$. Explicar el resultado en términos de la mecánica newtoniana y discutir el caso especial en que $R = 0$.

13.6 ⋆ ⋆ Al discutir la oscilación de una masa al final de un muelle, casi siempre hemos ignorado la masa del muelle. Establecer el hamiltoniano $\mathcal{H}$ para una masa m en un muelle (constante de fuerza k) cuya masa M *no* es despreciable, usando la extensión x del muelle como coordenada generalizada. Resolver las ecuaciones de Hamilton y mostrar que la masa oscila con frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/(m + M/3)}$. Esto es, el efecto de la masa del muelle es añadir $M/3$ a m. (Suponer que la masa del muelle está distribuida uniformemente y que se estira uniformemente: si el extremo libre se ha extendido una distancia x, entonces el punto medio se ha movido una distancia $x/2$ y así sucesivamente).

13.7 ⋆⋆⋆ En una montaña rusa, una vagoneta de masa m se desplaza por una pista sin rozamiento que se apoya en el plano xy (x horizontal e y verticalmente hacia arriba). La altura de la pista por encima del suelo esta dada por $y = h(x)$. **(a)** Usando x como coordenada generalizada, escribir el lagrangiano, el momento generalizado p, y el hamiltoniano $\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L}$(como una función de x y p). **(b)** Encontrar las ecuaciones de Hamilton y mostrar que están de acuerdo con lo que se obtendría a partir del enfoque newtoniano. [*Ayuda*: Sabemos de la Sección 4.7 que la segunda ley de Newton toma la forma $F_{\text{tang}} = m\ddot{s}$, donde s es la distancia medida a lo largo de la pista. Reescribir esto como una ecuación para $\ddot{x}$ y mostrar que se obtiene el mismo resultado a partir de la ecuaciones de Hamilton].

Sección 13.3 Ecuaciones de Hamilton en varias dimensiones

13.8 ⋆ Encontrar el lagrangiano, los momentos generalizados y el hamiltoniano para una partícula libre (sin ninguna fuerza en absoluto) que se mueve en tres dimensiones. (Usar x, y, z como coordenadas generalizadas). Hallar y resolver las ecuaciones de Hamilton.

13.9 ⋆ Establecer el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton para un proyectil de masa m, que se mueve en un plano vertical y está sometido a la gravedad pero no a la resistencia del aire. Usar como coordenadas x medida horizontalmente e y medida verticalmente hacia arriba. Comentar cada una de las cuatro ecuaciones de movimiento.

13.10 ⋆ Considerar una partícula de masa m que se mueve en dos dimensiones, sometida a una fuerza $\mathbf{F} = -kx\hat{\mathbf{x}} + K\hat{\mathbf{y}}$, donde k y K son constantes positivas. Escribir el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton, utilizando x e y como coordenadas generalizadas. Resolver las últimas y describir el movimiento.

13.11 ⋆ La forma simple $\mathcal{H} = T + U$ es cierta sólo si las coordenadas generalizadas son «naturales» (la relación entre coordenadas generalizadas y cartesianas es independiente del tiempo). Si las coordenadas generalizadas no son «naturales», se debe usar la definición $\mathcal{H} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$. Para ilustrar este punto, considerar lo siguiente: dos niños están lanzándose una pelota dentro de un vagón de tren que se está moviendo con velocidad variable V por una pista recta horizontal. Como coordenadas generalizadas se pueden usar las de la posición (x, y, z) de la pelota relativa un punto fijo en el vagón, pero al establecer el hamiltoniano se deben usar coordenadas en un sistema inercial (un sistema fijo en el suelo). Encontrar el hamiltoniano para la pelota y mostrar que no es igual a $T + U$ (ni medido en el vagón, ni tampoco medido en el sistema basado en el suelo).

13.12 ⋆ Mismo que el Problema 13.11, pero utilizar el siguiente sistema: una cuenta de collar de masa m está enhebrada en una fina barra recta sin rozamiento, que se apoya en un plano horizontal y está forzada a girar con velocidad angular constante ω alrededor de un eje vertical que pasa por el punto medio de la barra. Encontrar el hamiltoniano para la cuenta y mostrar que no es igual a $T + U$.

13.13 ⋆⋆ Considerar una partícula de masa m ligada a moverse sobre un cilindro sin rozamiento de radio R, dado por la ecuación $\rho = R$ en coordenadas polares cilíndricas (ρ, ϕ, z). La masa está sometida sólo a una fuerza externa, $\mathbf{F} = -kr\hat{\mathbf{r}}$, donde k es una constante positiva, r es su distancia desde el origen, y $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario que apunta hacia fuera desde el origen, como es habitual. Usando z y ϕ como coordenadas generalizadas, encontrar el hamiltoniano $\mathcal{H}$. Escribir y resolver las ecuaciones de Hamilton y describir el movimiento.

13.14 ⋆⋆ Considerar la masa confinada a la superficie de un cono descrita en el Ejemplo 13.4 (pagina 588). Vimos allí que debe haber alturas máximas y mínimas $z_{\text{máx}}$ y $z_{\text{mín}}$, más allá de las cuales la masa no puede estar. Cuando z es un máximo o un mínimo, debe suceder que $\dot{z} = 0$. Mostrar que esto puede pasar si y sólo si el momento conjugado $p_z = 0$, y utilizar la ecuación $\mathcal{H} = E$, donde $\mathcal{H}$ es la función Hamiltoniana (13.33), para mostrar que, para una energía dada E, esto sucede exactamente a dos valores de z. [*Ayuda*: Escribir la función $\mathcal{H}$ para el caso en que $p_z = 0$ y esbozar su comportamiento como una función de z para $0 < z < \infty$. ¿Cuántas veces puede igualar esta función a cualquier energía E?] Usar el dibujo para describir el movimiento de la masa.

13.15 ⋆⋆ Completar los detalles de la deducción de las $2n$ ecuaciones de Hamilton (13.25) para un sistema con n grados de libertad, comenzando en la ecuación (13.24). Se puede utilizar el mismo argumento que nos llevó desde (13.14) hasta (13.15) y (16), pero tenemos $2n$ derivadas distintas a considerar y muchas sumas desde $i = 1$ hasta n de las que tenemos que ocuparnos.

13.16 ⋆⋆ Partiendo de la expresión (13.24) para el hamiltoniano, probar que $\partial\mathcal{H}/\partial t = -\partial\mathcal{L}/\partial t$. [*Ayuda*: Considerar primero un sistema con un grado de libertad, para el cual (13.24) se simplifica a $\mathcal{H}(q,p,t) = p\,\dot{q}(q,p,t) - \mathcal{L}(q,\dot{q}(q,p,t),t)$].

13.17 ⋆⋆⋆ Considerar la masa confinada a moverse en la superficie de un cono descrita en el Ejemplo 13.4 (página 588). Vimos que existen soluciones para las cuales la masa permanece a la altura fija $z = z_0$, con velocidad angular fija $\dot{\phi}_0$ por ejemplo. **(a)** Para cualquier valor elegido de p_ϕ, utilizar (13.34) para obtener una ecuación que proporciona el valor correspondiente de la altura z_0. **(b)** Usar las ecuaciones del movimiento para mostrar que este movimiento es estable. Esto es, mostrar que la órbita tiene $z = z_0 + \epsilon$ con ϵ pequeño, entonces ϵ oscilará alrededor de cero. **(c)** Mostrar que la frecuencia angular de estas oscilaciones es $\omega = \sqrt{3}\,\dot{\phi}_0 \operatorname{sen}\alpha$, donde α es el ángulo mitad del cono ($\operatorname{tg}\alpha = c$ donde c es la constante en $\rho = cz$). **(d)** Encontrar el ángulo α para el cual la frecuencia de oscilación ω es igual a la velocidad angular orbital $\dot{\phi}_0$, y describir el movimiento para este caso.

13.18 ⋆⋆⋆ Todos los ejemplos vistos en este capítulo y todos los problemas (excepto éste) manejan fuerzas que vienen de una energía potencial $U(\mathbf{r})$ [o también ocasionalmente $U(\mathbf{r},t)$]. Sin embargo, la prueba de las ecuaciones de Hamilton dada en la Sección 13.3 se aplica a cualquier sistema para el que las ecuaciones de Lagrange se cumplan, y esto puede incluir fuerzas que no son derivables de una energía potencial. Un ejemplo importante de tales fuerzas es la fuerza magnética sobre una partícula cargada. **(a)** Usar el lagrangiano (7.103) para mostrar que el hamiltoniano para una carga q en un campo electromagnético es

$$\mathcal{H} = (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2/(2m) + qV.$$

(Este hamiltoniano juega un papel importante en la mecánica cuántica de las partículas cargadas). **(b)** Mostrar que las ecuaciones de Hamilton son equivalentes a la conocida ecuación de la fuerza de Lorentz $m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

Sección 13.4 Coordenadas ignorables

13.19 ⋆ En el Ejemplo 13.3 (página 586) vimos que si escribimos el hamiltoniano para un problema de fuerza central en dos dimensiones en términos de las coordenadas polares r y ϕ, entonces la coordenada ϕ es ignorable. Escribir el hamiltoniano para el mismo problema, pero utilizando coordenadas rectangulares x, y. Mostrar que, con esta elección, ninguna coordenada es ignorable. [La enseñanza de esto es que la elección de coordenadas generalizadas requiere siempre un poco de atención. Más concretamente, se deben buscar todas las simetrías que pueda presentar el sistema y elegir coordenadas generalizadas para aprovecharse de ellas].

13.20 ⋆ Considerar una masa que se mueve en dos dimensiones, sometida a una única fuerza $\mathbf{F}$ que es independiente de $\mathbf{r}$ y t. **(a)** Encontrar la energía potencial $U(\mathbf{r})$ y el hamiltoniano $\mathcal{H}$. **(b)** Mostrar que si se usan coordenadas rectangulares x, y con el eje x en la dirección de $\mathbf{F}$, entonces y es ignorable. **(c)** Mostrar que si se utilizan coordenadas rectangulares x, y con ninguno de los ejes en la dirección de $\mathbf{F}$, entonces ninguna coordenada es ignorable. (Enseñanza: ¡Escoger las coordenadas generalizadas con mucho cuidado!).

13.21 ⋆⋆ Dos masas m_1 y m_2 están unidas por un muelle sin masa (constante de fuerza k y longitud natural l_0) y están limitadas a moverse en un plano horizontal, con CM y posiciones relativas $\mathbf{R}$ y $\mathbf{r}$ como se definen en la Sección 8.2. **(a)** Escribir el hamiltoniano $\mathcal{H}$ usando como coordenadas generalizadas X, Y, r, ϕ, donde (X, Y) son las componentes rectangulares de $\mathbf{R}$, y (r, ϕ) son las coordenadas polares de $\mathbf{r}$. ¿Qué coordenadas son ignorables y cuáles no? Explicarlo. **(b)** Escribir las 8 ecuaciones del movimiento de Hamilton. **(c)** Resolver las r ecuaciones para el caso especial

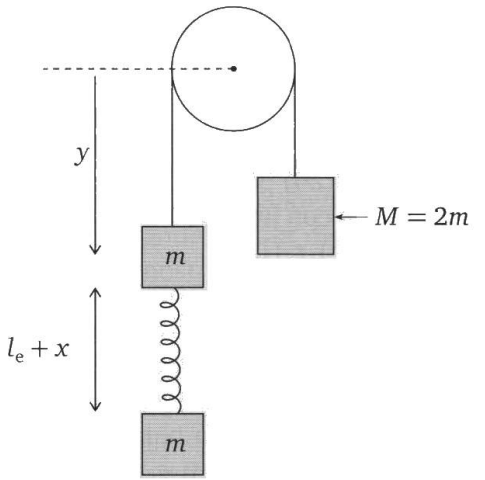


Figura 13.11. Problema 13.23.

en que $p_\phi = 0$ y describir el movimiento. **(d)** Describir el movimiento para el caso en que $p_\phi \neq 0$ y explicar físicamente por qué la ecuación r es más difícil de resolver en este caso.

13.22 ⋆⋆ En el formalismo lagrangiano, una coordenada q_i es ignorable si $\partial\mathcal{L}/\partial q_i = 0$; esto es, si $\mathcal{L}$ es independiente de q_i. Esto garantiza que el momento p_i es constante. En la formulación hamiltoniana, decimos que q_i es ignorable si $\mathcal{H}$ es independiente de q_i, y esto garantiza que p_i es constante. Estas dos condiciones deben ser la misma, porque el resultado «p_i = cte» es el mismo de cualquiera de las dos maneras. Probar directamente que esto es así, como sigue: **(a)** Para un sistema con un grado de libertad, probar que $\partial\mathcal{H}/\partial q = -\partial\mathcal{L}/\partial q$ comenzando desde la expresión (13.14) para el hamiltoniano. Esto establece que $\partial\mathcal{H}/\partial q = 0$ si y sólo si $\partial\mathcal{L}/\partial q = 0$. **(b)** Para un sistema con n grados de libertad, probar que $\partial\mathcal{H}/\partial q_i = -\partial\mathcal{L}/\partial q_i$ comenzando desde la expresión (13.24).

13.23 ⋆⋆⋆ Considerar la máquina de Atwood modificada mostrada en la Figura 13.11. Los dos pesos de la izquierda tienen masas iguales m y están conectados por un muelle sin masa de constante de fuerza k. El peso de la derecha tiene masa $M = 2m$, y la polea no tiene masa ni rozamiento. La coordenada x es la extensión del muelle desde su longitud de equilibrio; esto es, la longitud del muelle es $l_e + x$ donde l_e es la longitud de equilibrio (con todos los pesos en posición y M mantenida estacionaria). **(a)** Mostrar que la energía potencial total (la del muelle más la gravitatoria) es simplemente $U = \frac{1}{2}kx^2$ (más una constante que podemos tomar como cero). **(b)** Encontrar los dos momentos conjugados de x e y. Resolver para $\dot{x}$ e $\dot{y}$, y escribir el hamiltoniano. Mostrar que la coordenada y es ignorable. **(c)** Escribir las cuatro ecuaciones de Hamilton y resolver para las siguientes condiciones iniciales: Se sujeta la masa M fija con el sistema completo en equilibrio $y = y_0$. Todavía manteniendo M fija, se tira de la masa más baja m hacia abajo una distancia x_0, y en $t = 0$ se dejan ir ambas masas. [*Ayuda*: Escribir los valores iniciales de x, y y sus momentos. Se pueden resolver las ecuaciones en x combinándolas en una ecuación de segundo orden para x. Una vez que se conoce $x(t)$, se pueden escribir rápidamente las otras tres variables]. Describir el movimiento. En particular, hallar la frecuencia a la que oscila x.

Sección 13.5 Ecuaciones de Lagrange frente a ecuaciones de Hamilton

13.24 ⋆ He aquí un ejemplo sencillo de una transformación canónica que ilustra cómo el formalismo hamiltoniano permite mezclar las q's y las p's. Considerar un sistema con un grado de libertad y hamiltoniano $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p)$. Las ecuaciones del movimiento son, por supuesto, las ecuaciones habituales de Hamilton $\dot{q} = \partial\mathcal{H}/\partial p$ y $\dot{p} = -\partial\mathcal{H}/\partial q$. Ahora consideremos nuevas coordenadas en el espacio de fases definidas como $Q = p$ y $P = -q$. Mostrar que las ecuaciones del movimiento para las nuevas coordenadas Q y P son $\dot{Q} = \partial\mathcal{H}/\partial P$ y $\dot{P} = -\partial\mathcal{H}/\partial Q$; es decir, el formalismo hamiltoniano se aplica igualmente a la nueva elección de coordenadas en la que hemos intercambiado los papeles de la posición y el momento.

13.25 ⋆ ⋆ ⋆ He aquí otro ejemplo de transformación canónica, que es aún demasiado sencillo para tener alguna utilidad real, pero que sin embargo ilustra la potencia de estos cambios de coordenadas. **(a)** Considerar un sistema con un grado de libertad y hamiltoniano $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q,p)$ y un nuevo par de coordenadas Q y P definidas de modo que

$$q = \sqrt{2P}\,\mathrm{sen}\,Q \qquad \text{y} \qquad p = \sqrt{2P}\cos Q. \tag{13.62}$$

Probar que si $\partial\mathcal{H}/\partial q = -\dot{p}$ y $\partial\mathcal{H}/\partial p = \dot{q}$, se sigue automáticamente que $\partial\mathcal{H}/\partial Q = -\dot{P}$ y $\partial\mathcal{H}/\partial P = \dot{Q}$. En otras palabras, el formalismo hamiltoniano aplica igual de bien a las nuevas coordenadas que a las viejas. **(b)** Mostrar que el hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional con masa $m = 1$ y constante de fuerza $k = 1$ es $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$. **(c)** Mostrar que si se reescribe este hamiltoniano en términos de las coordenadas Q y P definidas en (13.62), entonces Q es ignorable. [El cambio de coordenadas (13.62) estaba elegido astutamente para producir este elegante resultado]. ¿Qué es P? **(d)** Resolver la ecuación de Q para $Q(t)$ y verificar que, cuando se reescribe para q, la solución presenta el comportamiento esperado.

Sección 13.6 Órbitas en el espacio de fases

13.26 ⋆ Encontrar el hamiltoniano $\mathcal{H}$ para una masa m confinada en el eje x y sometida a una fuerza $F_x = -kx^3$ donde $k > 0$. Esbozar y describir las órbitas en el espacio de fases.

13.27 ⋆ ⋆ La Figura 13.6 muestra algunas órbitas en el espacio de fases para una masa en caída libre. Los puntos A_0, B_0, C_0, D_0 representan cuatro posibles estados iniciales distintos en el instante 0, y A, B, C, D son los estados correspondientes en instantes posteriores. Escribir la posición $x(t)$ y el momento $p(t)$ como funciones de t y usar éstas para demostrar que $ABCD$ es un paralelogramo con área igual a la del rectángulo $A_0B_0C_0D_0$. [Este es un ejemplo del Teorema de Liouville].

13.28 ⋆ ⋆ Considerar una masa m confinada en el eje x y sometida a una fuerza $F_x = kx$ donde $k > 0$. **(a)** Escribir y esbozar la energía potencial $U(x)$ y describir los posibles movimientos de la masa. (Distinguir entre los casos en que $E > 0$ y $E < 0$). **(b)** Escribir el hamiltoniano $\mathcal{H}(x,p)$, y describir las posibles órbitas del espacio de fases para los dos casos $E > 0$ y $E < 0$. (Recordar que la función $\mathcal{H}(x,p)$ debe igualar a la energía constante E). Explicar las respuestas a la parte (b) en términos de aquellas a la parte (a).

Sección 13.7 Teorema de Liouville*

13.29 ⋆ La Figura 13.10 muestra un volumen inicialmente esférico que se contrae en un elipsoide debido al flujo laminar (13.57). Hacer un dibujo parecido para un volumen que es inicialmente esférico y está centrado en el origen.

13.30 ⋆ La Figura 13.9 muestra un fluido en el que el flujo es en todas partes hacia fuera (al menos para todos los puntos sobre la superficie S mostrada). Esto significa que todas las contribuciones a la variación δV en volumen son positivas, y V esta definitivamente aumentando. Dibujar la imagen correspondiente para el caso en que el flujo es hacia fuera en la parte superior de S y hacia dentro en la parte inferior. Explicar claramente por qué las contribuciones $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,\delta t\,dA$ a la variación en V de la parte de abajo de S son *negativas*, y por tanto que δV puede ser de cualquiera de los dos signos, dependiendo de si las contribuciones positivas superan a las negativas o al contrario.

13.31 ⋆ Evaluar la divergencia tridimensional $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}$ para cada uno de los siguientes vectores: **(a)** $\mathbf{v} = k\mathbf{r}$, **(b)** $\mathbf{v} = k(z,x,y)$, **(c)** $\mathbf{v} = k(z,y,x)$, **(d)** $\mathbf{v} = k(x,y,-2z)$, donde $\mathbf{r} = (x,y,z)$ es el vector de posición habitual y k es una constante.

13.32 ⋆ ⋆ Evaluar la divergencia tridimensional $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}$ para cada uno de los siguientes vectores: **(a)** $\mathbf{v} = k\hat{\mathbf{x}}$, **(b)** $\mathbf{v} = kx\hat{\mathbf{x}}$, **(c)** $\mathbf{v} = ky\hat{\mathbf{x}}$. Sabemos que $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}$ representa el flujo neto hacia fuera asociado con $\mathbf{v}$. En aquellos casos en los que se encontró $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}$, hacer un esquema sencillo para ilustrar que el flujo hacia fuera es cero; en aquellos casos en los que se encontró $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, hacer un esquema para mostrar por qué y en qué casos el flujo es positivo o negativo.

13.33 ⋆ ⋆ El teorema de la divergencia es un resultado notable, que relaciona la integral de *superficie* que proporciona el flujo de $\mathbf{v}$ fuera de una superficie cerrada S con la integral de *volumen* de

$\nabla\cdot\mathbf{v}$. A veces estas dos integrales son fáciles de integrar, y es posible comprobar la validez del teorema. Más a menudo, una de las integrales es mucho más fácil de realizar que la otra, y el teorema de la divergencia proporciona entonces una manera ingeniosa de evaluar una integral difícil. Los siguientes ejercicios ilustran estas dos situaciones. **(a)** Sea $\mathbf{v} = k\mathbf{r}$, donde k es una constante y sea S una esfera de radio R centrada en el origen. Evaluar el primer miembro del teorema de la divergencia (13.56) (la integral de superficie). Después calcular $\nabla\cdot\mathbf{v}$ y usar éste para evaluar el segundo miembro de (13.56) (la integral de volumen). Mostrar que las dos concuerdan. **(b)** Ahora utilizar la misma velocidad $\mathbf{v}$, pero para S una esfera *no* centrada en el origen. Explicar por qué la integral de superficie es ahora difícil de evaluar directamente, pero no hacerlo realmente. En lugar de ello, encontrar su valor haciendo la integral de volumen. (Esta segunda ruta no debería ser más difícil que antes).

13.34 ⋆⋆ **(a)** Evaluar $\nabla\cdot\mathbf{v}$ para $\mathbf{v} = k\hat{\mathbf{r}}/r^2$ usando coordenadas rectangulares. (Advertir que $\hat{\mathbf{r}}/r^2 = \mathbf{r}/r^3$). **(b)** Dentro de la contracubierta final del libro se encontrarán expresiones para los diferentes operadores vectoriales (divergencia, gradiente, etc.) en coordenadas polares. Utilizar la expresión para la divergencia en coordenadas polares esféricas para confirmar la respuesta a la parte (a). (Tomar $r \neq 0$).

13.35 ⋆⋆ Un haz de partículas se está moviendo por un tubo de aceleración en la dirección z. Las partículas están uniformemente distribuidas en un volumen cilíndrico de longitud L_0 (en la dirección z) y radio R_0. Las partículas tienen momentos uniformemente distribuidos con p_z en un intervalo $p_0 \pm \Delta p_z$ y el momento transversal $p_\perp$ dentro de un círculo de radio $\Delta p_\perp$. Para aumentar la densidad espacial de las partículas, el haz se enfoca mediante campos eléctricos y magnéticos, de manera que el radio disminuye a un valor R menor. ¿Qué nos dice el teorema de Liouville sobre el aumento en el momento transversal $p_\perp$ y el comportamiento resultante del radio R? (Suponer que el enfoque no afecta ni a L_0 ni a Δp_z).

13.36 ⋆⋆ Demostrar el teorema de Liouville en el espacio de fases $2n$-dimensional de un sistema con n grados de libertad. Se puede seguir de cerca el argumento sobre las Ecuaciones (13.60) y (13.61). La única diferencia es que ahora la velocidad de fases $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{z}}$ es un vector $2n$-dimensional y $\nabla\cdot\mathbf{v}$ es una divergencia $2n$-dimensional.

13.37 ⋆⋆⋆ La prueba general del teorema de la divergencia

$$\int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,dA = \int_V \nabla\cdot\mathbf{v}\,dV \tag{13.63}$$

es bastante complicada y no especialmente ilustrativa. Sin embargo, existen unos pocos casos especiales en los que es razonablemente sencilla y bastante instructiva. He aquí uno de ellos: considerar una región rectangular limitada por los seis planos $x = X$ y $X + A$, $y = Y$ y $Y + B$, y $z = Z$ y $Z + C$, con volumen total $V = ABC$. La superficie S de esta región se compone de seis rectángulos que podemos llamar S_1 (en el plano $x = X$), S_2 (en el plano $x = X + A$), y así sucesivamente. La integral de superficie a la izquierda de (13.63) es entonces la suma de seis integrales, una para cada uno de los rectángulos S_1, S_2, etcétera. **(a)** Considerar las primeras de estas integrales y mostrar que

$$\int_{S_1} \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,dA + \int_{S_2} \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,dA = \int_Y^{Y+B} dy \int_Z^{Z+C} dz\ [v_x(X+A,y,z) - v_x(X,y,z)].$$

(b) Mostrar que el integrando de la derecha se puede reescribir como una integral de $\partial v_x/\partial x$ para x yendo desde $x = X$ hasta $x = X + A$. **(c)** Sustituir el resultado de la parte (b) en la parte (a), y escribir los resultados correspondientes para los dos pares de caras restantes. Sumar estos resultados para demostrar el teorema de la divergencia (13.63).

CAPÍTULO 14

Teoría de colisiones

El *experimento de colisión*, o *experimento de dispersión* (*scattering*, en inglés), constituye la herramienta más poderosa para investigar la estructura de los objetos atómicos y subatómicos. En este tipo de experimentos se lanza un haz de proyectiles, tales como electrones y protones, sobre un objeto que hace de blanco (un átomo o un núcleo atómico, por ejemplo) y, observando la distribución de los proyectiles «dispersados» o «desviados» cuando salen de la colisión, es posible obtener información sobre el blanco y sus interacciones con el proyectil. Quizá el experimento de colisiones más famoso fue el que condujo al descubrimiento por Ernest Rutherford (1871–1937) de la estructura del átomo: Rutherford y sus ayudantes lanzaron haces de partículas α (los núcleos cargados positivamente de átomos de helio) sobre una fina capa de átomos de oro en forma de lámina. Midiendo la distribución de las partículas α dispersadas, fueron capaces de deducir que la mayor parte de la masa de un átomo está concentrada en un «núcleo» diminuto, cargado positivamente en el centro del átomo. Desde aquel tiempo, la mayoría de los descubrimientos en física atómica y subatómica (los descubrimientos del neutrón, de la fisión y la fusión nucleares, de los quarks, y muchos más) se llevaron a cabo con la ayuda de los experimentos de colisiones, en los cuales un haz de proyectiles era dirigido hacia un blanco conveniente y se monitorizaban cuidadosamente las partículas emergentes.

Es posible imaginar experimentos de colisión con objetos más grandes (la colisión de una bola de billar con otra, o incluso de un cometa con el Sol) pero en estos casos hay normalmente formas más fáciles de estudiar el blanco. De este modo la mejor aplicación de la teoría de colisiones es la que se presenta a nivel atómico y subatómico. Puesto que la mecánica correcta para los sistemas atómicos y subatómicos es la mecánica cuántica, esto significa que la forma más ampliamente utilizada de la teoría de colisiones es la *teoría cuántica de colisiones*. Sin embargo, muchas de las

ideas centrales de la teoría cuántica de colisiones (secciones eficaces diferenciales de dispersión, sistemas de referencia laboratorio y CM) ya aparecen en la teoría clásica, la cual proporciona una introducción excelente a estas ideas sin las complicaciones de la teoría cuántica. Este es, entonces, el propósito principal de este capítulo: introducir las ideas principales de la teoría de colisiones en el contexto de la mecánica clásica.

La razón principal por la que la teoría de colisiones tiene una estructura más bien complicada es que en las escalas atómica y subatómica no es posible seguir de ninguna manera la órbita detallada del proyectil cuando interacciona con el blanco. Como veremos, esto significa que podemos aprender muy poco observando un único proyectil. Sin embargo, si lanzamos muchos proyectiles, podemos observar cuántos de ellos se dispersan en direcciones diferentes, y podemos aprender mucho de ello. Es precisamente para manejar la distribución estadística de los muchos proyectiles dispersados para lo que tenemos que introducir la idea de la *sección eficaz de colisión*, que es el concepto central de la teoría clásica y cuántica de colisiones,[1] y constituyen el tema principal de este capítulo.

14.1 Ángulo de dispersión y parámetro de impacto

Antes de introducir el concepto central de sección eficaz de dispersión, es conveniente introducir otros dos parámetros importantes, el *ángulo de dispersión* y el *parámetro de impacto*. Y antes de hacerlo, es bueno tener en mente un par de experimentos sencillos de colisiones. Todos los experimentos de colisiones comienzan con un proyectil que se aproxima a un blanco desde tan lejos que se mueve esencialmente libremente y su energía es puramente cinética. En la Figura 14.1, un blanco fijo ejerce una fuerza sobre el proyectil, y, a medida que este se acerca al blanco, la órbita se curva, de tal manera que el proyectil es «dispersado» o «desviado» y se aleja en una dirección diferente. Un ejemplo de este tipo de colisión es el famoso experimento de Rutherford, en el cual el proyectil y el blanco eran dos partículas cargadas positivamente y la fuerza que causaba la dispersión era la repulsión de Coulomb entre ellas. En la Figura 14.2, el blanco es una esfera rígida, que ejerce una fuerza sobre el proyectil sólo cuando

[1] La mecánica cuántica es una teoría intrínsecamente estadística, que trata con *probabilidades* más que con resultados predecibles definidos. Por consiguiente, en mecánica cuántica la necesidad de analizar la distribución de las diferentes direcciones de dispersión está allí desde el principio, a diferencia de la mecánica clásica, en donde la misma necesidad aparece sólo ante la imposibilidad práctica de observar la órbita detallada de un proyectil. No obstante, las herramientas necesarias para abordar el problema (principalmente la idea de la sección eficaz de colisión) son muy similares en las dos teorías.

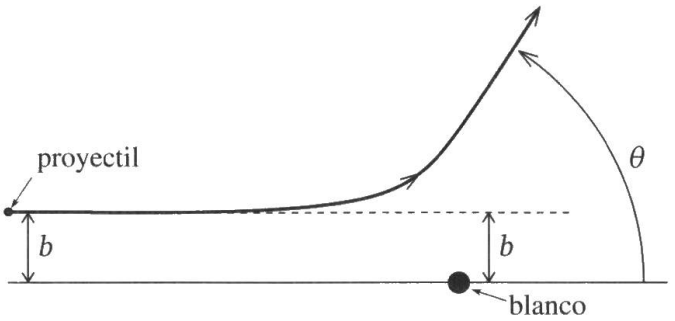


Figura 14.1. En este experimento de colisión el proyectil se aproxima desde la izquierda moviéndose como una partícula libre. Cuando comienza a notar el campo de fuerza del blanco, su órbita se curva y se aleja en una dirección diferente. El ángulo de dispersión θ es el ángulo entre las direcciones de los vectores velocidad inicial y final. El parámetro de impacto b es la distancia perpendicular desde la órbita de entrada en línea recta hasta un eje paralelo que pasa por el centro del blanco.

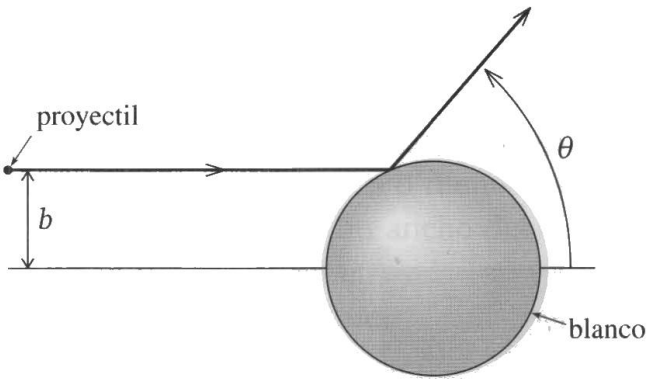


Figura 14.2. Experimento de dispersión en el cual el proyectil y el blanco interaccionan sólo mediante una fuerza de contacto, de tal manera que el proyectil es desviado sólo cuando realmente golpea el blanco y rebota en él. La colisión ocurre sólo si el parámetro de impacto b es menor que el radio del blanco.

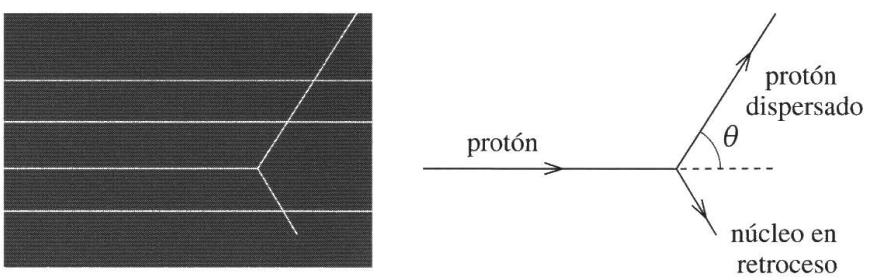
entran en contacto (una *fuerza de contacto*); por consiguiente, el proyectil viaja siguiendo una línea recta hasta que da en el blanco (si lo hace) y después rebota y se aleja en una dirección diferente. Un ejemplo típico de este tipo de sucesos es la colisión de dos bolas de billar (aunque en este caso el proyectil y el blanco serían del mismo tamaño).

Con estos dos experimentos en mente, podemos definir ahora los dos primeros parámetros claves de la teoría de colisiones. El **ángulo de dispersión** θ se define como el ángulo entre las velocidades de entrada y de salida del proyectil, como se indica en las Figuras 14.1 y 14.2. En ausencia de ningún blanco, el ángulo de dispersión sería, por supuesto, cero. Por consiguiente $\theta = 0$ corresponde a *no dispersión;* por ejemplo, en la Figura 14.2 el proyectil podría no acertar en el blanco

completamente y entonces θ sería cero. El valor máximo posible es $\theta = \pi$; en la Figura 14.2 correspondería a una colisión frontal, en la que el proyectil viniese a lo largo del eje del blanco y rebotase justo en sentido opuesto, siendo $\theta = \pi$.

El **parámetro de impacto** b se define como la distancia perpendicular desde la trayectoria de entrada en línea recta del proyectil, hasta un eje paralelo que pasa por el centro del blanco, como se muestra a la izquierda en ambas figuras. Una segunda manera de pensar en el parámetro de impacto se ilustra en la parte derecha de la Figura 14.1: se puede pensar en b como la distancia que *correspondería* a máxima aproximación si no actuaran fuerzas sobre el proyectil, de manera que la órbita fuera sólo una línea recta. En otras palabras, el parámetro de impacto nos dice cómo de cerca fue *dirigido* el proyectil hacia el blanco. Si el parámetro de impacto es muy grande, entonces el proyectil difícilmente tocará el blanco, y θ sería pequeño. De hecho, en la Figura 14.2, θ sería precisamente cero para cualquier valor de b mayor que el radio del blanco. En el otro extremo, el valor $b = 0$ implicaría una colisión frontal, que muchas veces[2] corresponde a $\theta = \pi$. Es razonablemente claro de las Figuras 14.1 y 14.2 que para un valor dado de b habrá un único valor correspondiente de θ, y nos encontraremos, de hecho, con que la principal tarea teórica en la teoría de colisiones clásica es hallar la relación funcional $\theta = \theta(b)$ entre estas dos variables.

En física atómica y subatómica (donde la teoría de colisiones tiene su mayor aplicación), el estatus *experimental* del ángulo de dispersión es totalmente diferente del



(a) (b)

Figura 14.3. (a) En una cámara de niebla, cualquier partícula que se mueva deja una estela visible que se puede fotografiar para un análisis posterior. Aquí cuatro protones han entrado en la cámara desde la izquierda, tres de los cuales pasan rectos sin desviarse. El cuarto se desvía al golpear un núcleo de nitrógeno y abandona la cámara cerca de la parte superior derecha. El núcleo retrocede y se puede ver su movimiento hacia abajo y hacia la derecha. **(b)** Trazado de las estelas involucradas en la colisión.

[2] En los dos ejemplos considerados (el experimento de Rutherford y la dispersión por una esfera rígida) $b = 0$ implica ciertamente que $\theta = \pi$. Por otro lado, si la fuerza entre el proyectil y el blanco es de atracción, entonces un proyectil con $b = 0$ chocaría con el blanco, y, dependiendo de la naturaleza del blanco, podría no aparecer nunca más, o podría abrirse camino directamente a través del obstáculo y emerger con $\theta = 0$.

correspondiente al parámetro de impacto: el ángulo de dispersión θ se mide bastante más fácilmente, mientras que el parámetro de impacto nunca puede ser medido directamente. Vamos a estudiar estos dos aspectos de uno en uno. Existen muchas maneras de medir el ángulo de dispersión, una de las más evidentes se ilustra en la Figura 14.3. Podría representar la colisión de un protón con un núcleo de nitrógeno fotografiada en una cámara de niebla. Estas partículas son por supuesto demasiado pequeñas como para ser fotografiadas directamente, pero la cámara de niebla es uno de los diferentes dispositivos que nos permite registrar la *trayectoria* de una partícula que se mueve (incluso cuando la partícula es demasiado pequeña para ser vista por sí misma). Una partícula cargada que en la cámara de niebla se mueve a través de una nube de vapor de agua supersaturado, ioniza algunos de los átomos por los que pasa, y estos átomos ionizados hacen que algo del vapor de agua se condense, creando una estela visible, parecida a la estela de vapor que deja en el cielo un avión. En la Figura 14.3 se puede ver claramente la estela del protón incidente. Inicialmente el núcleo es invisible, porque no se está moviendo; sin embargo, cuando el protón lo golpea, la trayectoria del protón cambia abruptamente, y el núcleo retrocede dejando su propia estela. Mediante imágenes como esta se puede medir fácilmente el ángulo de dispersión.

Por otro lado, el parámetro de impacto nunca se puede medir directamente. El problema es que los parámetros de impacto de interés tienen dimensiones atómicas o subatómicas (alrededor de 0,1 nanómetros o menos). Una estela de una cámara de niebla como la de la Figura 14.3 tiene un ancho del orden de 1 milímetro, unos 10 millones de veces mayor que los parámetros de impacto de interés. Obviamente, medidas directas con significado del parámetro de impacto no se pueden obtener. Como veremos en la siguiente sección, es la imposibilidad de medir el parámetro de impacto lo que nos lleva a la noción de sección eficaz de colisión.

14.2 Sección eficaz de colisión

Imaginemos primero que vamos a observar una única colisión como la que se muestra en la Figura 14.3. Si conociéramos el parámetro de impacto, entonces podríamos obviamente deducir algo sobre el tamaño del blanco o la magnitud y el alcance de la fuerza que ejerce sobre el proyectil. Pero dado que *no* conocemos el parámetro de impacto, podemos aprender bastante poco de un suceso simple como este; de hecho, casi la única cosa que podemos concluir de este único suceso es que *existe* algún tipo de obstáculo en la trayectoria del proyectil. Por otro lado, si podemos observar muchas colisiones diferentes de proyectiles y blancos similares, entonces podemos comenzar a investigar la naturaleza del proyectil y del blanco y sus interacciones. Para explorar esta importante idea, consideraré varios ejemplos sencillos.

Consideremos primero un experimento como el de la Figura 14.2, en el que un proyectil de tamaño despreciable incide sobre una esfera rígida de radio R, con la que interacciona sólo por contacto. Si el proyectil da en el blanco, rebotará en él y saldrá en una dirección distinta; si el proyectil no da en él, pasará en línea recta sin desviarse. Cuando se observa experimentalmente, la colisión ilustrada en la Figura 14.2 será algo *parecida* a la Figura 14.3, y la observación de un suceso como ese nos informa sólo de que el blanco esta ahí.

Supongamos no obstante que pudiéramos repetir el mismo experimento muchas veces. En la práctica esto se acomete de dos maneras: en lugar de disponer de un único blanco, tenemos muchos blancos en un único conjunto de blancos (por ejemplo, muchos átomos de oro en una lámina de oro o muchos átomos de helio en un depósito de gas helio). Y, en vez de disparar un único proyectil, disparamos un haz completo de proyectiles. Para empezar, consideremos un único proyectil que pasa a través de un conjunto de esferas rígidas que hacen de blancos. «Visto» desde el proyectil incidente, el conjunto de blancos tiene el aspecto que se muestra en la Figura 14.4. Como no conocemos la línea de aproximación precisa del proyectil, no podemos decir si dará en uno de los blancos o no. Sin embargo, podemos calcular la *probabilidad* de que acierte en alguno, como sigue: si los blancos estan colocados al azar y son suficientemente numerosos,[3] podemos definir la **densidad de blancos** n_{blanco} como el número de blancos por área, vistos desde la dirección incidente. Si A es el área total del conjunto de blancos, entonces el número total de blancos es $n_{\text{blanco}}A$. Después, podemos denotar por $\sigma = \pi R^2$ el área de la sección de choque, o simplemente **sección eficaz** de cada blanco (visto de frente), así que el área total de todos los blancos es $n_{\text{blanco}}A\sigma$. Por tanto, la probabilidad de que algún proyectil acierte cuando pasa a través del conjunto siguiendo una trayectoria aleatoria es la razón

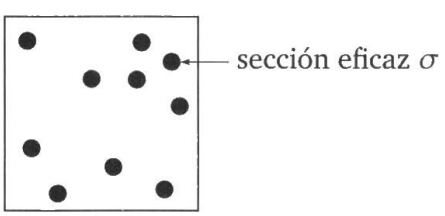


Figura 14.4. Un conjunto de blancos con varios blancos esféricos rígidos, visto de frente por el proyectil incidente. La sección eficaz σ es el área de cualquier blanco, perpendicular a la dirección incidente. La densidad del blanco n_{blanco} es la densidad (número/área) de blancos vista desde la dirección incidente, como aquí.

[3] Es importante tener muchos blancos para aplicar consideraciones estadísticas. Por otro lado, los blancos no deben ser *demasiado* numerosos, o algunos pueden quedar escondidos a la «sombra» de otros, y el proyectil puede chocar con varios de ellos. Fue para evitar colisiones múltiples por lo que Rutherford utilizó una lámina *delgada* en su famoso experimento.

$$\begin{pmatrix}\text{probabilidad}\\ \text{de colisión}\end{pmatrix} = \frac{\text{área ocupada por los blancos}}{\text{área total}} = \frac{n_{\text{blanco}} A\sigma}{A} = n_{\text{blanco}}\sigma. \quad (14.1)$$

Si enviamos ahora un haz que contiene un número grande (llamémosle N_{inc}) de proyectiles incidentes, entonces el número real de proyectiles dispersado (N_{disp}) debería ser el producto de la probabilidad (14.1) y N_{inc}:

$$N_{\text{disp}} = N_{\text{inc}}\, n_{\text{blanco}}\, \sigma \quad (14.2)$$

Esta es la relación básica de la teoría de colisiones. Como podemos medir los números N_{disp} y N_{inc} y la densidad de blancos n_{blanco}, la ecuación (14.2) nos permite hallar el tamaño (o sección eficaz) σ del blanco. En lo que sigue, veremos que la noción de sección eficaz se generaliza considerablemente y puede hacerse bastante complicada, pero la idea esencial es siempre la misma: contando el número de dispersiones (o reacciones, o absorciones, u otros procesos) que resultan de un número grande de colisiónes similares, se puede usar el análogo de (14.2) para hallar el parámetro σ, que es siempre el *área efectiva del blanco para interaccionar con el proyectil.*

Ejemplo 14.1 *Cazando cuervos sobre un roble*

Un cazador observa que 50 cuervos se posan aleatoriamente sobre un roble, donde ya no puede verlos. Cada cuervo tiene una sección eficaz $\sigma \approx \frac{1}{2}$ pies^2, y el roble tiene un área total (vista desde la posición del cazador) de 150 pies cuadrados. Si el cazador dispara 60 balas al azar hacia el árbol, ¿a cuántos cuervos esperaría acertar?

Esta situación se parece mucho a nuestro sencillo experimento de dispersión. La densidad del blanco es n_{blanco} = (número de cuervos)/(área del árbol) = 50/150 = 1/3 pies^{-2}. El número de proyectiles incidentes es $N_{\text{inc}} = 60$, así que, por el análogo de (14.2), el número esperado de aciertos es

$$N_{\text{aciertos}} = N_{\text{inc}}\, n_{\text{blanco}}\, \sigma = 60 \times \left(\tfrac{1}{3}\ \text{pies}^{-2}\right) \times \left(\tfrac{1}{2}\ \text{pies}^2\right) = 10.$$

En la práctica, normalmente se utiliza un flujo continuo de proyectiles, y puede ser más conveniente dividir el *número* incidente N_{inc} por el tiempo Δt, para obtener la *tasa* incidente $R_{\text{inc}} = N_{\text{inc}}/\Delta t$. Análogamente, la tasa de dispersión es $R_{\text{disp}} = N_{\text{disp}}/\Delta t$. Dividiendo ambos miembros de (14.2) por Δt, obtenemos la relación completamente equivalente

$$R_{\text{disp}} = R_{\text{inc}}\, n_{\text{blanco}}\, \sigma$$

para estas tasas.

Como la sección eficaz σ es un área, la unidad del SI para la sección eficaz es, por supuesto, el metro cuadrado. Las secciones eficaces atómicas y subatómicas son inconvenientemente pequeñas cuando se miden en metros cuadrados. En particular, las dimensiones nucleares típicas rondan los 10^{-14} m, así que las secciones eficaces nucleares se miden convenientemente en unidades de 10^{-28} m^2. Este área ha venido a llamarse un **barn** (viene de la palabra inglesa «barn», como en «it's as big as a barn», que podría traducirse como: «es tan grande como un granero»),

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2.$$

Ejemplo 14.2 *Dispersión de neutrones por una lámina de aluminio*

Si se lanzan 10 000 neutrones a través de una lámina de aluminio de 0,1 mm de espesor y la sección eficaz del núcleo de aluminio es de unos 1,5 barn,[4] ¿cuántos neutrones serán dispersados? (Gravedad específica del aluminio = 2,7).

El número de dispersiones está dado por (14.2), y ya sabemos que $N_{\text{inc}} = 10^4$ y $\sigma = 1{,}5 \times 10^{-28}$ m^2. De este modo todo lo que necesitamos hallar es la densidad de blancos n_{blanco}, el número de núcleos de aluminio por área de la lámina. (Por supuesto, la lámina contiene montones de electrones atómicos también, pero éstos no contribuyen apreciablemente a la dispersión de neutrones). La densidad del aluminio (masa/volumen) es $\rho = 2{,}7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, y si la multiplicamos por el grosor de la lámina ($t = 10^{-4}$ m), obtendremos la masa por área de lámina, que dividiéndola por la masa de un núcleo de aluminio ($m = 27$ unidades de masa atómica) nos dará n_{blanco}:

$$n_{\text{blanco}} = \frac{\rho t}{m} = \frac{(2{,}7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) \times (10^{-4} \text{ m})}{27 \times 1{,}66 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 6{,}0 \times 10^{24} \text{ m}^{-2}. \qquad (14.3)$$

Sustituyendo en (14.2) encontramos para el número de dispersiones

$$N_{\text{disp}} = N_{\text{inc}}\, n_{\text{blanco}}\, \sigma = (10^4) \times (6{,}0 \times 10^{24} \text{ m}^{-2}) \times (1{,}5 \times 10^{-28} \text{ m}^2) = 900.$$

Aquí hemos utilizado la sección eficaz σ dada para predecir el número N_{disp} de dispersiones que deberíamos observar. Alternativamente, podríamos haber utilizado el valor observado de N_{disp} para *hallar* la sección eficaz σ.

[4] Como veremos en breve, la sección eficaz de un blanco puede ser diferente para diferentes proyectiles. Por consiguiente, estrictamente hablando, debería decirse que la sección eficaz del aluminio *para dispersar neutrones* está en torno a 1,5 barn. Más aún, la sección eficaz puede depender de la energía de los proyectiles; el número dado aquí es válido para energías desde cerca de 0,1 eV hasta unos 1000 eV.

14.3 Generalizaciones de la sección eficaz

La relación (14.2), con sus muchas generalizaciones, es la relación fundamental de la teoría de colisiones. Los teóricos calculan la sección eficaz σ usando modelos supuestos de blanco, y los experimentadores usan entonces (14.2) para medir σ y compararla con el valor predicho. Sin embargo, el proyectil y el blanco, así como sus interacciones, son generalmente mucho más complicados que el sencillo proyectil puntual y el blanco de esfera rígida que hemos utilizado en la última sección; en la siguiente veremos algunos casos un poco más interesantes.

Dispersión de dos esferas rígidas

Imaginemos un blanco que es una esfera rígida de radio R_2 y un proyectil que es otra esfera rígida de radio R_1, como se muestra en la Figura 14.5. Las dos esferas entran en contacto si y sólo si el parámetro de impacto b es menor o igual que la *suma* de los dos radios, $b \leq R_1 + R_2$; esto es, el centro del proyectil debe estar dentro de un círculo centrado en el blanco con radio $R_1 + R_2$ y área $\sigma = \pi(R_1 + R_2)^2$. Podemos ahora utilizar exactamente el mismo argumento que en la última sección, encontrando la probabilidad de que cualquier proyectil sea dispersado, y después el número total de proyectiles dispersados. La única diferencia es que el área de blanco $\sigma = \pi R^2$ se debe sustituir ahora por $\sigma = \pi(R_1 + R_2)^2$. De este modo llegamos a la misma conclusión

$$N_{\text{disp}} = N_{\text{inc}}\, n_{\text{blanco}}\, \sigma \tag{14.4}$$

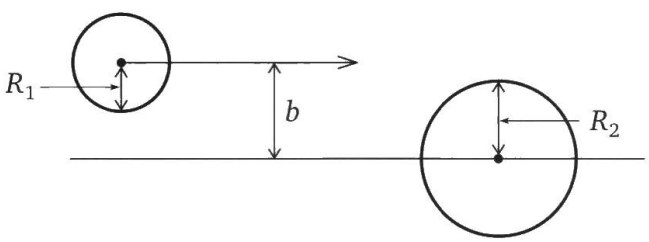


Figura 14.5. Un proyectil en forma de esfera rígida de radio R_1 se aproxima a un blanco en forma de esfera rígida de radio R_2, con parámetro de impacto b. La colisión ocurre sólo si $b \leq R_1 + R_2$.

excepto que ahora

$$\sigma = \pi(R_1 + R_2)^2. \tag{14.5}$$

La principal conclusión de este ejemplo es que podemos continuar usando la relación de siempre (14.4), pero no se debe ver ya σ como la sección eficaz de blanco. Más bien, σ es una propiedad del blanco *y* del proyectil, y debería pensarse en ella como el *área efectiva del primero para dispersar al segundo*. En particular, la sección eficaz de un blanco particular para dispersar un tipo de proyectil puede ser muy diferente de la del mismo blanco con un proyectil diferente.

Ejemplo 14.3 *Camino libre medio de una molécula de aire*

Las moléculas de N_2 y O_2 del aire que nos rodea se comportan en muchos sentidos como esferas rígidas de radio $R \approx 0{,}15$ nm. Usar este dato para estimar el camino libre medio de una molécula de aire en condiciones normales de presión y temperatura.

El camino libre medio λ de una molécula en un gas es un parámetro importante que determina varias propiedades del gas (la conductividad, la viscosidad y las tasas de difusión, por ejemplo). Se define como el promedio de las distancias que una molécula recorre entre colisiones con otras moléculas. Para estimar este recorrido, sigamos a una molécula escogida cuando se mueve a través del gas, comenzando inmediatamente después de una colisión. Para simplificar nuestra discusión, supondré que todas las demás moléculas están estacionarias. (Esta simplificación cambia la respuesta un poco, pero aún así tendremos una estimación razonable). Podemos pensar en nuestra molécula elegida como un proyectil que se mueve a través de un conjunto de blancos formado por todas las demás moléculas estacionarias, y el problema es encontrar la distancia media x que viajará antes de colisionar. La sección eficaz de las colisiones está dada por (14.5) como $\sigma = \pi(2R)^2 = 4\pi R^2$. Si imaginamos primero una porción delgada del gas con espesor dx (en la dirección de la velocidad del proyectil), entonces la densidad del «blanco» de esta porción es

$$n_{\text{blanco}} = \frac{N}{V}dx$$

donde N es el número total de moléculas y V su volumen total, así que N/V es la densidad numérica (número/volumen). Por consiguiente la probabilidad de que nuestra molécula efectúe una colisión en alguna porción delgada de espesor dx está dada por (14.1) como

$$\text{prob(colisión en } dx) = \frac{N\sigma}{V}dx. \tag{14.6}$$

Denotemos por prob(x) la probabilidad de que el proyectil viaje una distancia x sin chocar. La probabilidad de que viaje una distancia x sin colisionar y después *colisione* en el próximo dx es el producto de prob(x) y (14.6):

$$\text{prob(primera colisión entre } x \text{ y } x+dx) = \text{prob}(x) \cdot \frac{N\sigma}{V}dx. \tag{14.7}$$

Por otro lado, esta misma probabilidad es simplemente

$$\begin{aligned}\text{prob(primera colisión entre } x \text{ y } x+dx) &= \text{prob}(x) - \text{prob}(x+dx) \\ &= -\frac{d}{dx}\text{prob}(x)\,dx. \end{aligned} \tag{14.8}$$

Comparando (14.7) con (14.8) obtenemos una ecuación diferencial para prob(x):

$$\frac{d}{dx}\text{prob}(x) = -\frac{N\sigma}{V}\,\text{prob}(x),$$

de la cual vemos que prob(x) decrece exponencialmente con x,

$$\text{prob}(x) = e^{-(N\sigma/V)x}. \tag{14.9}$$

[Aquí he utilizado la condición inicial de que prob(0) es obviamente 1]. El camino libre medio es el valor promedio de x (esto es, $\lambda = \langle x \rangle$), y, para hallar este promedio, debemos multiplicar x por la probabilidad (14.8) e integrar para todos los valores posibles de x:

$$\lambda = \langle x \rangle = \int_0^\infty x \left[\frac{N\sigma}{V} e^{-(N\sigma/V)x}\right] dx = \frac{V}{N\sigma}. \tag{14.10}$$

En condiciones normales sabemos que 22,4 litros de aire contienen el número de Avogadro de moléculas (un mol). Por tanto

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{V}{N_A(4\pi R^2)} = \frac{22{,}4 \times 10^{-3}\,\text{m}^3}{(6{,}02 \times 10^{23}) \times 4\pi(0{,}15 \times 10^{-9}\,\text{m})^2} \\ &= 1{,}3 \times 10^{-7}\,\text{m} = 130\,\text{nm}.\end{aligned}$$

Vemos que el camino libre medio de una molécula de aire es considerablemente mayor que el espaciado intermolecular (alrededor de 3 nm) y es mucho mayor que el tamaño molecular (alrededor de 0,3 nm).

Diferentes procesos y blancos

Hasta ahora hemos considerado colisiones en las que lo máximo que puede pasar es que el proyectil sea desviado por el blanco y salga con una dirección diferente. Existen algunas otras posibilidades: consideremos una colisión entre un proyectil puntual y un blanco consistente en una pelota de masilla. Si la masilla es suficientemente absorbente, entonces cualquier proyectil que incida penetrará dentro de ella y nunca saldrá de nuevo. Es decir, el blanco *capturará*, o *absorberá*, al proyectil. El argumento anterior proporcionaría entonces justamente el número de proyectiles capturados de la forma $N_{\text{cap}} = N_{\text{inc}}\, n_{\text{blanco}}\, \sigma$. Podemos abordar fácilmente temas más complicados. Por ejemplo, parte de la superficie del blanco podría ser absorbente y parte rígida. Los proyectiles que dieran en la superficie absorbente serían capturados y aquellos que dieran en la parte rígida serían dispersados (es decir, emergerían de nuevo viajando en una dirección diferente). En este caso, tendríamos dos relaciones distintas análogas a (14.4), una que da el número de capturas y la segunda para el número de dispersiones:

$$N_{\text{cap}} = N_{\text{inc}}\, n_{\text{blanco}}\, \sigma_{\text{cap}} \qquad \text{[captura]} \tag{14.11}$$

y

$$N_{\text{disp}} = N_{\text{inc}}\, n_{\text{blanco}}\, \sigma_{\text{disp}} \qquad \text{[dispersión]}. \tag{14.12}$$

Aquí σ_{cap} es el área de aquella parte del blanco que absorbe al proyectil y σ_{disp} el área de la parte que lo dispersa. La sección eficaz total del blanco es, por supuesto,

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{cap}} + \sigma_{\text{disp}}.$$

Un ejemplo de una colisión real en la que captura y dispersión son posibles es la colisión entre un electrón y un átomo, tal como el cloro, que puede capturar un electrón extra. En este caso, ya no podemos identificar un área particular del blanco que capturará el proyectil, pero todavía será cierto que el número de proyectiles capturados es proporcional a N_{inc}, el número de proyectiles incidentes, y a n_{blanco}, la densidad del blanco. De este modo podemos utilizar la misma ecuación exacta (14.11) para definir la **sección eficaz de captura** σ_{cap} como la constante relevante de proporcionalidad. Con esta definición se puede (o se debería poder) ver σ_{cap} como el *área efectiva del blanco para capturar al proyectil*. De la misma manera, podemos usar (14.12) para definir la **sección eficaz de dispersión** σ_{disp} y entonces ver σ_{disp} como el área efectiva del blanco para dispersar al proyectil.

En colisiones de electrones y átomos hay otras posibilidades además de la dispersión y captura. Por ejemplo, si el electrón incidente tiene energía suficiente, puede ser capaz de *ionizar* el átomo, golpeando uno o más de los electrones atómicos libres. El número de ionizaciones se puede escribir como

$$N_{\text{ion}} = N_{\text{inc}}\, n_{\text{blanco}}\, \sigma_{\text{ion}} \qquad \text{[ionización]} \tag{14.13}$$

y esto define la **sección eficaz de ionización** σ_{ion} como el área efectiva del átomo blanco para la ionización por el electrón incidente. Una vez más, cuando un neutrón choca con un núcleo de ^{235}U, puede provocar la *fisión* del núcleo, dividiéndose en dos partes mucho más pequeñas y liberando unos 200 MeV de energía cinética, y se puede definir la **sección eficaz de fisión** σ_{fis} como el área efectiva de un núcleo de ^{235}U para la fisión por bombardeo neutrónico, cumpliendo la ecuación $N_{\text{fis}} = N_{\text{inc}}\, n_{\text{blanco}}\, \sigma_{\text{fis}}$.

Existe otra clasificación más que merece mención. La palabra «dispersión» se reserva generalmente para procesos en los cuales el proyectil es desviado y se aleja, dejando detrás el *mismo* blanco (el mismo átomo, el mismo núcleo, o lo que sea). Este uso excluye procesos como la captura, en la que el proyectil no emerge de la colisión en absoluto. También excluye procesos como la ionización, en la que un electrón es expulsado del átomo blanco, o como la fisión, en la cual el núcleo blanco se rompe en trozos más pequeños. Si los movimientos internos del blanco permanecen invariables, se dice que la dispersión es **elástica**; si los movimientos internos

del blanco cambian por la colisión, entonces la dispersión se denomina **inelástica**. Consideremos, por ejemplo, la dispersión de un electrón por un átomo estacionario. Para simplificar la discusión, supongamos que el átomo está fijo (una excelente aproximación, porque el átomo es mucho más pesado que un electrón) y que los electrones atómicos están inicialmente en su **estado fundamental** (el nivel de energía más bajo posible[5] y el estado más estable del átomo). Cuando el electrón incidente se dispersa del átomo, hay dos posibilidades: o bien el electrón puede dispersarse elásticamente, saliendo con su energía cinética inalterada y dejando el blanco en su estado original de movimiento interno, o bien puede dispersarse inelásticamente, cediendo parte de su energía al átomo y aumentando el movimiento interno del átomo a un nivel de energía superior.[6] Este último proceso de **excitación atómica** fue observado por primera vez por los físicos alemanes James Franck (1882–1964) y Gustav Hertz (1887–1975) y proporcionó una evidencia convincente de la existencia de niveles de energía atómicos (y ganaron el Premio Nobel de 1925).

Cuando un proyectil es dispersado por un blanco, podemos distinguir, si lo deseamos, entre los dos tipos de procesos: elástico e inelástico. El número total de dispersiones N_{disp} en un experimento dado es la suma de las dispersiones elásticas e inelásticas, $N_{\text{disp}} = N_{\text{el}} + N_{\text{inel}}$, y podemos definir las secciones eficaces correspondientes, que cumplen $\sigma_{\text{disp}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}}$.

Para un blanco dado y un proyectil dado, podemos enumerar todos los posibles resultados de una colisión (dispersión, captura, ionización, fisión, y así sucesivamente) y podemos definir para cada resultado la correspondiente sección eficaz. La suma de todas estas secciones eficaces parciales se denomina **sección eficaz total** σ_{tot}. Por ejemplo, para electrones que chocan con un átomo, puede ser que sólo existan tres resultados posibles, dispersión, captura o ionización; en este caso, la sección eficaz total sería

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{disp}} + \sigma_{\text{cap}} + \sigma_{\text{ion}}.$$

Añadiendo las tres ecuaciones (14.12), (14.11) y (14.13), podemos ver que la sección eficaz total da el número total de proyectiles sustraídos del haz incidente por los tres procesos posibles:

$$N_{\text{tot}} = N_{\text{inc}}\, n_{\text{blanco}}\, \sigma_{\text{tot}} \qquad [\text{total}].$$

---

[5] Recuerde que los átomos pueden existir sólo en ciertos «niveles de energía» discretos. Como un átomo aislado finalmente encuentra su manera de llegar nivel de energía más bajo (estado fundamental), el átomo blanco en una colisión está más frecuentemente en su estado fundamental.

[6] En general, tanto el proyectil como el blanco se pueden mover, y ambos pueden tener estructura interna y por tanto energía de movimiento interno (como en la colisión de dos moléculas en un gas). En este caso, una dispersión elástica se define como aquella en la que los movimientos internos de proyectil y blanco no cambian. Esto significa que las energías cinéticas totales $T_{\text{proy}} + T_{\text{blanco}}$ son las mismas antes y después del choque.

Esto es, σ_{tot} es el área efectiva del blanco para interaccionar con el proyectil de cualquiera de las maneras posibles.

En la mayoría de los casos, las diferentes secciones eficaces que hemos definido varían con la energía del proyectil incidente. Para ver un ejemplo que se entiende fácilmente, consideremos la sección eficaz de ionización para un electrón que choca con un átomo. Para ionizar el átomo, el electrón incidente debe transportar la mínima energía necesaria para expulsar uno de los electrones atómicos libres. Si la energía del electrón incidente es menor que esta **energía de ionización**, la ionización es imposible; por tanto, $N_{\text{ion}} = 0$, y la sección eficaz de ionización σ_{ion} definida por (14.13) es exactamente cero. Por encima de la energía de ionización, la ionización es posible y tanto N_{ion} como σ_{ion} son normalmente distintos de cero. Obviamente σ_{ion} varía con la energía. Aunque no es siempre obvio, vemos en la práctica que casi todas las secciones eficaces dependen también de la energía.

14.4 Sección eficaz diferencial de dispersión

En la definición de la sección eficaz σ_{disp} de (14.12) contamos el número total de proyectiles que eran dispersados, sin importar la dirección concreta en la que salían. Obviamente podemos obtener más información si decidimos monitorizar estas direcciones también, y esto nos lleva a la noción de *sección eficaz diferencial*, como discutiremos ahora.

Para simplificar, consideremos una colisión en la que la única interacción posible es la dispersión elástica. Por ejemplo, podríamos considerar la dispersión de un proyectil puntual por una esfera rígida (Figura 14.2) o la dispersión de Rutherford de una partícula alfa cargada positivamente por un núcleo pesado positivo (Figura 14.1). En cualquiera de los dos casos, existen sólo dos posibilidades: o bien el proyectil falla el blanco completamente y sale sin dispersión, o bien es dispersado elásticamente.[7]

[7] Si la partícula alfa del experimento de Rutherford tenía suficiente energía, podría también haber elevado el núcleo a un nivel de energía superior o romperlo. Sin embargo, a las energías bajas con las que podía trabajar Rutherford, esta no era una posibilidad, y centraremos nuestra atención en estas energías bajas por ahora. Hay otra sutileza en la dispersión de Rutherford que posiblemente valga la pena mencionar: la fuerza de Coulomb $F = kqQ/r^2$ de un núcleo verdaderamente aislado se extendería todo el camino hasta infinito, y todas las partículas alfa, por grande que fuera su parámetro de impacto, serían dispersadas muy ligeramente; en otras palabras, *todas* las partículas alfa incidentes serían dispersadas. En la práctica, sin embargo, la fuerza de Coulomb del núcleo es siempre apantallada a distancias grandes por los electrones atómicos, y aquellas partículas alfa que pasan por fuera del átomo completo no son dispersadas.

Si vamos a monitorizar cuántas partículas salen en una dirección determinada, debemos ponernos de acuerdo en cómo medimos la dirección. Lo habitual es tomar la dirección del haz incidente como eje z, y después especificar la dirección de cualquier proyectil dispersado dando sus ángulos polares θ y ϕ. Como estos ángulos forman un continuo infinito, no podemos hablar del número de partículas dispersadas en la dirección *exacta* (θ, ϕ). Más bien debemos contar el número de partículas que salen en algún cono estrecho alrededor de (θ, ϕ). Para caracterizar el tamaño de este cono estrecho, usamos la noción de *ángulo sólido*, que se define como sigue:

Ángulo sólido

Para entender la definición de ángulo sólido de un cono es conveniente recordar la definición del ángulo ordinario entre dos rectas en un plano. Esta definición se ilustra en la Figura 14.6(a): si las dos rectas se encuentran en O, dibujamos una circunferencia de un radio conveniente r centrado en O. Las dos rectas definen un arco de longitud s sobre la circunferencia y definimos el ángulo $\Delta\theta$ (en radianes) como $\Delta\theta = s/r$. (Como s es proporcional a r, esta definición es independiente de nuestra elección de r). Análogamente, si un cono tridimensional tiene su vértice en O, dibujamos una esfera de radio r centrada en O como en la Figura 14.6(b). El cono interseca a la esfera en una superficie esférica de área A (proporcional a r^2), y definimos el **ángulo sólido** del cono como

$$\Delta\Omega = A/r^2. \tag{14.14}$$

La unidad de ángulo sólido definido de esta manera se denomina **estereorradián**, abreviado **sr**. Si el cono incluye todas las direcciones posibles, entonces como el área

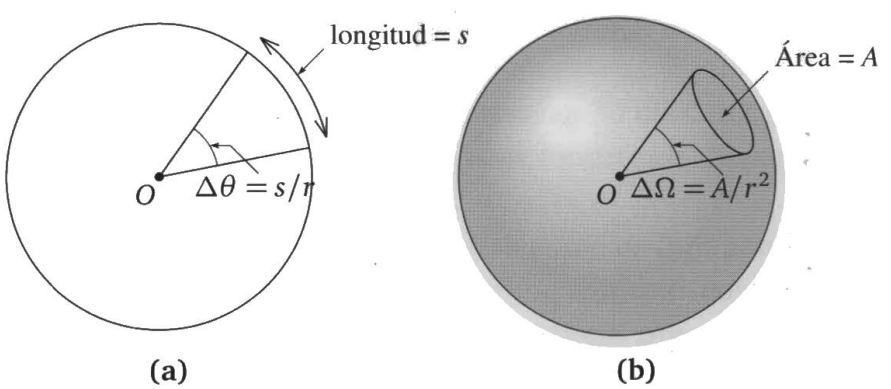


Figura 14.6. **(a)** El ángulo ordinario en dos dimensiones $\Delta\theta$ subtendido por un arco de longitud s de una circunferencia se define como $\Delta\theta = s/r$ donde r es el radio de la circunferencia y $\Delta\theta$ está en radianes. **(b)** El ángulo sólido $\Delta\Omega$ de un cono originado por un área A sobre una esfera se define como $\Delta\Omega = A/r^2$. Aquí r es el radio de la esfera y $\Delta\Omega$ está en estereorradianes.

de toda la esfera es $4\pi r^2$, el ángulo sólido es 4π. Es decir, el ángulo sólido correspondiente a todas las direcciones posibles en tres dimensiones es 4π estereorradianes, igual que el ángulo ordinario correspondiente a todas las direcciones en dos dimensiones es 2π radianes. El cono en la Figura 14.6(b) era un cono circular, pero la definición $\Delta\Omega = A/r^2$ funciona igualmente para cualquier forma de cono. Por ejemplo, necesitaremos considerar el cono estrecho con ángulos polares en los rangos θ a $\theta + d\theta$ y ϕ a $\phi + d\phi$; este cono interseca la esfera en una superficie «rectangular» de área $r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$, y así tiene ángulo sólido

$$d\Omega = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi. \tag{14.15}$$

Sección eficaz diferencial

Armados con la noción de ángulo sólido, estamos preparados para definir la sección eficaz diferencial de dispersión. Imaginamos nuestro típico experimento, en el cual un número grande N_{inc} de proyectiles se dirigen al conjunto de blancos de densidad n_{blanco}. Para un cono dado de ángulo sólido $d\Omega$ en una dirección dada (θ, ϕ), analizamos ahora el número de proyectiles dispersados en este $d\Omega$, como se esboza en la Figura 14.7. Denotamos este número por N_{disp} (dentro de $d\Omega$), y, por el argumento de siempre debe ser proporcional a N_{inc} y a n_{blanco}, así que se puede escribir como

$$N_{\text{disp}}\,(\text{dentro de } d\Omega) = N_{\text{inc}}\, n_{\text{blanco}}\, d\sigma(\text{dentro de } d\Omega) \tag{14.16}$$

donde $d\sigma$(dentro de $d\Omega$) es el área efectiva de blanco para la dispersión en el ángulo sólido $d\Omega$. Como ésta es proporcional a $d\Omega$, es tradicional reescribirla como

$$d\sigma(\text{dentro de } d\Omega) = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

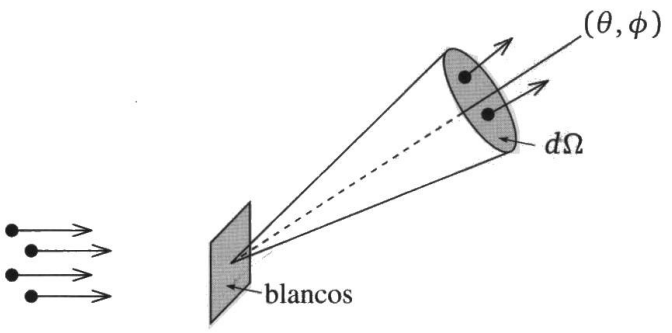


Figura 14.7. Proyectiles inciden por la izquierda sobre un dispositivo de blanco rectangular, y analizamos el número N_{disp} (dentro de $d\Omega$) que salen en un cono de ángulo sólido $d\Omega$ en la dirección (θ, ϕ).

donde el factor $d\sigma/d\Omega$ se denomina **sección eficaz diferencial de dispersión**. En términos de ella, podemos reescribir (14.16) como

$$N_{\text{disp}}(\text{dentro de } d\Omega) = N_{\text{inc}}\, n_{\text{blanco}} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\phi)\, d\Omega \qquad (14.17)$$

donde he añadido el argumento (θ,ϕ) para enfatizar que la sección eficaz diferencial dependerá (en general) de la dirección de observación. La Ecuación (14.17) se puede tomar como la definición de sección eficaz diferencial $d\sigma/d\Omega$. Es tarea del experimentador medir $d\sigma/d\Omega$ usando (14.17), y es tarea del teórico predecir $d\sigma/d\Omega$ basándose en algún modelo hipotético para las interacciones entre proyectil y blanco.

Si sumamos los números $N_{\text{disp}}(\text{dentro de } d\Omega)$ para todos los posibles ángulos sólidos $d\Omega$ obtendremos el número total de dispersiones, N_{disp}. Es decir, la integración de (14.17) a todos los ángulos sólidos nos dará N_{disp}. Como $N_{\text{disp}} = N_{\text{inc}} n_{\text{blanco}} \sigma$, donde σ es la sección eficaz de dispersión total, concluimos que

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\phi)\, d\Omega = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\phi) \qquad (14.18)$$

donde la segunda se sigue de (14.15). Esto es, la sección eficaz total[8] es la integral sobre todos los ángulos sólidos de la sección eficaz diferencial.

Ejemplo 14.4 *Distribución angular de neutrones dispersados*

A una energía incidente de varios MeV (millones de electrón voltios), la sección eficaz diferencial para la dispersión de neutrones por un núcleo pesado puede tener la forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\phi) = \sigma_0(1 + 3\cos\theta + 3\cos^2\theta) \qquad (14.19)$$

donde σ_0 es una constante que podría estar en torno a 30 milibarn por estereorradián (mb/sr). Describir la distribución angular de los neutrones dispersados y hallar la sección eficaz total de dispersión.

La característica más importante de (14.19) es que es independiente de ϕ. (Como veremos en la siguiente sección, esto es algo bastante común). Esto significa que la distribución de los neutrones dispersados tiene *simetría axial*, lo que hace que la visualización de la distribución angular sea mucho más sencilla, porque sólo nos tenemos que preocupar por su dependencia en θ. La Figura 14.8 muestra

[8] En general, se debería decir la sección eficaz total de *dispersión*, σ_{disp}; aquí estamos suponiendo que la dispersión es la única interacción posible, así que son todas iguales.

$d\sigma/d\Omega$ como una función de θ desde $\theta = 0$ hasta π. Vemos que $d\sigma/d\Omega$ es mayor en $\theta = 0$. Esto es, en este ejemplo al menos, una partícula que es dispersada es más probable que sea dispersada cerca de la «dirección hacia delante» $\theta = 0$. (En la dispersión cuántica, especialmente a energías altas, este es muchas veces el caso). En este ejemplo, hay también un máximo mucho menor en la dirección opuesta $\theta = \pi$, y la probabilidad de dispersión directamente hacia atrás en $\theta = \pi$ es mayor que para cualquier otra dirección en todo el hemisferio opuesto $\pi/2 < \theta < \pi$.

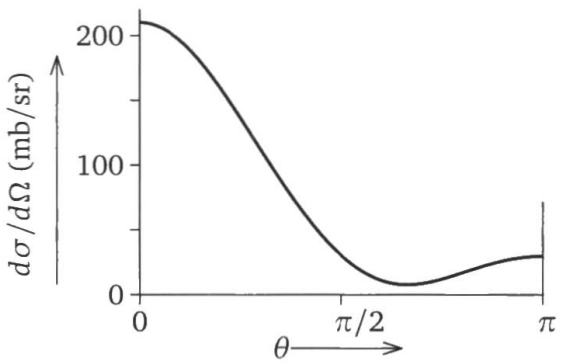


Figura 14.8. La sección eficaz diferencial (14.19) para la dispersión de neutrones por un núcleo, representada como una función del ángulo de dispersión θ. El eje vertical muestra $d\sigma/d\Omega$ en unidades de milibarn por estereorradián.

La sección eficaz total de dispersión se halla integrando la sección eficaz diferencial, como en (14.18). Como el integrando es independiente de ϕ, la integración en ϕ es trivial y origina un factor de 2π, así que

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi)\, d\Omega = 2\pi\sigma_0 \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta (1 + 3\cos\theta + 3\cos^2\theta)$$
$$= 8\pi\sigma_0 = 754 \text{ mb}. \qquad (14.20)$$

14.5 Cálculo de la sección eficaz diferencial

Para simplificar el cálculo de la sección eficaz diferencial, supondré que la dispersión tiene simetría axial. Este es ciertamente el caso si el blanco tiene simetría esférica, (como la esfera rígida de la Figura 14.2 o cualquier blanco que ejerza un campo de fuerza con simetría esférica), porque simetría esférica implica simetría axial. Implica que la sección eficaz diferencial es independiente de ϕ y nos permite incluir al mismo tiempo todos los valores diferentes de ϕ en nuestra discusión. Imaginemos un proyectil que incide sobre un blanco con parámetro de impacto b. Calculando la trayectoria del proyectil, podemos, al menos en un principio, hallar el correspon-

diente ángulo de dispersión $\theta = \theta(b)$ como una función de b. Alternativamente, resolviendo para b, podemos expresar b como una función de θ, esto es, $b = b(\theta)$.

Consideremos ahora todos aquellos proyectiles que se aproximan al blanco con parámetros de impacto entre b y $b + db$. Estos inciden sobre el anillo (la forma de anillo sombreada) mostrado a la izquierda de la Figura 14.9. Este anillo tiene área de paso

$$d\sigma = 2\pi b\, db \tag{14.21}$$

Estas mismas partículas emergen entre los ángulos θ y $\theta + d\theta$ en un ángulo sólido

$$d\Omega = 2\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta, \tag{14.22}$$

como se indica en la Figura 14.9. La sección eficaz diferencial $d\sigma/d\Omega$ se encuentra ahora simplemente dividiendo (14.21) entre (14.22) para obtener

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\operatorname{sen}\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| \tag{14.23}$$

donde he insertado los signos de valor absoluto para asegurar que $d\sigma/d\Omega$ sea positiva. (Debido a que θ muchas veces disminuye cuando b aumenta, $db/d\theta$ puede ser negativo). En resumen: para calcular la sección eficaz diferencial para un proyectil que es dispersado por un blanco dado, primero debemos calcular la trayectoria del proyectil, para encontrar el ángulo de dispersión θ como una función del parámetro de impacto b (o viceversa). Entonces $d\sigma/d\Omega$ se halla simplemente derivando b con respecto a θ, como en (14.23).

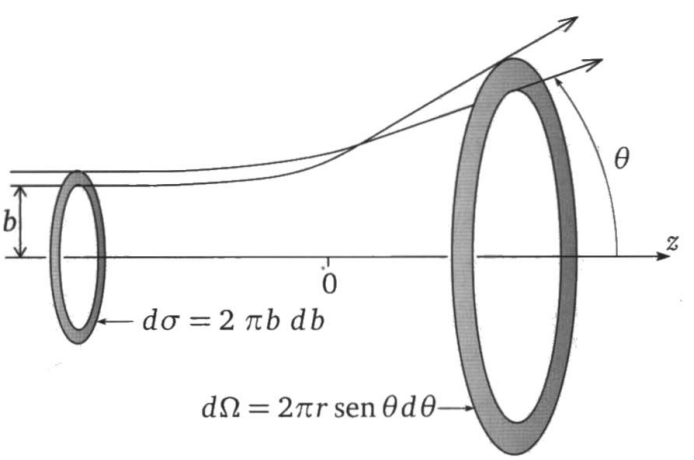


Figura 14.9. Todos los proyectiles incidentes entre b y $b + db$ son dispersados entre ángulos θ y $\theta + d\theta$. El área sobre la que estas partículas inciden es $d\sigma = 2\pi b\, db$, y el ángulo sólido dentro del que se dispersan es $d\Omega = 2\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta$.

Ejemplo 14.5 *Dispersión ante una esfera rígida*

Como un primer ejemplo del uso de (14.23), hallar la sección eficaz diferencial de dispersión de un proyectil puntual por una esfera rígida fija de radio R. Integrar el resultado sobre todos los ángulos sólidos para hallar la sección eficaz total.

Nuestra primera tarea es encontrar la trayectoria del proyectil dispersado, como se muestra en la Figura 14.10. La observación crucial es que cuando el proyectil rebota en la esfera rígida, sus ángulos de incidencia y reflexión (ambos mostrados como α en la imagen) son iguales. (Esta «ley de la reflexión» se deduce de la conservación de la energía y el momento angular (vea el Problema 14.13)). La inspección de la imagen muestra que el parámetro de impacto es $b = R\,\mathrm{sen}\,\alpha$, y el ángulo de dispersión es $\theta = \pi - 2\alpha$. Combinando estas dos ecuaciones encontramos que

$$b = R\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi-\theta}{2} = R\cos(\theta/2), \tag{14.24}$$

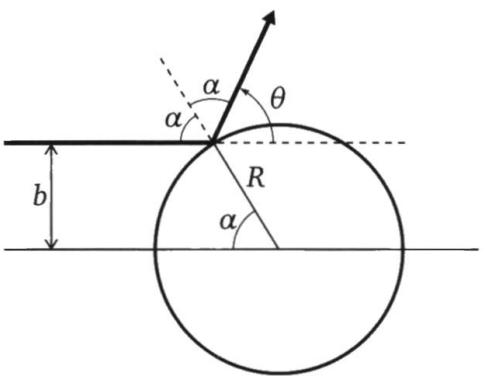


Figura 14.10. Un proyectil puntual que rebota en una esfera rígida fija cumple la ley de la reflexión, que los dos ángulos adyacentes denominados α son iguales. El parámetro de impacto es $b = R\,\mathrm{sen}\,\alpha$, y el ángulo de dispersión es $\theta = \pi - 2\alpha$.

y de (14.23), encontramos la sección eficaz diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\mathrm{sen}\,\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{R\cos(\theta/2)}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{R\,\mathrm{sen}(\theta/2)}{2} = \frac{R^2}{4}. \tag{14.25}$$

La cosa más llamativa de este resultado es que la sección eficaz diferencial es isotrópica; esto es, el número de partículas dispersadas dentro de un ángulo sólido $d\Omega$ es el mismo en todas las direcciones. Para hallar la sección eficaz total, sólo tenemos que integrar este resultado sobre todos los ángulos sólidos:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \int \frac{R^2}{4}d\Omega = \pi R^2,$$

que es, por supuesto, el área de paso de la esfera blanco.

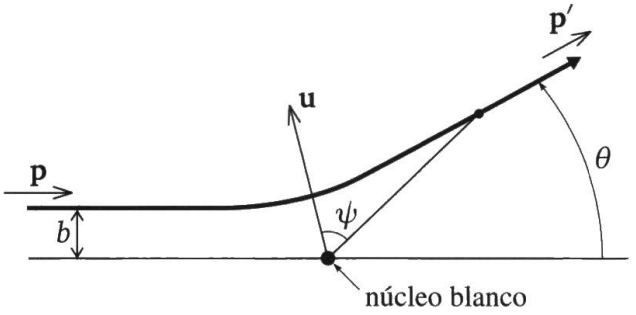


Figura 14.11. La dispersión de Rutherford de una partícula alfa por un núcleo atómico fijo. La órbita es una hipérbola, que es simétrica respecto a la línea denotada por el vector unitario fijo **u**. La posición de la partícula puede ser denotada por su ángulo ψ medido desde **u**. Cuando la partícula se aleja ($t \to \infty$), $\psi \to \psi_0$, y cuando $t \to -\infty$, $\psi \to -\psi_0$. Por lo tanto el ángulo de dispersión es $\theta = \pi - 2\psi_0$.

14.6 Dispersión de Rutherford

Quizá el experimento de colisiones más famoso de todos los tiempos fue el experimento de Rutherford, en el cual él y sus colaboradores observaron la dispersión de partículas alfa por núcleos de oro en una delgada lámina de oro y utilizaron la distribución observada para argumentar el modelo nuclear del átomo. Según este modelo, la fuerza de un núcleo (de carga Q) sobre una alfa (de carga q) es

$$F = \frac{kqQ}{r^2} = \frac{\gamma}{r^2}. \tag{14.26}$$

Las alfas son dispersadas apreciablemente sólo si se aproximan cerca del núcleo, bien dentro de la nube de electrones atómicos orbitales. Por tanto podemos ignorar la fuerza de los últimos, y (14.26) es la única fuerza sobre las alfas. Por ello, como vimos en el Capítulo 8, la órbita de una alfa es una hipérbola, con el núcleo (que trataremos como fijo por el momento) en su foco, como se muestra en la Figura 14.11. Si **u** denota el vector unitario que apunta desde el blanco al punto de las alfas de máxima aproximación, la órbita es simétrica respecto a la dirección de **u**, y es conveniente denotar la posición de la partícula alfa por el ángulo polar ψ, medido desde **u** (vea la Figura 14.11). Llamemos ψ_0 al límite de ψ cuando la alfa dispersada se aleja, de tal manera que el ángulo originado por la órbita de la partícula alfa es $2\psi_0$ y el ángulo de dispersión es

$$\theta = \pi - 2\psi_0. \tag{14.27}$$

Nuestro cometido ahora es relacionar el ángulo de dispersión θ con el parámetro de impacto b. Podemos hacerlo evaluando de dos maneras la variación en el momento del proyectil,

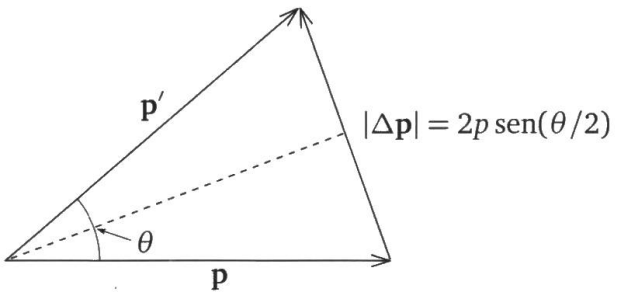


Figura 14.12. La variación en el momento del proyectil es $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$. Puesto que $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$, se ve fácilmente que $|\Delta\mathbf{p}| = 2p\,\text{sen}(\theta/2)$.

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \tag{14.28}$$

donde $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p}'$ son el momento mucho antes y mucho después del encuentro. Primero, por conservación de la energía, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p}'$ tienen magnitudes iguales, así que el triángulo mostrado en la Figura 14.12 es isósceles, y

$$|\Delta\mathbf{p}| = 2p\,\text{sen}(\theta/2). \tag{14.29}$$

Por otro lado, de la segunda ley de Newton, $\Delta\mathbf{p} = \int \mathbf{F}dt$. Comparando las Figuras 14.12 y 14.11, se puede ver que $\Delta\mathbf{p}$ está en la misma dirección que el vector unitario $\mathbf{u}$. Por consiguiente la magnitud de $\Delta\mathbf{p}$ está dada por la misma integral, con $\mathbf{F}$ sustituida por su componente F_u en la dirección de $\mathbf{u}$,

$$|\Delta\mathbf{p}| = \int_{-\infty}^{\infty} F_u\,dt.$$

De la Figura 14.11 se puede ver que $F_u = (\gamma/r^2)\cos\psi$. Usando ahora el familiar truco, podemos escribir $dt = d\psi/\dot{\psi}$, donde, como $mr^2\dot{\psi} = \ell = bp$ (vea la Figura 14.11 de nuevo), podemos sustituir $\dot{\psi}$ por bp/mr^2. Poniendo todo esto junto, encontramos

$$|\Delta\mathbf{p}| = \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \frac{\gamma\cos\psi}{r^2}\frac{d\psi}{bp/mr^2} = \frac{\gamma m}{bp}2\,\text{sen}\,\psi_0 = \frac{2\gamma m}{bp}\cos(\theta/2) \tag{14.30}$$

[Para entender los límites de la integral, recuerde que cuando $t \to \pm\infty$, también $\psi \to \pm\psi_0$. En el último paso he usado (14.27) para sustituir ψ_0 por $(\pi - \theta)/2$ y después $\text{sen}\,\psi_0$ por $\cos(\theta/2)$]. Igualando estas dos expresiones (14.29) y (14.30) para $|\Delta\mathbf{p}|$, podemos despejar b para obtener

$$b = \frac{\gamma m}{p^2}\frac{\cos(\theta/2)}{\text{sen}(\theta/2)} = \frac{\gamma}{mv^2}\cot(\theta/2) \tag{14.31}$$

donde en la última igualdad he sustituido p por mv, y v es la velocidad del proyectil incidente.

Una vez hallado el parámetro de impacto b como una función del ángulo de dispersión θ, podemos utilizar ahora el resultado (14.23) para obtener la sección eficaz diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \cdot b \cdot \left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{1}{2\operatorname{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2)} \cdot \frac{\gamma}{mv^2}\cot(\theta/2) \cdot \frac{\gamma}{mv^2}\frac{1}{2\operatorname{sen}^2(\theta/2)}$$

o, sustituyendo γ por kqQ,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{kqQ}{4E\operatorname{sen}^2(\theta/2)}\right)^2 \qquad (14.32)$$

donde E es la energía de los proyectiles incidentes, $E = \frac{1}{2}mv^2$. Esta es la célebre **fórmula de dispersión de Rutherford**. Proporciona la sección eficaz diferencial de dispersión de una carga q, con energía E, ante un blanco fijo de carga Q. Aunque aún hoy, casi un siglo después de su deducción por Rutherford, es un resultado muy usado, su gran importancia histórica es que fue usado para demostrar la existencia del núcleo atómico, como discutiremos ahora brevemente.[9]

El experimento de Geiger y Marsden

El mejor y más importante experimento de dispersión de Rutherford lo realizaron dos de sus colaboradores, Hans Geiger (inventor del contador Geiger, 1882–1945) y Ernest Marsden (1889–1970), y fue publicado en 1913. Su logro fue probar el modelo «planetario» de Rutherford del átomo, según el cual la mayor parte de la masa atómica está concentrada en un núcleo diminuto, cargado positivamente.[10] Como acabamos de ver, este modelo conduce a la sección eficaz (14.32) de dispersión de partículas alfa, con varias predicciones muy específicas: la probabilidad de dispersión debería ser inversamente proporcional a $\operatorname{sen}^4\theta/2$, inversamente proporcional a la energía al cuadrado E^2 y proporcional a la carga nuclear al cuadrado (Q^2). Geiger y Marsden fueron capaces de verificar todas estas predicciones con una precisión asombrosa, y con ello contribuyeron a la rápida aceptación del átomo nuclear de Rutherford. Utilizaron partículas alfa provenientes del gas radón («ema-

[9] Como el átomo es un sistema microscópico, para el cual la mecánica cuántica, no la clásica, debería usarse, puede ser sorprendente que la fórmula de Rutherford clásica funcionase tan bien para Rutherford y sus colaboradores. Es una de las más increíbles casualidades de la historia de la física que la fórmula cuántica para la dispersión de dos partículas cargadas concuerda exactamente con la formula clásica de Rutherford. (Esto es rotundamente falso para otras fuerzas).

[10] Inicialmente, el signo de la carga nuclear (positivo o negativo) no estaba claro, pero se vio en seguida que era positivo, con una carga negativa igual que transportaban los electrones orbitales.

nación de radio» como se llamaba entonces), con una energía de unos 6,5 MeV. (1 MeV = 10^6 electronvolt, y 1 eV = $1{,}6 \times 10^{-19}$ joules). Dirigieron un «haz» estrecho de estas partículas alfa sobre una lámina de metal delgada y contaron las partículas dispersadas usando una pequeña pantalla de sulfuro de zinc. Cualquier partícula alfa que golpease esta pantalla causaba un diminuto destello de luz (o «scintillation» en inglés), que podía ser observado a través del microscopio. De esta manera, fue posible contar hasta unas 90 partículas alfa por minuto (¡un trabajo que requería gran paciencia y concentración!). Para observar la dependencia angular de la dispersión, podían mover la pantalla y microscopio alrededor de ángulos en el intervalo de $5° \leq \theta \leq 150°$. Para probar la dependencia en la energía incidente, pasaron las partículas incidentes a través de hojas delgadas de mica, para frenarlas y variar de esa manera su energía. Y para probar la dependencia en la carga nuclear, usaron varias láminas delgadas diferentes como blanco (oro, platino, estaño, plata, cobre y aluminio).

Ejemplo 14.6 *Dependencia angular*

Para aislar su dependencia angular, escribir la sección eficaz de Rutherford (14.32) como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{\sigma_0(E)}{\operatorname{sen}^4 \theta/2} \tag{14.33}$$

y hallar $\sigma_0(E)$ para la dispersión de partículas alfa de 6,5 MeV por oro. Hallar la sección eficaz diferencial a 150° y 5° (los ángulos más grandes y más pequeños de Geiger y Marsden). Determinar el número de alfas que tendrían que haber contado en un minuto suponiendo los siguientes valores: número de alfas incidentes en un minuto, $N_{\text{inc}} = 6 \times 10^8$; espesor de la lámina de oro, $t = 1\,\mu$m; área de la pantalla de sulfuro de zinc = 1 mm^2; y distancia de la pantalla al blanco = 1 cm. Hacer una gráfica útil de la sección eficaz diferencial como una función del ángulo de dispersión θ.

La carga de la partícula alfa es $q = 2e$ y la del núcleo de oro es $Q = 79e$, así que

$$\sigma_0(E) = \left(\frac{2 \times 79 \times ke^2}{4E}\right)^2.$$

Esto se evalúa fácilmente en unidades del SI, aunque una manera más ingeniosa es utilizar la útil combinación $ke^2 = 1{,}44$ MeV·fm (donde fm quiere decir femtómetro o 10^{-15} m). De cualquiera de las dos maneras, encontramos que

$$\sigma_0 = 76{,}6 \times 10^{-30} \text{ m}^2/\text{sr} = 0{,}766 \text{ barn/sr}.$$

Sustituyendo en (14.33) obtenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(150°) = 0{,}88 \text{ barn/sr} \quad \text{y} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega}(5°) = 2{,}1 \times 10^5 \text{ barn/sr}. \tag{14.34}$$

La enorme diferencia entre ellas (más de 5 órdenes de magnitud) presenta dificultades prácticas considerables, como veremos. Antes de que podamos sustituir en (14.17) para obtener los números reales contados, necesitamos calcular n_{blanco} y $d\Omega$. Como es habitual, podemos hallar n_{blanco} en términos de la densidad del oro (peso específico 19,3) y su masa atómica (197):

$$n_{\text{blanco}} = \frac{\rho t}{m} = \frac{(19{,}3 \times 10^3\,\text{kg/m}^3) \times (10^{-6}\,\text{m})}{197 \times 1{,}66 \times 10^{-27}\,\text{kg}} = 5{,}90 \times 10^{22}\,\text{m}^{-2}.$$

La pantalla de Geiger y Marsden tenía una área $A = 1$ mm^2 y estaba a una distancia $r = 10$ mm del blanco. Por lo tanto, originaba un ángulo sólido

$$d\Omega = \frac{A}{r^2} = 0{,}01 \text{ sr}.$$

Poniendo todo esto junto, encontramos para el número de alfas que golpean en su pantalla a 150° en un minuto

$$\begin{aligned} N_{\text{disp}}(\text{a } 150°) &= N_{\text{inc}}\, n_{\text{blanco}}\, \frac{d\sigma}{d\Omega}(150°)\, d\Omega \\ &= (6 \times 10^8) \times (5{,}90 \times 10^{22}\,\text{m}^{-2}) \times (0{,}88 \times 10^{-28}\,\text{m}^2/\text{sr}) \times (0{,}01\,\text{sr}) \\ &= 31, \end{aligned}$$

un número que podían contar fácilmente y con presición. Por otro lado, el mismo cálculo origina

$$N_{\text{disp}}(\text{en } 5°) = 7{,}5 \times 10^6,$$

un número que no podían contar de ninguna manera, ni tan siquiera estimar. Obviamente medir la sección eficaz a ángulos pequeños les exigía utilizar una fuente mucho más débil que a ángulos grandes.

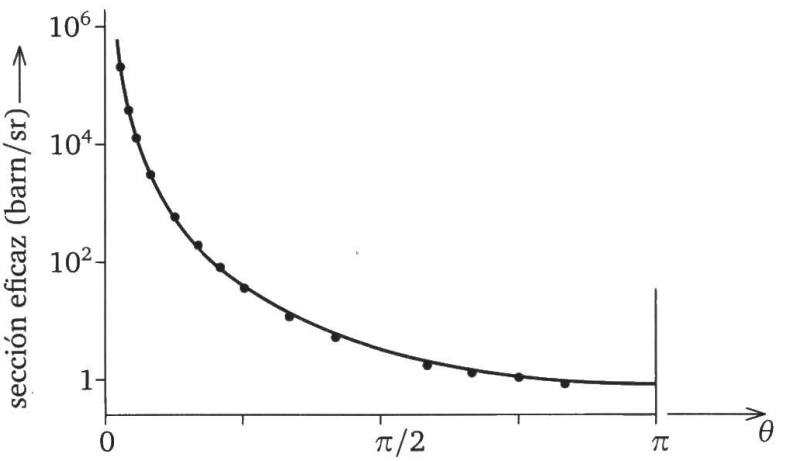


Figura 14.13. Representación semilogarítmica de la sección eficaz diferencial de Rutherford como una función del ángulo θ. Los puntos son las medidas de Geiger y Marsden.

Debido a la enorme variación de la sección eficaz cuando varía el ángulo de dispersión, una representación lineal directa de $d\sigma/d\Omega$ no es especialmente útil. Si elegimos una escala para mostrar los ángulos pequeños, la sección eficaz para ángulos grandes resultará ser cero; si lo arreglamos para mostrar los ángulos grandes, la sección eficaz para ángulos pequeños desaparecerá de la escala. La solución a esto es hacer una gráfica semilogarítmica, es decir, representar el logaritmo de la sección eficaz frente a θ. Esto origina la curva mostrada en la Figura 14.13, donde se puede ver claramente la variación en más de 5 órdenes de magnitud entre 15° y 180°. Los puntos en esta figura son los datos originales de Geiger y Marsden y muestran claramente por qué el modelo de Rutherford del átomo obtuvo tan rápida aceptación.

14.7 Secciones eficaces en sistemas diferentes*

* *Como es habitual, las secciones marcadas con un asterisco se pueden omitir en una primera lectura.*

En su mayor parte, hemos discutido hasta ahora colisiones en las que la partícula blanco está *fija*. Mientras que ésta es una excelente aproximación si el blanco es muy pesado comparado con el proyectil (como en la dispersión de electrones por un átomo, por ejemplo) debemos reconocer que realmente no existe tal cosa como una partícula verdaderamente fija, y debemos aprender a tratar colisiones de dos partículas en las que ambas se pueden mover. Afortunadamente, ya sabemos cómo hacer esto: si observamos el movimiento en el sistema CM (el sistema de referencia en donde el centro de masa está en reposo), entonces el movimiento de la coordenada relativa $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ es precisamente la misma que aquella de una única partícula con masa igual a la masa reducida $\mu = m_1 m_2/M$. De este modo, si vemos la colisión en el sistema CM, entonces nuestro problema se reduce de nuevo al del movimiento de una única «partícula equivalente» en un campo de fuerza fijo. La única dificultad que queda es esta: el sistema CM no suele ser el sistema en el que realizamos los experimentos. Por consiguiente debemos aprender a relacionar las secciones eficaces calculadas en el sistema de referencia CM con sus correspondientes valores en el **sistema del laboratorio**, el sistema del laboratorio en el que se va a realizar el experimento. En particular, vamos a querer hallar la relación entre las secciones eficaces diferenciales $(d\sigma/d\Omega)_{\text{cm}}$ del sistema CM y las correspondientes $(d\sigma/d\Omega)_{\text{lab}}$ medidas en el laboratorio.

Las variables del CM

Antes de abordar el problema de pasar de un sistema a otro, necesito mencionar dos características elegantes más del sistema CM. Primera, recuerde que el lagrangiano

para dos partículas, cuando se escribe en términos del CM y las coordenadas relativas, tiene la forma (8.13)

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r). \tag{14.35}$$

Diferenciando $\mathcal{L}$ con respecto a las tres componentes de $\dot{\mathbf{r}}$, vemos que el momento generalizado correspondiente a $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{r}}. \tag{14.36}$$

Esto es (como probablemente se habría adivinado), el momento para el movimiento relativo es justo aquel de una única partícula de masa μ y velocidad $\dot{\mathbf{r}}$.

La segunda propiedad tiene que ver con los momentos de las dos partículas, medidos en el sistema de referencia CM. Recuerde de (8.9) que

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}. \tag{14.37}$$

Podemos diferenciar estas ecuaciones para obtener las dos velocidades. En particular, en el sistema CM, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$, así que encontramos que $\dot{\mathbf{r}}_1 = (m_2/M)\dot{\mathbf{r}}$. Multiplicando por m_1 hallamos para el momento del proyectil $\mathbf{p}_1 = \mu\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p}$. Es decir, en el sistema CM, el momento del proyectil $\mathbf{p}_1$ es el mismo que el momento $\mathbf{p}$ del movimiento relativo. De la misma manera podemos probar que $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}$, así que

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{r}} \qquad \text{(en el sistema CM)}. \tag{14.38}$$

La primera igualdad aquí confirma que el momento total en el sistema CM es cero. La segunda es útil en la evaluación de secciones eficaces: para medir la sección eficaz diferencial, contamos el número de veces que el proyectil sale con su momento $\mathbf{p}_1$ dentro de algún ángulo sólido $d\Omega$. Como $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}$ (en el sistema CM), ésta es lo mismo que el número de veces que el momento relativo $\mathbf{p}$ sale en $d\Omega$. Por lo tanto podemos encontrar la sección eficaz diferencial en el sistema CM como si una única partícula de masa μ fuera dispersada por un blanco fijo. De este modo, por ejemplo, la fórmula de Rutherford (14.32), para la dispersión de una partícula por un blanco fijo, también da la sección eficaz diferencial de dispersión de dos partículas cargadas en su sistema CM, siempre que cambiemos m por μ.

Relación general entre secciones eficaces en sistemas diferentes

En el sistema CM el proyectil y el blanco se aproximan el uno al otro con momentos iguales y opuestos. En el sistema del laboratorio del experimento de colisión tradicional (como el experimento de Rutherford) el blanco está inicialmente en reposo. En muchos experimentos modernos de haces que chocan tanto el proyectil como el

blanco se están moviendo en sentidos contrarios. En todos estos casos, los momentos iniciales son colineales, y para simplificar restringiré nuestra discusión a este caso.[11]

Para ver cómo se transforma la sección eficaz entre dos sistemas diferentes, sólo tenemos que observar su definición. Comencemos con la sección eficaz total, que fue definida en (14.2) de manera que

$$N_{\text{disp}} = N_{\text{inc}}\, n_{\text{blanco}}\, \sigma.$$

(Continuaremos suponiendo que el único resultado posible de una colisión es la dispersión elástica, así que no tenemos que preocuparnos por otros procesos como la absorción o la ionización). Podemos usar esta misma definición en cualquier sistema. Por consiguiente definimos la sección eficaz total del CM, σ_{cm}, por

$$N^{\text{cm}}_{\text{disp}} = N^{\text{cm}}_{\text{inc}}\, n^{\text{cm}}_{\text{blanco}}\, \sigma_{\text{cm}} \tag{14.39}$$

donde las cuatro cantidades están medidas en el sistema CM. De manera exactamente análoga definimos σ_{lab} por

$$N^{\text{lab}}_{\text{disp}} = N^{\text{lab}}_{\text{inc}}\, n^{\text{lab}}_{\text{blanco}}\, \sigma_{\text{lab}} \tag{14.40}$$

donde todas las cuatro cantidades están medidas en el sistema del laboratorio. Mientras cualquier suceso particular de dispersión puede parecer muy diferente visto desde dos sistemas diferentes, el número total de sucesos debe ser el mismo en cualquier sistema. Por lo tanto,

$$N^{\text{cm}}_{\text{disp}} = N^{\text{lab}}_{\text{disp}}.$$

Del mismo modo, el número de partículas incidentes es el mismo, visto en cualquier sistema, así que $N^{\text{cm}}_{\text{inc}} = N^{\text{lab}}_{\text{inc}}$. La densidad del blanco n_{blanco} es la densidad de las partículas del blanco (número/área) vista desde la dirección incidente, como se ilustra en la Figura 14.4. Como ésta no se ve afectada por ningún movimiento hacia delante (o hacia atrás) del blanco, $n^{\text{cm}}_{\text{blanco}} = n^{\text{lab}}_{\text{blanco}}$. Comparando ahora (14.39) y (14.40), vemos que cada uno de los tres primeros términos de (14.39) es igual que el término correspondiente en (14.40). Por tanto los términos finales deben también ser iguales, y tenemos el resultado elegantemente simple de que las secciones eficaces totales de dispersión en el sistema CM y en el del laboratorio son iguales,

$$\sigma_{\text{cm}} = \sigma_{\text{lab}} \qquad \text{[sección eficaz total de dispersión]}. \tag{14.41}$$

---

[11] Algunos haces que colisionan no son perfectamente colineales. Algunos experimentos en física atómica utilizan haces que intersecan a un ángulo grande, y en las colisiones de moléculas en un gas, las dos partículas se aproximan una a la otra con cualquier ángulo. Aunque tales colisiones oblicuas son difíciles de manejar, aquí consideraré sólo colisiones colineales.

Si otros resultados fueran posibles, tales como la absorción o la ionización, entonces exactamente el mismo argumento conduciría a resultados exactamente correspondientes; por ejemplo, la sección eficaz total de absorción es la misma en el sistema CM y en el sistema del laboratorio.

La sección eficaz diferencial es algo más complicada. El ángulo de dispersión, medido como θ_{cm} en el sistema CM, tendrá generalmente un valor diferente θ_{lab} en el sistema del laboratorio, y dado un ángulo sólido medido como $d\Omega_{cm}$ en uno se medirá como $d\Omega_{lab}$ en el otro. Aparte de estas complicaciones, podemos usar el mismo argumento que antes. La definición de la sección eficaz diferencial (14.17),

$$N_{disp}(\text{dentro de } d\Omega) = N_{inc}\, n_{blanco} \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega, \tag{14.42}$$

puede ser usada en cualquiera de los dos sistemas. Igual que antes, los números N_{inc} y n_{blanco} tienen los mismo valores en ambos sistemas. Todavía más, el número de proyectiles dispersados en cualquier ángulo sólido elegido, denominado $d\Omega_{cm}$, en el sistema CM es el mismo que el número que entra en el ángulo sólido correspondiente, denominado $d\Omega_{lab}$, en el sistema del laboratorio. De este modo, como antes, los primeros tres términos en (14.42) tienen los mismos valores en ambos sistemas, y lo mismo debe por ello ser cierto del producto final; esto es

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} d\Omega_{cm} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} d\Omega_{lab} \tag{14.43}$$

o

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} \frac{d\Omega_{cm}}{d\Omega_{lab}}. \tag{14.44}$$

Vemos que las secciones eficaces diferenciales no son las mismas en los dos sistemas, pero sólo porque un ángulo sólido dado tiene valores diferentes ($d\Omega_{cm}$ y $d\Omega_{lab}$) dependiendo del sistema utilizado.

Como $d\Omega = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi = -d(\cos\theta)\, d\phi$, y como el ángulo azimutal ϕ del momento resultante es el mismo en ambos sistemas, podemos reescribir (14.44) en la más útil, aunque quizá menos transparente, forma

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} \left|\frac{d(\cos\theta_{cm})}{d(\cos\theta_{lab})}\right|. \tag{14.45}$$

(Los signos de valor absoluto son necesarios porque ambas secciones eficaces son por definición positivas, mientras que la derivada de la derecha puede a veces ser negativa). El problema de transformar la sección eficaz diferencial del sistema CM

al sistema del laboratorio se reduce ahora al problema cinemático de encontrar θ_{cm} en términos de θ_{lab}, o viceversa, y después tomar la derivada indicada.

14.8 Relación entre los ángulos de dispersión del CM y del laboratorio*

* *Como es habitual, las secciones marcadas con un asterisco se pueden omitir en una primera lectura.*

Para relacionar los ángulos de dispersión del CM y del laboratorio, necesitamos observar los momentos de las partículas en ambos sistemas. Añadamos subíndices «cm» y «lab» para estos momentos, y usemos una prima para indicar los valores salientes (y «no prima» para los incidentes). Los momentos del CM están dados por (14.38) como

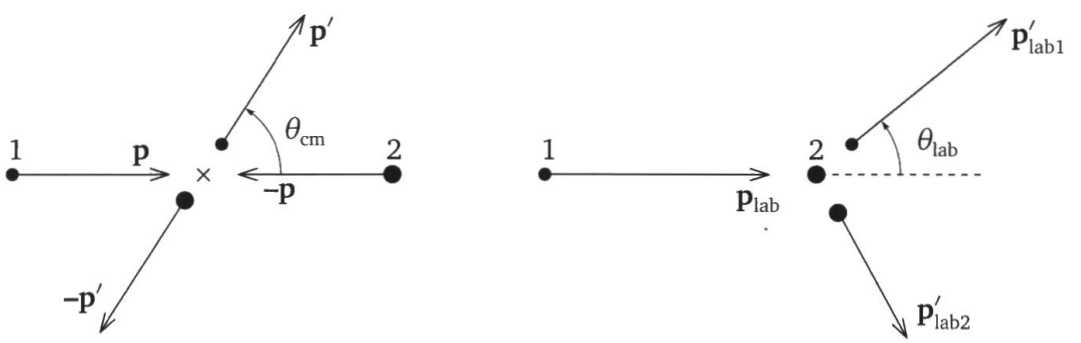
$$\mathbf{p}_{cm1} = -\mathbf{p}_{cm2} = \mathbf{p} \qquad \text{(inicial)} \tag{14.46}$$

y

$$\mathbf{p}'_{cm1} = -\mathbf{p}'_{cm2} = \mathbf{p}' \qquad \text{(final)} \tag{14.47}$$

donde, como siempre, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p}'$ denotan el momento relativo ($\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{r}}$). Estos valores están ilustrados en la Figura 14.14(a). Advierta que, por conservación de la energía, los cuatro momentos tienen magnitudes iguales en el sistema CM.

Para concretar, confinaré nuestra discusión al caso en que el «sistema lab» es el sistema del laboratorio tradicional, en el que la partícula 2 (el blanco) está inicialmente en reposo. Los distintos momentos vistos en este sistema aparecen ilustrados en la Figura 14.14(b). Para hallar estos momentos, podemos volver a las dos ecuaciones (14.37):



(a) Sistema CM **(b)** Sistema del laboratorio

Figura 14.14. **(a)** Una colisión elástica vista desde el sistema CM. Las dos partículas se aproximan al CM (mostrado como una cruz) con momentos iguales y opuestos. **(b)** La misma colisión vista en el sistema del laboratorio, en el que la partícula 2 esta inicialmente en reposo.

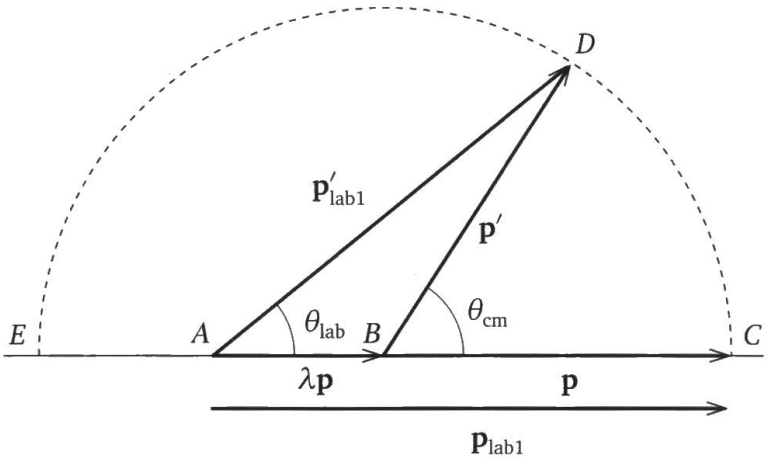


Figura 14.15. La relación de los momentos inicial y los final en los sistemas CM y laboratorio. El número λ es el cociente de masa m_1/m_2 y fue tomado como 0,5 para este dibujo. Los momentos mostrados como $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p}'$ son los momentos relativos inicial y final, que son los mismos que $\mathbf{p}_{\text{cm1}}$ y $\mathbf{p}'_{\text{cm1}}$.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}. \tag{14.48}$$

Como la partícula 2 esta inicialmente en reposo, la segunda de ellas implica que

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{m_2}\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m_2}. \tag{14.49}$$

Esta es la velocidad del centro de masa, vista en el sistema del laboratorio, nos permite relacionar cualquiera de los momentos del laboratorio con sus valores correspondientes del CM. En particular, derivando la primera de las ecuaciones (14.48), vemos que

$$\mathbf{p}_{\text{lab1}} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 = m_1\dot{\mathbf{R}} + \mu\dot{\mathbf{r}} = \frac{m_1}{m_2}\mathbf{p} + \mathbf{p}$$

o

$$\mathbf{p}_{\text{lab1}} = \lambda\mathbf{p} + \mathbf{p} \tag{14.50}$$

donde he introducido el importante **cociente de masa**

$$\lambda = \frac{m_1}{m_2}. \tag{14.51}$$

Exactamente de la misma manera, el momento final $\mathbf{p}'_{\text{lab1}}$ es

$$\mathbf{p}'_{\text{lab1}} = \lambda\mathbf{p} + \mathbf{p}'. \tag{14.52}$$

Los dos resultados (14.50) y (14.52) aparecen ilustrados en la Figura 14.15, donde las rectas BC y BD representan los momentos inicial y final de la partícula 1 en

el sistema CM, mientras que AC y AD son los valores del laboratorio correspondientes. Lanzando una perpendicular desde el punto D a la recta AC, se puede comprobar (Problema 14.25) que

$$\operatorname{tg}\theta_{\text{lab}} = \frac{\operatorname{sen}\theta_{\text{cm}}}{\lambda + \cos\theta_{\text{cm}}} \tag{14.53}$$

que nos da θ_{lab} en términos de θ_{cm}. Antes de usar este resultado para obtener la sección eficaz del laboratorio en términos del valor correspondiente del CM, usemos la Figura 14.15 para establecer algunos otros resultados.

Como $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$, el punto D está en un círculo con centro B y radio p, como se indica. Es fácil ver que, a menos que $\theta_{\text{cm}} = 0$ o π, θ_{lab} es siempre menor que θ_{cm}, como se podía esperar. Los detalles de la Figura 14.15 dependen de los tamaños relativos de las dos masas: supongamos primero que $\lambda < 1$ (esto es, el proyectil es más ligero que el blanco, $m_1 < m_2$). En este caso, el punto A está dentro del círculo como se muestra en la Figura 14.15. (Esta figura se dibujó usando un cociente de masa $\lambda = 0{,}5$). Si $\theta_{\text{cm}} = 0$, entonces el punto D coincide con C y θ_{lab} es cero también. Si nos imaginamos que θ_{cm} aumenta continuamente desde 0 hasta π, el punto D se mueve continuamente alrededor del semicírculo desde C hasta E, con θ_{lab} siempre menor que θ_{cm}, hasta que $\theta_{\text{cm}} = \pi$, en cuyo punto θ_{lab} es también igual a π. (Es decir, si el proyectil rebota directamente hacia atrás en el sistema CM, lo mismo es cierto en el laboratorio (al menos si $\lambda < 1$). Este comportamiento está ilustrado en la Figura 14.16, que es una gráfica de θ_{lab} frente a θ_{cm} para un cociente de masa $\lambda = 0{,}5$.

Si $\lambda = 1$ (esto es, el proyectil y el blanco tienen masas iguales), el comportamiento de θ_{lab} como una función de θ_{cm} es sorprendentemente distinto. En este caso, (14.53) se reduce a

$$\theta_{\text{lab}} = \tfrac{1}{2}\theta_{\text{cm}} \tag{14.54}$$

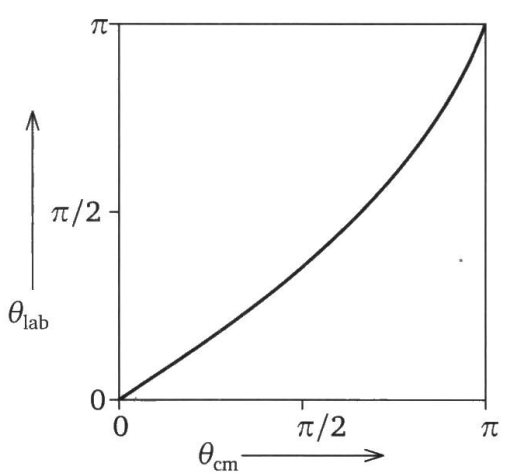


Figura 14.16. El ángulo de dispersión del laboratorio θ_{lab} como una función del ángulo del CM θ_{cm} (14.53) para un cociente de masa de 0,5 (esto es, $m_1 = 0{,}5m_2$). Los dos ángulos son iguales en 0 y π, pero $\theta_{\text{lab}} < \theta_{\text{cm}}$ en cualquier otro sitio.

(vea el Problema 14.27). Por consiguiente, cuando θ_{cm} varía desde 0 hasta π, θ_{lab} va desde 0 hasta $\pi/2$; en particular, en el sistema del laboratorio de una colisión entre masas iguales, el ángulo de dispersión nunca puede exceder de 90°. Si $\lambda > 1$, la situación es diferente otra vez, como se puede explorar en el Problema 14.31.

Para encontrar la sección eficaz diferencial, necesitamos encontrar la derivada $d(\cos\theta_{cm})/d(\cos\theta_{lab})$ en (14.45). Usando (14.53) es un ejercicio razonablemente directo (Problema 14.26) mostrar que

$$\frac{d(\cos\theta_{lab})}{d(\cos\theta_{cm})} = \frac{1+\lambda\cos\theta_{cm}}{(1+2\lambda\cos\theta_{cm}+\lambda^2)^{3/2}}. \tag{14.55}$$

Sustituyendo en (14.45), encontramos que

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} \frac{(1+2\lambda\cos\theta_{cm}+\lambda^2)^{3/2}}{|1+\lambda\cos\theta_{cm}|}. \tag{14.56}$$

Ejemplo 14.7 *Dispersión ante esfera rígida de nuevo*

Encontrar las secciones eficaces diferenciales en el CM y en el laboratorio para la dispersión de un proyectil puntual de masa m_1 por una esfera rígida de radio R y masa $m_2 = 2m_1$, y representar cada una como una función del ángulo de dispersión apropiado.

La sección eficaz del CM es la misma que aquella para una partícula con masa igual a la masa μ, dispersada por un blanco fijo. En el Ejemplo 14.5 (página 634) encontramos que la última era justo $R^2/4$. Por lo tanto,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{R^2}{4}$$

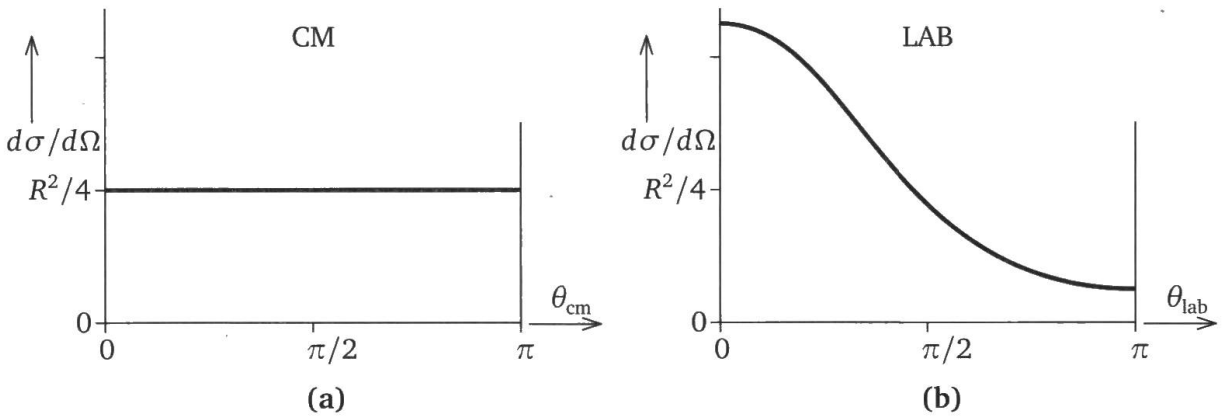


Figura 14.17. **(a)** Sección eficaz diferencial para la dispersión por una esfera rígida es isotrópica en el sistema CM. **(b)** En el sistema lab está desviada en la dirección hacia delante.

y la sección eficaz del laboratorio puede ser escrita inmediatamente de (14.56) (con $\lambda = 0{,}5$). Las dos secciones eficaces están representadas como funciones de sus respectivos ángulos en la Figura 14.17.[12] Como ya sabíamos, la sección eficaz del CM es isotrópica. La sección eficaz del laboratorio está notablemente desviada en la dirección hacia delante.

Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 14

Ángulo de dispersión y parámetro de impacto

El **ángulo de dispersión** es el ángulo θ que se desvía un proyectil en su encuentro con un blanco. El **parámetro de impacto** es la distancia b por la que el proyectil habría fallado el centro del blanco si no se hubiera desviado. [Sección 14.1]

Sección eficaz de colisión

La **sección eficaz** σ_p para un proceso particular «p» (dispersión elástica, absorción, reacción, fisión) está definida por

$$N_p = N_{inc} n_{blanco} \sigma_p \qquad \text{[Secciones 14.2 y 14.3]}$$

donde N_p es el número de resultados del tipo considerado, N_{inc} es el número de proyectiles incidentes, y n_{blanco} es la densidad (número/área) de blancos.

La sección eficaz diferencial

La **sección eficaz diferencial** $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi)$ para la dispersión en una dirección (θ, ϕ) está definida por

$$N_{disp}\,(\text{dentro de } d\Omega) = N_{inc}\, n_{blanco} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi)\, d\Omega. \qquad \text{[Ec.(14.17)]}$$

Cálculo de la sección eficaz diferencial

Si se puede hallar el ángulo de dispersión θ como una función del parámetro de impacto b (o viceversa), entonces

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\operatorname{sen}\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \qquad \text{[Ec. (14.23)]}$$

La fórmula de Rutherford

La sección eficaz diferencial para la dispersión de una carga q por una carga fija Q está dada por la **fórmula de Rutherford**

[12] La ecuación (14.56) proporciona la sección eficaz del laboratorio como una función del ángulo θ_{cm} del CM. Para expresarla como una función explicita de θ_{lab}, uno tendría que resolver (14.53) para θ_{cm} en términos de θ_{lab}. Para hacer una gráfica de la Figura 14.17(b), un procedimiento mucho más sencillo es tratar θ_{lab} y $(d\sigma/d\Omega)_{lab}$ como funciones del parámetro θ_{cm} y hacer una representación paramétrica con θ_{cm} yendo desde 0 hasta π.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{kqQ}{4E\,\text{sen}^2(\theta/2)}\right)^2. \qquad \text{[Ec. (14.32)]}$$

Secciones eficaces del CM y del laboratorio

El **sistema lab** se entiende generalmente como el sistema en el que el blanco está en reposo; el **sistema CM** es aquel en el que el CM está en reposo. Las secciones eficaces diferenciales en los dos sistemas cumplen

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{lab}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{cm}} \left|\frac{d(\cos\theta_{\text{cm}})}{d(\cos\theta_{\text{lab}})}\right|. \qquad \text{[Ec. (14.45)]}$$

Problemas para el Capítulo 14

Los asteriscos indican el nivel aproximado de dificultad, desde los más fáciles (⋆) hasta los más difíciles (⋆ ⋆ ⋆).

Sección 14.2 Sección eficaz de colisión

14.1 ⋆ Una tarta de arándanos tiene diámetro 15 cm y contiene 6 grandes arándanos, cada uno de diámetro 1 cm. Encontrar la sección eficaz σ de un arándano y la densidad de «blanco» n_{blanco} (número/área) de arándanos en la tarta, vista desde arriba. Si se lanza al azar un pincho hacia la tarta, ¿cuál es la probabilidad de que dé en un arándano (en términos de σ y n_{blanco}, y después numéricamente)?

14.2 ⋆ **(a)** Cierto núcleo tiene radio 5 fm (1 fm = 10^{-15} m). Hallar su sección eficaz σ en barns. (1 barn = 10^{-28} m^2). **(b)** Hacer lo mismo para un átomo de radio 0,1 nm (1 nm = 10^{-9} m).

14.3 ⋆ Un haz de partículas se dirige a través de un depósito de hidrógeno líquido. Si la longitud del depósito es 50 cm y la densidad del líquido es 0,07 g/cm^3, ¿cuál es la densidad del blanco (número/área) de átomos de hidrógeno vista por las partículas incidentes?

14.4 ⋆ ⋆ La sección eficaz de dispersión de cierta partícula nuclear por un núcleo de cobre es 2,0 barn. Si 10^9 de estas partículas se disparan a través de una lámina de cobre de espesor 10 μm, ¿cuántas partículas son dispersadas? (La densidad del cobre es 8,9 gramos/cm^3 y su masa atómica es 63,5. La dispersión por cualquier electrón atómico es completamente despreciable).

14.5 ⋆ ⋆ La sección eficaz de dispersión de cierta partícula nuclear por un núcleo de nitrógeno es 0,5 barn. Si 10^{11} de estas partículas son disparadas a través de una cámara de niebla de 10 cm de longitud, que contiene nitrógeno en condiciones normales de presión y temperatura, ¿cuántas partículas son dispersadas? (Usar la ley de gas ideal y recuerde que cada molécula de nitrógeno tiene dos átomos. La dispersión por cualquier electrón atómico es completamente despreciable).

14.6 ⋆ ⋆ Nuestra definición de la sección eficaz de dispersión, $N_{\text{disp}} = N_{\text{inc}} n_{\text{blanco}} \sigma$, se aplica a un experimento en el que se usa un haz estrecho de proyectiles, todos los cuales pasan a través de un conjunto de blancos. Los experimentadores algunas veces usan un haz incidente ancho, que abarca completamente el conjunto de blancos (el haz de fotones de las luces delanteras de un coche, dirigido a un pequeño trozo de plástico, por ejemplo). Mostrar que en este caso $N_{\text{disp}} = n_{\text{inc}} N_{\text{blanco}} \sigma$, donde n_{inc} es la densidad (número/área) del haz incidente, vista de frente, y N_{blanco} es el número total de blancos en el conjunto blanco.

Sección 14.4 Sección eficaz diferencial de dispersión

14.7 ⋆ Calcular los ángulos sólidos originados por la Luna y por el Sol, ambos vistos desde la Tierra. Comentar las respuestas. (Los radios de la Luna y del Sol son $R_{\text{L}} = 1{,}74 \times 10^6$ m y $R_{\text{S}} = 6{,}96 \times 10^8$ m. Sus distancias desde la Tierra son $d_{\text{L}} = 3{,}84 \times 10^8$ m y $d_{\text{S}} = 1{,}50 \times 10^{11}$ m).

14.8 ⋆ En el famoso experimento de Rutherford, sus colaboradores Geiger y Marsden detectaron las partículas alfa dispersadas utilizando una pantalla de sulfuro de zinc, que producía un destello de luz diminuto cuando era golpeada por una partícula alfa. Si su pantalla tenía un área de 1 mm^2 y estaba a un 1 cm del blanco, ¿cuál era el ángulo sólido que originaba?

14.9 ⋆ Integrando el elemento de ángulo sólido (14.15), $d\Omega = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$, sobre todas las direcciones, verificar que el ángulo sólido correspondiente a todas las direcciones es 4π estereorradianes.

14.10 ⋆ Evaluando la integral necesaria, verificar el resultado (14.20) para la sección eficaz total del Ejemplo 14.4 (página 631). (Esto es muy fácil si se hace un cambio de variables a $u = \cos\theta$).

14.11 ⋆⋆ La sección eficaz diferencial para la dispersión de partículas alfa de 6,5 MeV a 120° por un núcleo de plata es alrededor de 0,5 barn/sr. Si un total de 10^{10} alfas inciden sobre una lámina de plata de espesor 1 μm y si detectamos las partículas dispersadas utilizando un contador de área 0,1 mm^2 a 120° y 1 cm del blanco, ¿cuántas alfas dispersadas deberíamos esperar contar? (La plata tiene gravedad específica de 10,5, y masa atómica de 108).

14.12 ⋆⋆⋆ [Ordenador] En la teoría cuántica de la dispersión, la sección eficaz diferencial es igual al valor absoluto del cuadrado de un número complejo $f(\theta)$, denominado amplitud de dispersión:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2. \tag{14.57}$$

La amplitud de dispersión puede entonces escribirse como una serie infinita

$$f(\theta) = \frac{\hbar}{p}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\, e^{i\delta_\ell}\operatorname{sen}\delta_\ell\, P_\ell(\cos\theta). \tag{14.58}$$

Aquí $\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}$J· s se denomina «h barra» y es la constante de Planck dividida por 2π, y p es el momento del proyectil incidente. Los números reales δ_ℓ se denominan **cambios de fase** y dependen de la naturaleza del proyectil y del blanco y de la energía incidente. Y $P_\ell(\cos\theta)$ es el conocido polinomio de Legendre. ($P_0 = 1$, $P_1 = \cos\theta$, etc).

La **serie de onda-parcial** (14.58) es especialmente útil a bajas energías en las que sólo unos pocos de los cambios de fase son distintos de cero. **(a)** Escribir esta serie para el caso de neutrones de 10 MeV (masa $m = 1{,}675 \times 10^{-27}$ kg) dispersados por cierto núcleo pesado para el cual $\delta_0 = -30°$, $\delta_1 = 150°$, y todos los demás cambios de fase son despreciables. **(b)** Encontrar una expresión para la sección eficaz diferencial (en términos de $\hbar, m$, la energía incidente E y los dos cambios de fase distintos de cero) y representar para $0 \le \theta \le 180°$. **(c)** Hallar la sección eficaz total de dispersión.

Sección 14.5 Cálculo de la sección eficaz diferencial

14.13 ⋆⋆ En la deducción de la sección eficaz de dispersión por una esfera rígida utilizamos la «ley de la reflexión», según la cual los ángulos de incidencia y reflexión de una partícula que rebota en una esfera rígida son iguales, como en la Figura 14.10. Usar la conservación de la energía y el momento angular para demostrar esta ley. (La definición de «dispersión ante una esfera rígida» es que un proyectil rebota con su energía cinética inalterada. Que la fuerza tiene simetría esférica implica, como es habitual, que el momento angular respecto al centro de la esfera se conserva).

14.14 ⋆⋆ Se puede establecer una teoría de la dispersión bidimensional, que se podría aplicar a proyectiles tipo disco que se deslizan sobre una pista de hielo y colisionan con varios obstáculos blanco. La sección eficaz σ sería la anchura efectiva del blanco, y la sección eficaz diferencial $d\sigma/d\theta$ daría el número de proyectiles dispersados en el ángulo $d\theta$. **(a)** Mostrar que el análogo bidimensional de (14.23) es $d\sigma/d\theta = |db/d\theta|$. (Advertir que en la dispersión en dos dimensiones es conveniente tomar el rango de θ desde $-\pi$ hasta π). **(b)** Ahora consideremos la dispersión de un pequeño proyectil por una «esfera» rígida (realmente un disco rígido) de radio R inmovilizado en el hielo. Hallar la sección eficaz diferencial. (Advertir que en dos dimensiones, la dispersión

por «esfera» rígida no es isotrópica). **(c)** Mediante la integración de la respuesta a la parte (b), mostrar que la sección eficaz total es $2R$ como se esperaba.

14.15 ⋆ ⋆ ⋆ [Ordenador] Considerar un proyectil puntual que se mueve sometido a una fuerza esférica fija cuya energía potencial es

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 & (0 \le r \le R) \\ 0 & (R < r) \end{cases} \tag{14.59}$$

donde U_0 es una constante positiva. Este conocido pozo esférico representa un proyectil que se mueve libremente en cualquiera de las regiones $r < R$ y $R < r$, pero, cuando cruza la frontera $r = R$, recibe un impulso radial hacia dentro que cambia su energía cinética por $\pm U_0$ ($+U_0$ que va hacia dentro, $-U_0$ que va hacia fuera). **(a)** Esbozar la órbita de un proyectil que se aproxima al pozo con momento p_0 y parámetro de impacto $b < R$. **(b)** Utilizar la conservación de la energía para hallar el momento p del proyectil dentro del pozo ($r < R$). Denotar por ζ el cociente del momento $\zeta = p_0/p$ y por d la distancia de aproximación más cercana del proyectil al origen. Usar la conservación del momento angular para mostrar que $d = \zeta b$. **(c)** Usar el dibujo para probar que el ángulo de dispersión θ es

$$\theta = 2\left(\operatorname{arcsen}\frac{b}{R} - \operatorname{arcsen}\frac{\zeta b}{R}\right). \tag{14.60}$$

Esto da θ como una función de b, que es lo que se necesita para obtener la sección eficaz. La relación depende del cociente del momento ζ, que resulta que depende del momento incidente p_0 y de la profundidad del pozo U_0. Representar θ como una función de b para el caso en que $\zeta = 0{,}5$. **(d)** Mediante la diferenciación de θ con respecto a b, encontrar una expresión para la sección eficaz diferencial como una función de b, y hacer una gráfica de $d\sigma/d\Omega$ frente a θ para el caso en que $\zeta = 0{,}5$. Comentar. [*Ayuda*: para representar como una función de θ no es necesario resolver para b en función de θ; en lugar de ello, se puede hacer una representación paramétrica del punto $(\theta, d\sigma/d\Omega)$ como una función del parámetro b yendo desde 0 hasta R]. **(e)** Mediante la integración de $d\sigma/d\Omega$ sobre todas las direcciones, hallar la sección eficaz total.

Sección 14.6 Dispersión de Rutherford

14.16 ⋆ Una de las predicciones específicas del modelo de Rutherford del átomo fue que la sección eficaz debería ser inversamente proporcional a E^2 o, equivalentemente, a v^4. Para probarlo, Geiger y Marsden variaron la velocidad v haciendo pasar las alfas incidentes a través de hojas delgadas de mica para frenarlas. Según la predicción de Rutherford, el producto de N_{disp} y v^4 debería ser el mismo cualquiera que fuera la velocidad incidente (siempre que todas las demás variables permanecieran constantes). Añadir una fila que muestre $N_{\text{disp}}v^4$ a esta tabla de datos y comprobar lo bien que fue confirmada la predicción de Rutherford.

Número de hojas de mica	0	1	2	3	4	5	6
Cuentas, N_{disp} (por min)	24,7	29	33,4	44	81	101	255
Velocidad, v (unidades arbitrarias)	1	0,95	0,90	0,85	0,77	0,69	0,57

14.17 ⋆ Otra predicción específica del modelo de Rutherford del átomo fue que la sección eficaz debería ser proporcional a la carga nuclear al cuadrado, esto es, a Z^2, donde Z es el número atómico, el número de protones en el núcleo. Para probarlo, Geiger y Marsden contaron el número de dispersiones por varios blancos distintos (manteniendo todas las demás variables fijas), con los siguientes resultados:

Blanco	Oro	Platino	Estaño	Plata	Cobre	Aluminio
N_{disp}	1319	1217	467	420	152	26
Z	79	78	50	47	29	13

Añadir una fila a esta tabla para mostrar el cociente N_{disp}/Z^2 y ver lo bien que fue confirmada la predicción de Rutherford. (Por aquel entonces el número atómico ni se conocía bien, ni tampoco se entendía del todo. Rutherford supuso, correctamente, que la carga nuclear era más o menos la mitad de la masa atómica, y ésta es la que usaron en lugar de Z). La concordancia relativamente mala para el caso del aluminio se debe probablemente a que hemos despreciado el retroceso del blanco, que es importante para los blancos más ligeros).

14.18 ⋆⋆ Una de las primeras observaciones que sugirió a Rutherford su modelo nuclear del átomo fue que varias partículas alfa fueron dispersadas por hojas de metal en el hemisferio posterior, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ (una observación que era imposible de explicar sobre la base de los modelos atómicos rivales, pero que surgía de manera natural del modelo nuclear. En uno de los primeros experimentos, Geiger y Marsden midieron la fracción de alfas incidentes dispersadas dentro del hemisferio posterior por una lámina de platino. Integrando la sección eficaz de Rutherford (14.33) sobre dicho hemisferio, mostrar que la sección eficaz de dispersión $\theta \geq 90°$ debería ser $4\pi\sigma_0(E)$. Usando los siguientes números, predecir la razón $N_{\text{disp}}(\theta \geq 90°)/N_{\text{inc}}$: espesor de la lámina de platino $\approx 3\,\mu$m, densidad $= 21{,}4$ gramos/cm^3, peso atómico $= 195$, número atómico $= 78$, energía de las alfas incidentes $= 7{,}8$ MeV. Comparar la respuesta con la estimación de que «de las partículas α incidentes alrededor de 1 de cada 8000 fue dispersada» (esto es, dispersada dentro del hemisferio posterior). Aunque esta fracción es pequeña, aún era bastante mayor de lo que cualquier otro modelo alternativo del átomo podría explicar.

14.19 ⋆⋆ Una simplificación importante en nuestra deducción de la sección eficaz de Rutherford era que la órbita del proyectil es simétrica respecto a la dirección **u** de máxima aproximación. (Vea la Figura 14.11). Probar que esto es cierto para casi cualquier fuerza central conservativa, como sigue: **(a)** Suponer que el potencial efectivo (real más centrífugo) se comporta como en la Figura 8.4; es decir, tiende a cero cuando $r \to \infty$ y tiende a $+\infty$ cuando $r \to 0$.[13] Usar esto para demostrar que cualquier proyectil que venga desde el infinito debe alcanzar un valor mínimo $r_{\text{mín}}$ y después alejarse hacia infinito otra vez. **(b)** Esto implica que un proyectil debe visitar cualquier valor de r entre $r_{\text{mín}}$ e infinito exactamente dos veces, una en el camino hacia dentro y otra vez en el camino hacia fuera. Demostrar que los valores de $\dot{r}$ en estos dos puntos so el mismo, y lo mismo para los valores de $\dot{\psi}$ (donde ψ es el ángulo polar definido en la Figura 14.11). **(c)** Usar estos resultados para probar que la órbita es simétrica bajo reflexión respecto a la dirección **u**.

14.20 ⋆⋆ La deducción de la sección eficaz de Rutherford se hizo más simple por la cancelación fortuita de los factores de r en la integral (14.30). He aquí un método para hallar la sección eficaz que funciona, en principio, para cualquier campo de fuerza central: la apariencia general de la órbita de dispersión es como se muestra en la Figura 14.11. Es simétrica respecto a la dirección **u** de máxima aproximación. (Vea el Problema 14.19). Si ψ es el ángulo polar del proyectil, medido desde la dirección **u**, entonces $\psi \to \pm\psi_0$ cuando $t \to \pm\infty$ y el ángulo de dispersión es $\theta = \pi - 2\psi_0$. (Vea la Figura 14.11 de nuevo). El ángulo ψ_0 es igual a $\int \dot{\psi}\, dt$ tomado desde el instante de máxima aproximación a ∞. Usando el truco ahora familiar se puede reescribir esto como $\int (\dot{\psi}/\dot{r})\, dr$. Después reescribir $\dot{\psi}$ en términos del momento angular ℓ y r, y reescribir $\dot{r}$ en términos de la energía E y el potencial efectivo U_{ef} definido en la Ecuación (8.35) (8.35). Habiendo hecho todo esto se debería ser capaz de probar que

$$\theta = \pi - 2\int_{r_{\text{mín}}}^{\infty} \frac{(b/r^2)\, dr}{\sqrt{1-(b/r)^2 - U(r)/E}}. \tag{14.61}$$

[13] Aunque este comportamiento es definitivamente la norma, existen algunos campos de fuerza para los cuales no es cierto. Si la energía potencial real es fuertemente atractiva cerca de $r = 0$ (por ejemplo, $U(r) = -1/r^3$), entonces domina el potencial centrífugo cerca de $r = 0$, y el potencial efectivo no tiende a $+\infty$ cuando $r \to 0$. Nuestros argumentos fallan para el caso especial en que $b = 0$, en cuyo caso el proyectil puede chocar directamente contra el blanco.

Siempre que esta integral pueda ser evaluada, da θ en términos de b, y con ello la sección eficaz (14.23). Para ver ejemplos de su uso, vea los Problemas 14.21, 14.22 y 14.23.

14.21 ⋆⋆ Usar la relación general (14.61) del Problema 14.20 para volver a deducir la relación (14.24) para la dispersión por una esfera rígida.

14.22 ⋆⋆⋆ Usar la relación general (14.61) del Problema 14.20 para volver a deducir la relación (14.31) para la dispersión de Rutherford.

14.23 ⋆⋆⋆ Considerar la dispersión de una partícula con energía E por un campo de fuerza repulsivo fijo de tipo $1/r^3$, con energía potencial $U = \gamma/r^2$. Usar la relación (14.61) del Problema 14.20 para hallar θ en términos de b y después mostrar que la sección eficaz diferencial es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\gamma}{E}\frac{\pi^2(\pi-\theta)}{\theta^2(2\pi-\theta)^2\,\mathrm{sen}\,\theta}. \tag{14.62}$$

Para refrescar la memoria sobre como hallar $r_{\text{mín}}$ se puede echar un vistazo a la Figura 8.5 (el caso $E > 0$). Se debería ser capaz de resolver la ecuación obtenida para θ en términos de b para obtener b en términos de θ y de ahí la sección eficaz.

Sección 14.8 Relación de los ángulos de dispersión del CM y del laboratorio

14.24 ⋆⋆ Considerar la dispersión de dos partículas de igual masa (por ejemplo, dispersión de neutrones por protones). En este caso, $\theta_{\text{lab}} = \frac{1}{2}\theta_{\text{cm}}$. (Vea el Problema 14.27). **(a)** Usar este resultado en (14.45) para probar que cuando el proyectil y el blanco tienen masas iguales

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{lab}} = 4\cos\theta_{\text{lab}}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{cm}}. \tag{14.63}$$

(b) Escribir la sección eficaz del laboratorio para la dispersión de dos esferas rígidas de igual masa. (Sabemos que en el sistema CM, la sección eficaz diferencial es $R^2/4$ donde $R = R_1 + R_2$). Integrando sobre todas las direcciones, verificar que la sección eficaz total en el sistema del laboratorio es πR^2, como tiene que ser.

14.25 ⋆⋆ Usando la Figura 14.15, probar la Ecuación (14.53), que

$$\mathrm{tg}\,\theta_{\text{lab}} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta_{\text{cm}}}{\lambda + \cos\theta_{\text{cm}}}. \tag{14.64}$$

14.26 ⋆⋆ Usando identidades trigonométricas convenientes, reescribir (14.64) para obtener $\cos\theta_{\text{lab}}$ como una función de $\cos\theta_{\text{cm}}$, y verificar la derivada (14.55), que fue esencial para hallar la relación entre las secciones eficaces del CM y del laboratorio.

14.27 ⋆⋆ **(a)** Estableciendo la razón de masa $\lambda = 1$ en la Ecuación (14.64) del Problema 14.25, probar que en la dispersión de masas iguales, $\theta_{\text{lab}} = \frac{1}{2}\theta_{\text{cm}}$. **(b)** Redibujar la Figura 14.15 para el caso en que $\lambda = 1$ ($m_1 = m_2$) y explicar por qué el valor máximo de θ_{lab} es $\pi/2$.

14.28 ⋆⋆ Muchas veces es interesante conocer el momento de la partícula blanco que retrocede en el sistema del laboratorio. Denotemos por ξ_{lab} el ángulo de retroceso, definido como el ángulo entre el momento de retroceso p'_{lab2} y la dirección incidente (el ángulo debajo de la línea a trazos en la Figura 14.14). **(a)** Mostrar que en la Figura 14.15 el momento de retroceso está representado por el vector DC. Deducir que $\xi_{\text{lab}} = (\pi - \theta_{\text{cm}})/2$. **(b)** Mostrar que, en el caso especial de masas iguales ($m_1 = m_2$),$\xi_{\text{lab}} + \theta_{\text{lab}} = \pi/2$; esto es, el ángulo entre las dos partículas que salen en una colisión elástica, de masas iguales, es 90°. **(c)** Probar este último resultado directamente utilizando sólo conservación de la energía (en una colisión elástica).

14.29 ⋆⋆ Una colisión elástica se define como una en la que la energía cinética total de las dos partículas es la misma antes y después de la colisión. **(a)** Mostrar que en el sistema CM, las energías cinéticas individuales de las dos partículas se conservan separadamente en una colisión elástica. **(b)** Explicar claramente por qué el mismo resultado *no* es obviamente cierto en el sistema del

laboratorio. (Pensar en la energía de la partícula blanco). **(c)** Sea ΔE la energía ganada por la partícula blanco en la colisión (y por ello la energía perdida por el proyectil). Usando la Figura 14.15, mostrar que la energía fraccional perdida por el proyectil (en el sistema del laboratorio) es

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} \operatorname{sen}^2(\theta_{\text{cm}}/2)$$

donde, como siempre, λ es la razón de masa m_1/m_2. (Advertir que en la Figura 14.15 la recta DC representa el momento de retroceso del blanco). **(d)** Para una razón de masa dada λ, ¿qué clase de colisión produce la mayor pérdida de energía fraccional? ¿Qué valor de λ maximiza esta pérdida de energía? (La respuesta es importante en situaciones en las que se quiere que una partícula pierda energía tan rápido como sea posible, como en un reactor nuclear, por ejemplo).

14.30 ⋆⋆⋆ Si no se ha hecho todavía, hacer el Problema 14.24. **(a)** Ahora considerar la dispersión de dos esferas rígidas de igual masa, A y B, con B inicialmente estacionaria. Escribir la expresión estándar (14.42) para el número de proyectiles A dispersados dentro de un ángulo sólido $d\Omega$ a un ángulo escogido Θ. Llamar a este número $N(A$ dentro de $d\Omega$ en $\Theta)$. Ahora supongamos que monitorizamos el número de partículas B que retroceden dentro del mismo ángulo sólido $d\Omega$ al *mismo* ángulo Θ. Encontrar $N(B$ dentro de $d\Omega$ en $\Theta)$, el número de B's que serán observadas. ¿Cómo se compara esto con el número de A's?

14.31 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Considerar la dispersión elástica de un proyectil que es más pesado que el blanco, esto es, $m_1 > m_2$ o $\lambda > 1$. **(a)** Dibujar el análogo de la Figura 14.15 para este caso. Mostrar claramente que existen dos valores diferentes del ángulo del CM θ_{cm} que corresponden a cada valor de θ_{lab}. **(b)** ¿Cuáles son los dos ángulos del CM que corresponden a $\theta_{\text{lab}} = 0$? En términos de este ejemplo, explicar por qué existe esta ambigüedad de dos veces θ_{cm} cuando $m_1 > m_2$. **(c)** Representar θ_{lab} como una función de θ_{cm} para el caso en que $\lambda = 2$. **(d)** Usar la imagen obtenida de la parte (a) para encontrar una expresión para el valor máximo posible de θ_{lab} para un valor dado de λ. Comprobar que la respuesta es correcta para el caso en que $\lambda = 1$.

CAPÍTULO 15

Relatividad especial

Desde su publicación en 1687 hasta 1905, la mecánica newtoniana reinó con supremacía. Cada vez se aplicaba a más sistemas, casi siempre con éxito completo. En aquellas situaciones raras en las que las ideas newtonianas parecían fallar, se encontraba que alguna complicación se había pasado por alto; y, desde el momento en que dicha complicación se incluía, las ideas de Newton volvían a ser otra vez válidas.[1] La formulación de Newton fue complementada con nuevas ideas (como la noción de energía) y reestructurada de maneras distintas (por Lagrange y Hamilton), pero sus cimientos parecían inamovibles. Entonces, hacia el final del siglo XIX, se realizaron algunas observaciones que parecían incompatibles con las ideas newtonianas clásicas. Se hicieron esfuerzos heroicos para compatibilizar estas observaciones con la física clásica, pero en 1905 Albert Einstein (1879–1955) publicó su primer escrito sobre la teoría que hoy denominamos relatividad, en el que mostraba que las partículas con velocidades cercanas a la de la luz requerían una concepción nueva de la mecánica, tal como describo en este capítulo. Incluso a velocidades más lentas, la mecánica newtoniana es sólo una aproximación de la nueva «mecánica relativista», pero la diferencia normalmente es tan pequeña que es indetectable. En particular,

[1] Quizá el mayor triunfo de la teoría de Newton fue la predicción y descubrimiento del planeta Plutón: el cálculo de la órbita de Urano (teniendo en cuenta los otros planetas conocidos, y basada, por supuesto, en la mecánica newtoniana) estaba en desacuerdo con la posición observada en unos 1,5 minutos de arco. En 1846, el astrónomo inglés John Couch Adams (1819–1892) y el francés Urbain Leverrier(1811–1877) demostraron independientemente que esta discrepancia podría ser explicada por la presencia de un planeta situado más allá de la órbita de Urano que hasta la fecha había pasado desapercibido. Unos meses después, el nuevo planeta, ahora llamado Plutón, fue descubierto por el alemán German Johann Galle (1812–1910) exactamente en su posición predicha.

a las velocidades que normalmente se dan en la Tierra, la mecánica newtoniana es completamente satisfactoria, lo que explica por qué es todavía una parte interesante y crucial de la física (y justifica los otros 15 capítulos de este libro).[2]

15.1 Relatividad

Consideremos primero el significado del nombre «relatividad». Una reflexión breve debería convencernos de que la mayoría de las medidas físicas se realizan *con respecto* a un sistema de referencia elegido. Que la posición de las partículas sea $\mathbf{r} = (x, y, z)$ significa que su vector de posición tiene componentes (x, y, z) *relativas* a algún origen elegido y a algún conjunto elegido de ejes. Que un suceso ocurra en el instante $t = 5$ s significa que t es 5 segundos *relativo* a un origen de tiempo elegido, $t = 0$. Si medimos la energía cinética T de un coche, es muy distinto si T se mide respecto a un sistema de referencia fijo en la carretera o si se mide respecto a uno fijo en el coche. Casi todas las medidas requieren la especificación de un sistema de referencia, respecto al cual la medida se va a realizar, y podemos referirnos a este hecho como la *relatividad de las medidas*.

La teoría de la relatividad es el estudio de las consecuencias de la relatividad de las medidas. En un primer momento, esto no parecería un tema muy interesante, pero Einstein mostró que un estudio cuidadoso de cómo dependen las medidas de la elección del sistema de coordenadas transforma toda nuestra concepción del espacio y del tiempo, y requiere una revisión completa de la mecánica newtoniana.

La relatividad de Einstein consiste realmente en dos teorías. La primera, llamada relatividad especial, es «especial» en el sentido de que se centra básicamente en sistemas de referencia no acelerados. La segunda, denominada relatividad general, es «general» en el sentido de que incluye sistemas de referencia acelerados. Einstein se dio cuenta de que el estudio de sistemas acelerados conduce naturalmente a la teoría de la gravitación, y la relatividad general resulta ser la teoría relativista de la gravedad. En la práctica, la relatividad general sólo se necesita en situaciones donde sus predicciones difieren apreciablemente de aquellas de la gravedad newtoniana. Éstas incluyen el estudio de la intensa gravedad de los agujeros negros, del universo a gran escala y del efecto de la gravedad de la Tierra sobre las medidas de tiempo extremadamente precisas necesarias para el sistema de posicionamiento global. En física nuclear y de partículas, donde consideramos partículas que se desplazan a velocida-

[2] Al escribir este capítulo sobre relatividad (especialmente en las secciones iniciales y los problemas), fue difícil resistirse a tomar prestadas ideas de los capítulos de relatividad de *Modern Physics*, por Chris Zafiratos, Michael Dubson y yo mismo (segunda edición, Prentice Hall, 2003). Agradezco a Prentice Hall haberme dado permiso para hacerlo.

des cercanas a la de la luz, pero donde la gravedad es normalmente completamente despreciable, la relatividad especial es habitualmente todo lo que se necesita. En este capítulo me ocuparé solamente de la teoría especial de la relatividad.[3]

15.2 Relatividad galileana

Muchas de las ideas de la relatividad están presentes en la física clásica, y de hecho hemos visto varias en capítulos anteriores. Repasemos estas ideas y reescribamos algunas de ellas de una forma más conveniente para nuestra discusión de la relatividad de Einstein.

Como vimos en el Capítulo 1, las leyes de Newton son válidas en muchos sistemas de referencia diferentes, por ejemplo los famosos sistemas inerciales, cualquiera de los cuales se desplaza a velocidad constante relativa a cualquier otro. Podemos parafrasear esto diciendo que, en física clásica, las leyes de Newton son **invariantes** (esto es, permanecen inalteradas) cuando trasladamos nuestra atención de un sistema inercial a otro. La transformación clásica de un sistema a un segundo, que se mueve a velocidad constante relativa al primero, se denomina **transformación galileana**, así que una manera compacta de decir el mismo resultado es que las leyes de Newton son invariantes bajo la transformación galileana. Revisemos primero esta afirmación.

La transformación galileana

Por simplicidad, consideremos primero dos sistemas $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ que están orientados de la misma manera; esto es, el eje x' es paralelo al eje x, y' paralelo a y y z' paralelo a z. Supongamos incluso más, que la velocidad $\mathbf{V}$ de $\mathcal{S}'$ relativa a $\mathcal{S}$ está en la dirección del eje x. Era una suposición fundamental de la mecánica newtoniana que existe un único tiempo universal t. Por consiguiente si los observadores en $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ se ponen de acuerdo para sincronizar sus relojes (y para utilizar la misma unidad de tiempo), entonces $t' = t$. Finalmente podemos elegir los orígenes O y O' de modo que coincidan en el instante $t = t' = 0$. Esta configuración está ilustrada en la Figura 15.1, donde $\mathcal{S}$ es un sistema fijo en el suelo. (Supondremos que el sistema fijo en la Tierra es inercial (esto es, ignoraremos la lenta rotación de la Tierra). El sistema $\mathcal{S}'$ está fijo en un tren que está viajando con velocidad $\mathbf{V}$ en la dirección del eje x.

[3] Para cubrir la relatividad general sería necesario otro libro. Algunas buenas referencias son: R. Geroch, *General Relativity from A to B*, University of Chicago Press, 1978; I. R. Kenyon, *General Relativity*, Oxford University Press, 1990; B.F.A.Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, 1985; y James B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley, 2003.

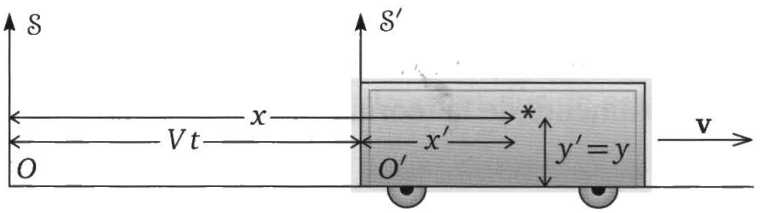


Figura 15.1. El sistema S está fijo en el suelo, mientras que S' está fijo en un vagón de tren que viaja con velocidad constante **V** en la dirección x. Los dos orígenes coinciden, $O = O'$, en el instante $t = t' = 0$. La estrella indica un suceso, tal como una pequeña explosión.

Consideremos ahora algún suceso, tal como la explosión de un pequeño petardo. Medida por observadores en S, ésta ocurre en la posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y el instante t; medida en S', ocurre en $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ y en el instante t'. Nuestra primera (y muy sencilla) tarea es establecer la relación matemática entre las coordenadas (x, y, z, t) y (x', y', z', t'). Una inspección rápida de la Figura 15.1 debería convencernos de que $x' = x - Vt$, y de que $y' = y$ y $z' = z$. Debido a la suposición clásica respecto al tiempo, tenemos que $t' = t$, así que las relaciones requeridas son

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t. \end{aligned}\right\} \tag{15.1}$$

Estas cuatro ecuaciones se conocen como **transformación galileana**. Proporcionan las coordenadas (x', y', z', t') de cualquier suceso medido en S' en términos de las coordenadas correspondientes (x, y, z, t) del mismo suceso medido en S. Son la expresión matemática de las ideas clásicas sobre el espacio y el tiempo.

La transformación galileana (15.1) relaciona las coordenadas medidas en dos sistemas dispuestos con ejes paralelos correspondientes y con velocidad relativa en la dirección del eje x, como se muestra en la Figura 15.1 (una disposición que podemos llamar **configuración estándar**). Esta no es, por supuesto, la configuración más general. Por ejemplo, si la velocidad relativa **V** está en una dirección arbitraria, es fácil ver que (15.1) se puede reescribir de forma compacta como

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t \qquad \text{y} \qquad t' = t. \tag{15.2}$$

Ésta tampoco es todavía la forma más general de la transformación galileana, porque podríamos rotar los ejes, de modo que los ejes correspondientes ya no fueran paralelos, y podríamos desplazar los orígenes O y O' y los orígenes de tiempo. Sin embargo, (15.2) es suficientemente general para nuestros propósitos actuales.

Usando la transformación galileana (15.2) podemos relacionar inmediatamente las velocidades de un objeto, medidas en los dos sistemas. Si $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ es la velo-

cidad del objeto medida en $\mathcal{S}$ y $\mathbf{v}'(t)$ es la misma para $\mathcal{S}'$, entonces derivando (15.2) encontramos inmediatamente que (recuerde que $\mathbf{V}$ es constante)

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}. \tag{15.3}$$

Ésta es la **fórmula de composición de velocidades clásica**, que afirma que, según las ideas de la física clásica, las velocidades relativas se suman (o se restan) de acuerdo con las reglas normales de aritmética de vectores.

Invariancia galileana de las leyes de Newton

Para demostrar la invariancia de las leyes de Newton bajo la transformación galileana, supongamos que la segunda ley se cumple en el sistema $\mathcal{S}$; esto es, que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, con las tres variables medidas en $\mathcal{S}$. Ahora bien, es un hecho experimental (al menos en el dominio de la mecánica clásica) que las medidas de masa de cualquier objeto dan los mismos resultados en todos los sistemas inerciales. Por consiguiente, la masa m' medida en $\mathcal{S}'$ es la misma que la medida en $\mathcal{S}$, y $m' = m$. La prueba de que lo mismo es cierto para la fuerza neta depende, hasta cierto punto, de la definición de fuerza que se utilice. Si tomamos el punto de vista de que las fuerzas están definidas por las lecturas de balanzas de muelle, entonces es claro que la fuerza $\mathbf{F}'$ medida en $\mathcal{S}'$ es la misma que la medida en $\mathcal{S}$, y $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$. Finalmente, derivando (15.3) con respecto al tiempo (y recordando que $\mathbf{V}$ es constante, por hipótesis) vemos que $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$. Acabamos de demostrar que cada una de las variables $\mathbf{F}'$, m' y $\mathbf{a}'$ del sistema $\mathcal{S}'$ es igual que la variable correspondiente $\mathbf{F}$, m y $\mathbf{a}$ del sistema $\mathcal{S}'$. Por tanto, si es cierto que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, es también cierto que $\mathbf{F}' = m'\mathbf{a}'$. Es decir, la segunda ley de Newton es invariante bajo la transformación galileana. Dejo como ejercicio (Problema 15.1) demostrar que lo mismo es cierto de las leyes primera y tercera. La invariancia de las leyes de la mecánica bajo la transformación galileana se debe a Galileo, que la utilizó para argumentar que ningún experimento podía demostrar que la Tierra estaba «realmente» en movimiento o «realmente» en reposo, y por tanto que la visión de Kepler del sistema solar con el Sol en el centro era tan razonable como la visión tradicional con la Tierra en el centro.

Relatividad galileana y velocidad de la luz

Mientras que las leyes de Newton son invariantes bajo la transformación galileana, esto ya no es cierto para las leyes del electromagnetismo. Tanto si las escribimos en su forma compacta como las cuatro ecuaciones de Maxwell, o en su forma original (como la ley de Coulomb, la ley de Faraday, y así sucesivamente), pueden ser ciertas en un sistema inercial, pero si lo son, y *si la transformación galileana fuera la relación correcta entre diferentes sistemas inerciales*, entonces podrían no ser ciertas en otro sistema inercial cualquiera. Con mucho, la manera más rápida de verificar esta afirmación es recordar que las ecuaciones de Maxwell implican que la luz (y, de

forma más general, cualquier onda electromagnética) se propaga a través del vacío en cualquier dirección con velocidad

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3{,}00 \times 10^8 \text{m/s}, \tag{15.4}$$

donde ϵ_0 y μ_0 son la permitividad y la permeabilidad en el vacío. Por consiguiente, si las ecuaciones de Maxwell se cumplen en el sistema $\mathcal{S}$, entonces la luz debe viajar a la misma velocidad c en cualquier dirección, medida en $\mathcal{S}$. Pero ahora consideremos un segundo sistema $\mathcal{S}'$, que viaja a velocidad V en la dirección del eje x de $\mathcal{S}$, e imaginemos un haz de luz que viaja en la misma dirección. En $\mathcal{S}$ la velocidad de la luz es $v = c$. Por tanto, en $\mathcal{S}'$ su velocidad está dada por la fórmula clásica de composición de velocidades (15.3) como

$$v' = c - V,$$

como se muestra a la izquierda de la Figura 15.2. Análogamente, un haz de luz que viaja hacia la izquierda, tendrá velocidad $v = c$ en $\mathcal{S}$, pero $v' = c + V$ en $\mathcal{S}'$. Dependiendo de su dirección, cualquier haz de luz tendrá velocidad v' (medida $\mathcal{S}'$) que varía en cualquier parte entre $c - V$ y $c + V$. Por tanto, las ecuaciones de Maxwell no se pueden cumplir en el sistema inercial $\mathcal{S}'$.

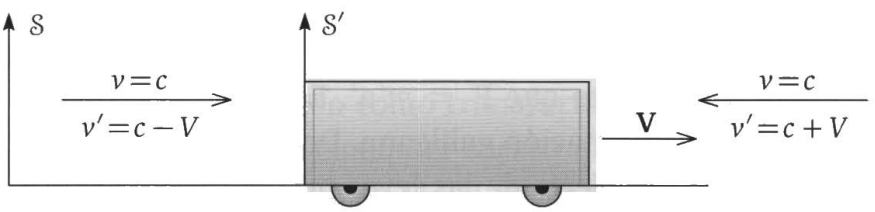


Figura 15.2. Dos sistemas $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ en la configuración estándar con velocidad relativa **V**. Dos haces de luz se aproximan al coche desde direcciones opuestas. Si, medida en $\mathcal{S}$, la luz tiene velocidad c en cualquier dirección, entonces la fórmula clásica de composición de velocidades implica que, medida en $\mathcal{S}'$, tiene velocidad $c - V$ viajando hacia la derecha, y $c + V$ viajando hacia la izquierda.

Si la transformación galileana fuera la transformación correcta entre sistemas inerciales, entonces aunque las leyes de Newton no se cumplieran en todos los sistemas inerciales, sólo podría haber un sistema en el cual se cumplieran las ecuaciones de Maxwell. Este supuesto único sistema, en el cual la luz viajaría a la misma velocidad en todas direcciones, se denomina a veces sistema del éter.[4]

[4] El origen del nombre es el siguiente: se suponía que la luz se debía propagar a través de un medio, exactamente de la misma manera que el sonido se propaga a través del aire. Como

El experimento de Michelson y Morley

El estado de las cosas que acabo de describir, con estas leyes de la mecánica válidas en todos los sistemas inerciales, pero las leyes del electromagnetismo válidas en un único sistema, se entendió bien hacia el final del siglo XIX. Algunos consideraban (sobre todo Einstein) que dicho estado no era satisfactorio, y el mismo Einstein mostró finalmente que era incorrecto. Sin embargo, era lógicamente coherente, y la mayoría de los físicos daban por sentado que sólo podía existir un único sistema en el cual la velocidad de la luz tuviese el mismo valor c en todas las direcciones. Como la Tierra viaja a una velocidad considerable en una dirección que cambia continuamente alrededor del Sol, parecía obvio que ésta debía pasar la mayor parte del tiempo moviéndose respecto al sistema del éter y por tanto que la velocidad de la luz medida en la Tierra debería ser distinta en direcciones distintas. Se esperaba que el efecto fuera muy pequeño. (La velocidad orbital de la Tierra es $V \approx 3 \times 10^4$ m/s, grande a escala terrestre, pero muy pequeña comparada con $c = 3 \times 10^8$ m/s. Por consiguiente, se esperaba que la variación fraccionaria, entre $c - V$ y $c + V$, fuera muy pequeña). No obstante, en 1880, el físico americano Albert Michelson (1852–1931), más tarde ayudado por el químico Edward Morley (1838–1923), diseñaron un interferómetro que debería haber detectado fácilmente las diferencias esperadas en la velocidad de la luz. Para su sorpresa y consternación no encontraron variación en absoluto.

Sus experimentos, y muchos otros experimentos diferentes con el mismo objetivo, se repitieron, y nunca se encontró ninguna evidencia reproducible de las variaciones en la velocidad de la luz relativa a la Tierra. En retrospectiva, es fácil llegar a la conclusión correcta: en contra de todo lo que se esperaba, la velocidad de la luz es la misma en todas las direcciones relativas a un sistema basado en la Tierra, incluso aunque la Tierra tenga velocidades diferentes en diferentes momentos del año. En otras palabras, no es verdad que exista un solo sistema en el cual la luz tenga la misma velocidad en todas las direcciones.

Esta conclusión es tan sorprendente que no se tomó en serio durante veinte años. En lugar de ello, se desarrollaron varias teorías ingeniosas para explicar el resultado de Michelson–Morley mientras se conservaba la idea de un único sistema del éter. Por ejemplo, la famosa teoría del arrastre del éter sostenía que el éter (el medio por el cual se suponía que la luz se propagaba) era arrastrado conjuntamente con la Tierra, de manera muy parecida a como *es* arrastrada la atmósfera. Esto implicaría que los observadores confinados en la Tierra están en reposo con respecto al éter y deberían medir la misma velocidad de la luz en todas las direcciones. Sin embargo, la teoría del arrastre del éter era incompatible con el fenómeno de la aberración

---

nunca nadie había detectado este medio y como la luz podría propagarse a través del espacio supuestamente vacío, el medio claramente tenía propiedades muy atípicas, y se denominó «éter» ya que según los griegos era el material de los cielos. El «sistema del éter» era el sistema en el cual el supuesto éter estaba en reposo.

estelar.[5] Ninguna de las teorías alternativas era capaz de explicar todos los fenómenos observados (al menos no de una manera razonable y prudente), y hoy casi todos los físicos aceptan que no existe un único sistema del éter y que la velocidad de la luz es una constante universal, con el mismo valor en todas las direcciones en todos los sistemas inerciales. La primera persona que aceptó esta sorprendente idea fue Einstein, como ahora discutiremos. Concretamente, veremos que la universalidad de la velocidad de la luz requiere que deshechemos la transformación galileana y la imagen clásica del espacio y el tiempo en la que está basada. Esto, en realidad, nos obligará a modificar buena parte de la mecánica newtoniana.

15.3 Los postulados de la relatividad especial

La teoría especial de la relatividad está basada en la aceptación de la universalidad de la velocidad de la luz, como sugería el experimento de Michelson–Morley.[6] Einstein propuso dos postulados, o axiomas, que expresan su convicción de que *todas* las leyes de la física deberían ser válidas en todos los sistemas inerciales, y a partir de estos postulados desarrolló su teoría especial de la relatividad. Antes de discutir los postulados de relatividad, estaría bien ponernos de acuerdo en lo que entendemos por sistema inercial:

Definición de un sistema inercial

Un sistema inercial es cualquier sistema de referencia (esto es, un sistema de coordenadas x, y, z y el tiempo t) en el cual todas las leyes de la física se cumplen en su forma habitual.

Advierta que todavía no he especificado qué son «todas las leyes de la física». Siguiendo a Einstein, utilizaremos los postulados de relatividad para decidir lo que

[5] La teoría del arrastre del éter requeriría que la luz que penetrase en la envuelta de éter de la Tierra fuera curvada. Esto estaría en contradicción con el fenómeno de la aberración estelar, según el cual la posición aparente de cualquier estrella se desplaza alrededor de un pequeño círculo a medida que la Tierra se mueve alrededor de su órbita circular (de una manera que deja claro que la luz de la estrella viaja en una línea recta cuando se aproxima a la Tierra).

[6] Si Einstein conocía o no el resultado de Michelson–Morley cuando formuló su teoría no está claro. Existe alguna evidencia de que lo conocía, pero parece claro que su motivación principal fue la convicción de que las ecuaciones de Maxwell deberían cumplirse en todos los sistemas inerciales. Si conocía el resultado no afecta ni a su impresionante logro ni a la importancia del resultado de Michelson–Morley como una evidencia maravillosamente clara de las suposiciones de Einstein.

las leyes de la física podrían ser. (Como siempre, la última prueba será si están de acuerdo con los experimentos). Resulta que una de las leyes clásicas que se transferirá a la relatividad es la ley de inercia, la primera ley de Newton. Por consiguiente los sistemas inerciales recientemente definidos son de hecho los sistemas familiares «no acelerados», en los que un objeto no sometido a fuerza alguna se desplaza con velocidad constante. Como antes, un sistema fijo a la Tierra es (en una buena aproximación) inercial; un sistema fijo a un cohete que se acelera o a una mesa giratoria no lo es. La gran diferencia entre los sistemas inerciales de relatividad y aquellos de la mecánica clásica es la relación matemática entre sistemas diferentes. En relatividad, veremos que la transformación galileana clásica debe ser sustituida por la conocida transformación de Lorentz.

Advierta también que he especificado que un sistema inercial es aquel en el que las leyes de la física se cumplen «en su forma habitual». Como vimos en el Capítulo 9, uno puede a veces modificar leyes físicas de manera que se cumplan en sistemas no inerciales también. (Por ejemplo, introduciendo las fuerzas centrífuga y de Coriolis, podríamos usar la segunda ley de Newton en un sistema en rotación). Es para excluir tales modificaciones la razón de que haya añadido el calificativo de «en su forma habitual».

El primer postulado de relatividad afirma la existencia de muchos sistemas inerciales diferentes, que viajan a velocidad constante relativa entre ellos:

Primer postulado de relatividad

Si $\mathcal{S}$ es un sistema inercial y si un segundo sistema $\mathcal{S}'$ se mueve con velocidad constante relativa a $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S}'$ es también un sistema inercial.

Otra manera de decir esto es que las leyes de la física son invariantes cuando trasladamos nuestra atención de un sistema a un segundo sistema que se mueve a velocidad constante relativa al primero. Esto es lo que hemos demostrado para las leyes de la mecánica, pero estamos afirmándolo ahora para *todas* las leyes de la física.

Otro enunciado popular del primer postulado es que «no existe tal cosa como el movimiento absoluto». Para entender esto, consideremos dos sistemas, $\mathcal{S}$ fijo a la Tierra y $\mathcal{S}'$ fijo a un cohete que se mueve a velocidad constante relativa a la Tierra. Es natural preguntarse si existe algún sentido coherente en el que podríamos decir que $\mathcal{S}$ está realmente en reposo y $\mathcal{S}'$ está realmente en movimiento (o viceversa). Si la respuesta fuera «sí», entonces podríamos decir que $\mathcal{S}$ está absolutamente en reposo y que cualquier cosa que se mueva respecto a $\mathcal{S}$ está en movimiento absoluto. Sin embargo, esto estaría en contradicción con el primer postulado de relatividad: todas las leyes observables por los científicos en $\mathcal{S}$ son igualmente observables por los científicos en $\mathcal{S}'$; cualquier experimento que se pueda llevar a cabo en $\mathcal{S}$ se puede

realizar igualmente en S'. Por tanto, ningún experimento puede mostrar qué sistema se está *realmente* moviendo. Respecto a la Tierra, el cohete se está moviendo; respecto al cohete, la Tierra se está moviendo; y esto es todo lo que podemos decir.

Otro enunciado alternativo del primer postulado es que entre todos los sistemas inerciales, no hay ningún *sistema preferido*. Las leyes de la física no prefieren ningún sistema en particular como que uno que en algún sentido sea más especial que otro.

El segundo postulado especifica una de las leyes que se cumple en todos los sistemas inerciales:

Segundo postulado de relatividad

La velocidad de la luz (en el vacío) tiene el mismo valor c en todas las direcciones en todos los sistemas inerciales.

Este es, por supuesto, el resultado de Michelson–Morley.

Aunque el segundo postulado parece contradecir nuestra experiencia cotidiana, es ahora ya un hecho experimental firmemente establecido. Cuando exploremos las consecuencias de los postulados de Einstein vamos a encontrar varias predicciones sorprendentes, todas las cuales parecen contradecir nuestra experiencia cotidiana (por ejemplo, el fenómeno denominado dilatación del tiempo, descrito en la siguiente sección). Si se tienen dificultades en aceptar estas predicciones, hay dos puntos a tener en cuenta: primero, son todas consecuencias lógicas del segundo postulado. Por consiguiente, una vez que se ha aceptado (sorprendente, pero indiscutiblemente cierto), *hay* que aceptar todas sus consecuencias lógicas, no importa lo poco intuitivas que parezcan. Segundo, todos los fenómenos sorprendentes (incluido el propio segundo postulado) tienen la sutil propiedad de que se hacen importantes sólo cuando los objetos se desplazan a velocidades comparables a la de la luz. En la vida cotidiana, a velocidades mucho menores que c, estos fenómenos simplemente no se manifiestan. En este sentido, ninguna de las sorprendentes consecuencias de los postulados de Einstein está realmente en conflicto con nuestra experiencia cotidiana.

15.4 La relatividad del tiempo; dilatación del tiempo

Medida del tiempo en un único sistema

Vamos a ver que el segundo postulado nos obliga a abandonar la noción clásica de un único tiempo universal. En lugar de ello, veremos que el tiempo de cualquier suceso, medido en dos sistemas inerciales distintos, es en general distinto. Siendo este el caso, necesitamos primero ser bastante claros con lo que queremos decir por tiempo, medido en un único sistema.

Daré por sentado que tenemos a nuestra disposición cinta métrica y relojes de sobra. Los relojes no es necesario que sean idénticos, pero deben tener la propiedad de que, cuando se llevan juntos al mismo punto, en reposo en el mismo sistema inercial, están sincronizados entre ellos. Consideremos un único sistema inercial $\mathcal{S}$, con origen O. Podemos situar una observadora jefe en O con uno de estos relojes, y puede registrar fácilmente cualquier suceso cercano, tal como una pequeña explosión, porque esencialmente la verá de forma instantánea. Registrar un suceso más allá del origen es más difícil, porque la luz del suceso tiene que viajar desde el suceso hasta O antes de que la observadora pueda percibirla. Si supiera a qué distancia ocurrió el suceso, entonces podría calcular cuánto tardó la señal en llegar hasta ella (ya que sabe que la luz viaja a velocidad c) y restar este valor del tiempo de llegada para obtener el instante del suceso. Una manera más sencilla de proceder (en principio cualquier manera) es emplear un número grande de ayudantes situados a intervalos regulares en la región de interés, cada uno con su propio reloj. Los ayudantes pueden medir sus distancias desde O, y nosotros podemos comprobar que sus relojes están sincronizados con el reloj en O habiendo enviado el observador jefe una señal luminosa en un instante convenido (en su reloj). Cada ayudante puede calcular el tiempo que tarda la señal en alcanzarle y (dejando para este tiempo de tránsito) comprobar que su reloj está de acuerdo con el reloj que está en O.

Con suficientes ayudantes, situados suficientemente cerca, habrá un ayudante bastante cerca de cualquier suceso para registrarlo esencialmente de forma instantánea. Una vez que lo ha registrado, puede, cuando le convenga, informar a los demás el resultado utilizando algún medio conveniente (como un teléfono). De esta forma, a cualquier suceso se le puede asociar un único tiempo t bien definido y medido en el sistema $\mathcal{S}$. En lo que sigue, supondré que cualquier sistema inercial $\mathcal{S}$ viene con un conjunto de ejes rectangulares $Oxyz$ y un equipo de ayudantes situados en reposo a lo largo de $\mathcal{S}$ y equipados con relojes sincronizados. Esto nos permite asignar una posición (x, y, z) y un instante t a cualquier suceso, observado en el sistema $\mathcal{S}$.

Dilatación del tiempo

Comparemos ahora medidas de tiempo realizadas por observadores en dos sistemas inerciales diferentes. Consideremos los dos sistemas familiares, $\mathcal{S}$ anclado en el suelo y $\mathcal{S}'$ en un tren que viaja en la dirección x a velocidad V relativa a $\mathcal{S}$. Examinamos ahora un **experimento mental** en el cual un observador en el tren enciende una bombilla en el suelo del tren. La luz viaja hasta el techo, donde es reflejada y vuelve a su punto de partida, donde incide sobre una fotocélula y causa un «clic» audible. Deseamos comparar los tiempos, Δt y $\Delta t'$, medidos en los dos sistemas, entre el destello cuando abandona el suelo y el clic cuando vuelve.

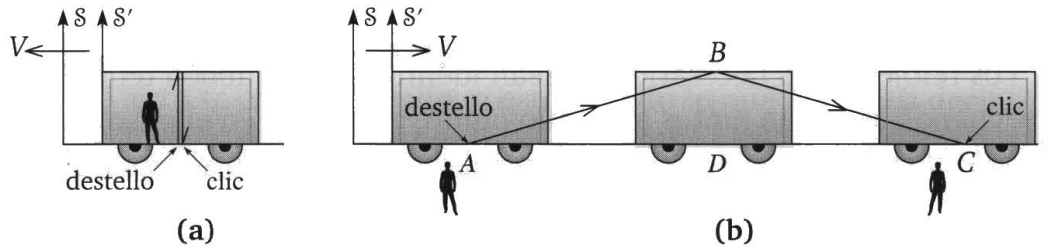


Figura 15.3. **(a)** Experimento mental visto en el sistema S'. La luz viaja en línea recta arriba y abajo de nuevo, y el destello y el clic ocurren en el mismo sitio. **(b)** Visto desde S, el destello y el clic están separados por una distancia $V\,\Delta t$. Advierta que en S son necesarios dos observadores para registrar los dos sucesos, porque ocurren en lugares distintos.

En la Figura 15.3(a) se muestra nuestro experimento visto desde el sistema S'. Si la altura del tren es h, entonces, visto desde S', la luz viaja una distancia total $2h$ a velocidad c (segundo postulado) y por ello tarda un tiempo

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}. \tag{15.5}$$

Este es el tiempo entre el destello y el clic, medido por un observador en S' (siempre que su reloj sea fiable, por supuesto).

En la Figura 15.3(b) se muestra nuestro experimento visto desde el sistema S. Concretamente, se ve el mismo rayo de luz viajar a lo largo de dos lados de un triángulo, AB y BC. Si Δt es el tiempo entre el destello y el clic (medido en S), el lado AC tiene longitud $V\Delta t$. Por consiguiente el triángulo ABD tiene por lados[7] h, $V\Delta t/2$ y $c\Delta t/2$. (Advierta que aquí es donde utilizamos el segundo postulado, que la velocidad de la luz es c en cualquier sistema). Por tanto,

$$(c\,\Delta t/2)^2 = h^2 + (V\Delta t/2)^2,$$

que podemos resolver para obtener

$$\Delta t = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2h}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{15.6}$$

donde he introducido la abreviación útil

$$\beta = \frac{V}{c}, \tag{15.7}$$

que es justo la velocidad V medida en unidades de c.

[7] Doy por supuesto que la altura del tren es la misma en cualquier sistema. Probaremos esto brevemente.

Lo llamativo de los dos resultados (15.5) y (15.6) es que no son iguales. El tiempo entre los mismos dos sucesos (el destello y el clic) tiene diferentes valores medido en dos sistemas inerciales diferentes. Específicamente,

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{15.8}$$

Dedujimos este resultado para un experimento mental en el que un destello de luz se refleja de nuevo a su fuente por un espejo situado en el techo del vagón de tren, pero la conclusión se aplica a *cualesquiera* dos sucesos que ocurran en el mismo lugar en el tren. Supongamos, por ejemplo, un observador en reposo en $\mathcal{S}'$ fuera a gritar «Por» y un momento después «Dios». En principio, podríamos encender una bombilla en el «por», y preparar un espejo que reflejaría la luz de nuevo hacia atrás para llegar en el momento del «Dios». De este modo, la relación (15.8) debe aplicar a estos dos sucesos, el «por» y el «Dios». Como la medida de estos dos sucesos no puede depender de si realmente hicimos el experimento con la luz y la fotocélula, concluimos que la relación (15.8) se debe aplicar a *cualesquiera* dos sucesos que ocurran en el mismo sitio en el sistema $\mathcal{S}'$.

Se debe evitar pensar que los relojes en alguno de los sistemas están de alguna manera funcionando incorrectamente (por el contrario, era esencial para nuestro argumento que todos los relojes, en ambos sistemas, estuvieran funcionando correctamente). Más aún, no importa qué clase particular de reloj utilizamos, así que la conclusión (15.8) aplica a todos los relojes (precisos). Es decir, *el propio tiempo*, medido en los dos sistemas, es distinto según (15.8). Tal como discutiremos en breve, esta sorprendente conclusión ha sido verificada repetidamente.

Si el sistema $\mathcal{S}'$ está realmente en reposo (respecto a $\mathcal{S}$), entonces $V = 0$, así que $\beta = 0$, y (15.8) se reduce a $\Delta t' = \Delta t$. Es decir, no hay ninguna diferencia en los tiempos a menos que $\mathcal{S}'$ se esté realmente moviendo respecto a $\mathcal{S}$. Por otra parte, a velocidades terrestres $V \ll c$, así que $\beta \ll 1$ y el denominador en (15.8) está muy cerca de uno. Esto es, a velocidades de nuestra experiencia cotidiana, los dos tiempos están muy próximos (tan próximos que sería casi imposible detectar alguna diferencia, tal como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15.1 *Diferencias de tiempo para un avión a reacción*

Supongamos que el piloto de un jet que viaja a una velocidad constante $V = 300$ m/s consigue encender una bombilla a intervalos de exactamente una hora (medidos en su sistema de referencia). Si situamos dos observadores en la Tierra para comprobar esto, ¿qué medirían para el intervalo de tiempo Δt entre dos destellos sucesivos? (Tomar la Tierra como un sistema inercial; esto es, despreciar los efectos de la rotación de la Tierra).

El intervalo requerido está dado por (15.8) con $\Delta t' = 1$ hora y $\beta = V/c = 10^{-6}$. Así que

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1\text{ h}}{\sqrt{1-10^{-12}}}$$
$$\approx 1\text{ h} \times (1 + \tfrac{1}{2} \times 10^{-12}) = 1\text{ h} + 1{,}8 \times 10^{-9}\text{ s}$$

donde para pasar a la segunda línea he utilizado la aproximación binomial.[8] En este experimento, la diferencia temporal es menor que 2 nanosegundos (1 ns $= 10^{-9}$ s). ¡No es difícil ver por qué los físicos clásicos habían fallado al intentar detectar tales diferencias!

A medida que aumentamos V, la diferencia entre los tiempos en (15.8) se hace mayor, y si dejamos que V se aproxime a c, podemos hacer la diferencia tan grande como queramos. Por ejemplo, si $V = 0{,}99c$, entonces $\beta = 0{,}99$ y (15.8) da $\Delta t' \approx 7\Delta t$. Velocidades tan altas se alcanzan rutinariamente en los aceleradores de los laboratorios de física de partículas, y la diferencia temporal predicha se confirma de manera precisa. Si hacemos $V = c$ (esto es, $\beta = 1$) en (15.8), podríamos obtener el resultado absurdo $\Delta t' = \Delta t/0$, y si hacemos $V > c$ (esto es, $\beta > 1$), podríamos obtener un valor imaginario para $\Delta t'$. Estos resultados sugieren que V debe ser siempre menor que c,

$$V < c,$$

una sugerencia que es correcta y que es uno de los más profundos resultados de la relatividad: la velocidad relativa de dos sistemas inerciales no puede nunca igualar o superar c. Es decir, la velocidad de la luz, además de ser la misma en todos los sistemas inerciales, es también el límite universal de velocidad para el movimiento relativo de cualesquiera dos sistemas inerciales.

El factor $1/\sqrt{1-\beta^2}$ aparece muchas veces en relatividad, y por ello se le ha dado su propio nombre, γ,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{15.9}$$

Es útil recordar que este nuevo factor siempre cumple $\gamma \geq 1$, y cuando $\beta \to 1$ (esto es, $V \to c$) $\gamma \to \infty$.

En términos del parámetro γ el resultado (15.8) se puede escribir de una forma un poco más compacta como

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \geq \Delta t'. \tag{15.10}$$

La asimetría de este resultado (que $\Delta t'$ nunca es mayor que Δt) parece a primera vista violar los postulados de relatividad, porque sugiere un papel especial para el sistema S'"; concretamente, que S' es el sistema especial en el cual el intervalo temporal es mínimo. Sin embargo, esto es justo como debería ser, porque en nuestro experimento mental S' *es* especial, porque es el sistema en el que los dos sucesos en cuestión (el destello y el clic) ocurren en el mismo lugar. (Esta asimetría estaba implícita en la Figura 15.3, que mostraba un observador midiendo $\Delta t'$, pero dos midiendo Δt). Para enfatizar esta asimetría, el tiempo $\Delta t'$ se renombra muchas veces como Δt_0 y (15.10) se reescribe como

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \geq \Delta t_0. \qquad (15.11)$$

El subíndice en Δt_0 es para poner de manifiesto que Δt_0 es el tiempo transcurrido en un reloj en reposo en el sistema especial en el que los dos sucesos en cuestión ocurren en el mismo lugar. Este tiempo se denomina muchas veces **tiempo propio** entre los dos sucesos. En (15.11), Δt es el tiempo correspondiente medido en *cualquier* sistema y siempre es mayor o igual que el tiempo propio Δt_0. Por este motivo, el efecto que implica (15.11) se denomina **dilatación del tiempo** y se puede enunciar sencillamente diciendo que *un reloj en movimiento se observa que atrasa (va más despacio)*. Medido por observadores en la Tierra, un reloj situado en el tren que se mueve se ve funcionar despacio.

Finalmente, debería enfatizar la simetría fundamental entre cualesquiera dos sistemas inerciales. Elegimos realizar nuestro experimento mental de tal manera que el sistema S' tenga un papel especial. (Era el sistema en el que el destello y el clic ocurrían en el mismo sitio). Pero podríamos haber realizado el experimento justo de la manera contraria, con la bombilla, el espejo y la fotocélula en reposo en la Tierra, y en este caso habríamos encontrado el efecto contrario, que $\Delta t' = \gamma \Delta t$. La ventaja de escribir la fórmula de dilatación del tiempo en la forma (15.11) es que evita el problema de recordar cuál es el sistema S, y cuál S'; el subíndice en Δt_0 siempre significa tiempo propio (el tiempo medido en el sistema en el que los dos sucesos ocurren en el mismo lugar).

Evidencia para la dilatación del tiempo

La dilatación del tiempo fue predicha en 1905 pero no fue verificada experimentalmente hasta 1941, por B. Rossi y D. B. Hall.[9] El problema era, por supuesto, conseguir un reloj que se desplazase lo suficientemente rápido como para mostrar una dilatación medible. Rossi y Hall aprovecharon los relojes naturales que tienen las

[9] B. Rossi y D. B. Hall,*Physical Review,* vol. 59, p. 223 (1941).

partículas subatómicas inestables, las cuales se desintegran (en promedio) después de un tiempo definido, característico de la partícula. El tiempo de vida de una partícula inestable se puede especificar por su **vida media**, $t_{1/2}$, el tiempo en el que la mitad de un número grande de partículas se desintegrarán. El muón es una partícula inestable que se crea en la atmósfera superior de la Tierra cuando los rayos cósmicos (en su mayoría protones y partículas alfa) del espacio exterior chocan con átomos presentes en la atmósfera. Muchos de esos muones tienen velocidades bastante cercanas a la de la luz, y viven lo suficiente para encontrar su camino hasta la superficie de la Tierra. El muón fue descubierto en 1935 por Carl Anderson en sus estudios sobre los rayos cósmicos. Hacia 1941 se estimaba que su vida media era aproximadamente $t_{1/2} = 1{,}5\,\mu s$, lo que significaba que la mitad de una muestra de muones *en reposo* se desintegraría durante ese tiempo. Si la dilatación del tiempo es correcta, la vida media de un muón en movimiento (medida por observadores situados en la Tierra) debería ser mayor en el factor γ como en (15.11). Por ejemplo, si el muón tenía velocidad $0{,}8c$, entonces $\gamma = 1{,}67$, y la vida media del muón debería ser

$$t_{1/2}(\text{a velocidad } 0{,}8c) = 1{,}67 \times t_{1/2}(\text{en reposo}) = 2{,}5\,\mu s.$$

Rossi y Hall fueron capaces de separar los muones de los rayos cósmicos según su velocidad y pudieron encontrar sus vidas medias midiendo cuántos de ellos sobrevivían en su viaje a través de la atmósfera. Aunque sus medidas tenían errores experimentales bastante grandes, fueron sin embargo lo suficientemente buenas para verificar la predicción de Einstein (15.11) y excluir la hipótesis clásica de un único tiempo universal.

Una prueba de la dilatación del tiempo con relojes hechos por los seres humanos tuvo que esperar al desarrollo de los relojes atómicos superprecisos. En 1971 cuatro relojes de este tipo fueron sincronizados con un reloj de referencia en el U. S. Naval Observatory en Washington DC y después se les hizo viajar alrededor del mundo en un avión jet y fueron llevados de vuelta al Observatorio Naval. La discrepancia observada entre el reloj de referencia y los relojes portátiles fue (273 ± 7) ns (promedio de los cuatro relojes) en concordancia excelente con el valor predicho (275 ± 21) ns.[10]

Pruebas de la dilatación del tiempo (utilizando tanto relojes naturales de partículas subatómicas como relojes atómicos hechos por los seres humanos) se han repetido con precisión siempre en aumento, y ahora no existe ninguna duda de que la relatividad del tiempo, tal como se expresa en (15.11), es cierta. Otra importante prueba que se realiza miles de veces todos los días es el Sistema de Posicionamiento Global

[10] Vea J. C. Hafele y R. E. Keating, *Science*, vol. 177, p. 166 (1972). Se realizaron dos viajes, uno yendo hacia el oeste y otro yendo hacia el este, ambos con resultados satisfactorios. Los números mencionados aquí se corresponden con el viaje más decisivo hacia el oeste. Este experimento fue realmente una prueba tanto de la relatividad general como de la relatividad especial, porque la discrepancia predicha tiene una contribución apreciable de los efectos gravitatorios.

(GPS; *Global Positioning System*). Este sistema, que es utilizado por aviones, barcos y coches para encontrar sus posiciones con un error de pocos metros, mide la llegada de señales de 24 satélites GPS situados por encima del receptor del observador y calcula la posición del receptor a partir de las posiciones conocidas de los satélites. Encontrar la posición con un error de unos pocos metros requiere una precisión de unos pocos nanosegundos, lo cual requiere a su vez tener en cuenta las diferencias relativistas entre los tiempos del satélite y los sistemas de referencia confinados en la Tierra. El éxito del GPS es un tributo diario a la corrección de la relatividad.[11]

15.5 Contracción de la longitud

Los postulados de relatividad nos han llevado a la conclusión de que el tiempo es relativo (el tiempo entre dos sucesos dados es diferente cuando se mide en sistemas inerciales diferentes) y, todavía más importante, esta conclusión nace de la experimentación. Esto, en realidad, implica que la longitud de un objeto depende también del sistema en el que se mida. Para ver esta cuestión, realizaremos un segundo experimento mental con el tren de la Figura 15.3, esta vez midiendo su longitud. Para un observador (que llamaremos Q) sobre la Tierra (sistema S) el procedimiento más sencillo es probablemente medir el tiempo Δt que tarda el tren en pasar por delante de él y calcular la longitud como [12]

$$l = V\Delta t. \tag{15.12}$$

Para encontrar la longitud l' del tren medida en el sistema en reposo del tren, un observador en el tren podría sencillamente utilizar una cinta métrica larga. Sin embargo, para poder comparar con (15.12), es conveniente usar un método diferente. Podemos situar dos observadores en el tren, uno en la parte de delante y otro en la parte de atrás, y que registren los instantes en los que pasan frente al observador Q que está sobre el suelo. La diferencia $\Delta t'$ entre estos dos tiempos es el tiempo (medido en el sistema S') que tarda el tren en pasar al observador Q, así que la longitud del tren (de nuevo medida en S') es

$$l' = V\Delta t'. \tag{15.13}$$

---

[11] Para una explicación legible del gran papel de la relatividad en el GPS, vea N. Ashby, *Physics Today*, Mayo 2002, p. 41. Como se describe allí, hay contribuciones importantes tanto de la relatividad general, como de la especial. De este modo, el éxito del GPS es una prueba de ambas teorías.

[12] Con tantas ideas clásicas familiares en tela de juicio, se puede uno preguntar si es legítimo utilizar la fórmula clásica (15.12). Sin embargo, esta es justo la definición de velocidad (velocidad = distancia/tiempo), y es ciertamente válida en cualquier sistema de referencia (siempre que midamos todas las cantidades en este mismo sistema).

Advierta que estamos haciendo una importante hipótesis aquí: la velocidad del sistema $\mathcal{S}$ relativa a $\mathcal{S}'$ es la misma que la velocidad V de $\mathcal{S}'$ relativa a $\mathcal{S}$. (Las velocidades relativas están en direcciones opuestas, pero sus magnitudes son iguales). Esto es cierto en mecánica clásica, y también lo es en relatividad, donde se deduce de los dos postulados. Los detalles del argumento requieren un poco de cuidado, pero lo fundamental es esto: consideremos la transformación desde el sistema $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$. La denotaremos temporalmente por $(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}')$. Supongamos que, antes de hacer esta transformación, rotamos los ejes un ángulo de 180° alrededor del eje y (o z), después hacemos la transformación y, finalmente, rotamos otra vez los ejes a su posición anterior. El efecto de las rotaciones es invertir la dirección del eje x (y finalmente rotarlo hacia atrás otra vez). El efecto neto de las tres operaciones es precisamente la transformación $(\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S})$. Como las rotaciones ciertamente no cambian ninguna velocidad, hemos demostrado que la velocidad de $\mathcal{S}'$ relativa a $\mathcal{S}$ es la misma que la de $\mathcal{S}$ relativa a $\mathcal{S}'$.

Comparando (15.12) con (15.13), vemos que, como los tiempos Δt y $\Delta t'$ son diferentes, lo mismo debe ser cierto de las longitudes l y l'. Para cuantificar la diferencia, debemos tener cuidado para obtener la relación entre Δt y $\Delta t'$ de forma correcta. Estos dos tiempos son los tiempos (medidos en $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$) entre dos sucesos: «cabecera del tren, observador opuesto Q» y «final del tren, observador opuesto Q». Estos dos sucesos ocurren en el mismo lugar en el sistema $\mathcal{S}$, así que Δt es el tiempo propio, y $\Delta t' = \gamma\, \Delta t$. Insertando esto en (15.13) y comparando con (15.12), vemos que $l' = \gamma l$ o

$$l = \frac{l'}{\gamma} \leq l'. \tag{15.14}$$

La longitud del tren medida en $\mathcal{S}$ es menor que la medida en $\mathcal{S}'$ (a menos que $V = 0$).

Al igual que la dilatación del tiempo, el efecto (15.14) es asimétrico, reflejando la asimetría del experimento. El sistema $\mathcal{S}'$ es especial, porque es el único sistema en el que el objeto que se mide (el tren) está en reposo. [Podríamos, por supuesto, haber realizado el experimento justo al contrario. Si hubiéramos medido la longitud de un edificio que está en reposo sobre el suelo, entonces los papeles de l y l' se habrían invertido]. Para evitar la confusión sobre cuál sistema es cuál, es habitual reescribir (15.14) como

$$l = \frac{l_0}{\gamma} \leq l_0 \tag{15.15}$$

donde l_0 denota la longitud de un objeto medida en el **sistema en reposo** del objeto (el mismo sistema en el que el objeto está en reposo), mientras que l es la longitud en *cualquier* sistema. La longitud l_0 se denomina **longitud propia** del objeto. Debido

a que $l < l_0$ (si $V \neq 0$), esta diferencia en las longitudes se denomina **contracción de la longitud** (o contracción de Lorentz, o contracción de Lorentz–Fitzgerald, dado que los dos físicos (el alemán Hendrik Lorentz, 1853–1928, y el irlandés George Fitzgerald, 1851-1901) fueron quienes sugirieron primero que debía existir algún efecto como ese). El resultado se puede parafrasear coloquialmente diciendo que *un cuerpo en movimiento se observa contraído.*

Igual que la dilatación del tiempo, la contracción de la longitud es un efecto real, bien establecido mediante la experimentación. Como ambos efectos están tan estrechamente relacionados, cualquier evidencia para uno de ellos se puede tomar como evidencia para el otro. En particular, la desintegración de una partícula de alta velocidad inestable, cuando se ve desde el sistema en reposo de la partícula, se puede interpretar como una clara evidencia de la contracción de la longitud. (Vea el Problema 15.12).

Longitudes perpendiculares a la velocidad relativa

La contracción de la longitud anteriormente deducida se aplica a longitudes en la dirección de la velocidad relativa, tales como la longitud de un tren en la dirección del movimiento. Es fácil ver que no puede haber una contracción o una expansión análoga de longitudes perpendicular al movimiento, tal como la altura del tren. Supongamos por ejemplo que hubiera una contracción e imaginemos dos observadores de pie en reposo: Q en $\mathcal{S}$ y Q' en $\mathcal{S}'$. Supongamos además que Q y Q' son igual de altos (cuando están en reposo) y que Q' está sujetando un cuchillo exactamente a la altura de la parte superior de su cabeza. Si hay una contracción, entonces, tal como mide Q, el observador Q' menguará cuando pase por delante, y a Q le arrancará la cabellera, o algo peor, cuando pase por el cuchillo. Pero, a diferencia de los dos ejemplos mentales anteriores, este experimento es completamente simétrico entre los dos sistemas: sólo hay un observador en cada sistema, y la única diferencia es la dirección de las velocidades relativas. Por tanto, también debe suceder que, visto por Q', es Q quien está contraído; de modo que el cuchillo no da en Q, y no le arranca su cabellera. La suposición de una contracción nos ha llevado a una contradicción, así que no puede haber contracción. Un argumento similar excluye la posibilidad de expansión, y, de hecho, el cuchillo sólo roza a Q cuando pasa, visto en cualquier sistema. Concluimos que las longitudes perpendiculares al movimiento relativo no cambian. La fórmula de contracción de la longitud (15.15) se aplica sólo a longitudes paralelas a la velocidad relativa.

15.6 La transformación de Lorentz

Según las nociones clásicas de espacio y tiempo, vimos que la relación matemática entre coordenadas en dos sistemas inerciales $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ es la transformación galileana

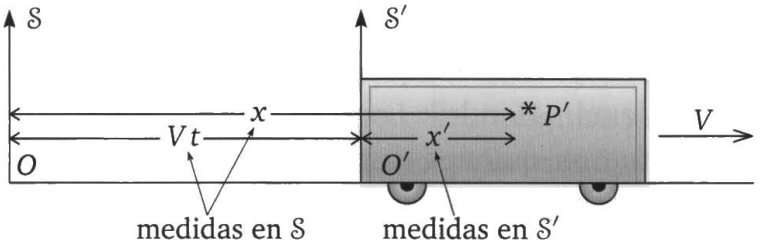


Figura 15.4. La coordenada x' es la distancia horizontal, medida en S', entre el origen O' y la quemadura en P'. Las distancias x y Vt están ambas medidas en S en el instante t de la explosión, medido en S.

(15.1). En relatividad, ésta no puede ser la relación correcta. (Por ejemplo, la dilatación del tiempo contradice la ecuación $t = t'$). Sin embargo, podemos deducir la relación correcta usando un argumento similar al utilizado en relación con la Figura 15.1 para obtener el resultado galileano. Imaginemos dos sistemas, S anclado al suelo y S' enganchado a un tren que se mueve con velocidad V relativa a S. Imaginemos, además, la explosión de una granada, que deja una quemadura en la pared del vagón en un punto P'. Las coordenadas de esta explosión son (x, y, z, t) medidas por observadores en S y (x', y', z', t') medidas por observadores en S'. El objetivo es encontrar fórmulas para x', y' z' y t' en términos de x, y, z y t. Este experimento mental está ilustrado en la Figura 15.4, que es justo como el de la Figura 15.1 excepto que ahora sabemos que debemos tener mucho cuidado al identificar los sistemas (S o S') relativos a los cuales se miden las diferentes distancias.

Como las longitudes perpendiculares a la velocidad relativa son iguales en ambos sistemas, podemos escribir inmediatamente

$$y' = y \qquad \text{y} \qquad z' = z \tag{15.16}$$

exactamente como con la transformación galileana. La coordenada x' es la distancia horizontal entre el origen O' y la quemadura en P', medida en S'. La misma distancia medida en S es $x - Vt$, porque x y Vt son las distancias desde O hasta P' y desde O hasta O' en el instante t de la explosión (medido en S). Por tanto, por la fórmula de contracción de la longitud (15.15) (x' es aquí la longitud propia)

$$x - Vt = x'/\gamma$$

o

$$x' = \gamma(x - Vt). \tag{15.17}$$

Esta es la tercera de las cuatro ecuaciones que necesitamos. Advierta que si $V \ll c$ entonces $\gamma \approx 1$ y (15.17) se reduce a la relación galileana $x' = x - Vt$.

Finalmente, para obtener una ecuación para t' podemos usar un truco sencillo. Podríamos repetir el argumento anterior con los papeles de S y S' intercambiados.

Esto es, podríamos dejar que la explosión hiciera una marca en un punto P sobre una pared fija en $\mathcal{S}$. Argumentando como antes, podríamos obtener el resultado

$$x = \gamma(x' + Vt'). \tag{15.18}$$

(Advierta que podríamos obtener este resultado directamente de (15.17) intercambiando las variables con primas con las variables sin primas y sustituyendo V por $-V$). Sustituyendo (15.17) en (15.18), podemos eliminar x' y resolver para t', para llegar a (como se debería comprobar)

$$t' = \gamma(t - Vx/c^2). \tag{15.19}$$

Ésta es la ecuación requerida para t'. Cuando $V \ll c$, podemos despreciar el segundo término y $\gamma \approx 1$, así que (15.19) se reduce a la relación galileana $t' = t$.

Agrupando los resultados (15.16), (15.17) y (15.19), obtenemos las cuatro ecuaciones requeridas:

La transformación de Lorentz

$$\left.\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - Vx/c^2). \end{aligned}\right\} \tag{15.20}$$

Estas cuatro ecuaciones reciben el nombre de **transformación de Lorentz** o **transformación de Lorentz–Einstein**, en honor a Lorentz, quien las propuso por primera vez, y a Einstein, quien fue el primero en interpretarlas correctamente. La transformación de Lorentz da las coordenadas (x', y', z', t') de un suceso, medidas en $\mathcal{S}'$, en términos de sus coordenadas (x, y, z, t) medidas en $\mathcal{S}$. Es la versión relativista correcta de la transformación clásica galileana (15.1).

Si quisiéramos conocer las coordenadas (x, y, z, t) en términos de (x', y', z', t'), podríamos resolver las cuatro ecuaciones (15.20), pero una manera más simple es sencillamente intercambiar las variables con primas y sin primas y sustituir V por $-V$. De cualquiera de las dos maneras, el resultado es la **transformación inversa de Lorentz**

$$\left.\begin{aligned} x &= \gamma(x' + Vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(t' + Vx'/c^2). \end{aligned}\right\} \tag{15.21}$$

La transformación de Lorentz expresa todas las propiedades del espacio y del tiempo que son consecuencia de los postulados de relatividad. Usándola, uno puede

calcular todas las relaciones cinemáticas entre medidas realizadas en sistemas inerciales diferentes. Hay varios ejemplos de su uso en los problemas al final de este capítulo y aquí hay un par más de ellos.

Ejemplo 15.2 *Nueva deducción de la contracción de la longitud*

Utilizar la transformación de Lorentz para volver a deducir la fórmula de contracción de la longitud (15.15). (Advierta que esto no dará una deducción alternativa de la contracción de la longitud, porque la contracción de la longitud fue usada para deducir la transformación de Lorentz. En lugar de ello obtendremos una comprobación de la coherencia).

Consideremos los dos sistemas habituales, $\mathcal{S}$ fijo al suelo y $\mathcal{S}'$ fijo a un tren que viaja en la dirección del eje x con velocidad V relativa a $\mathcal{S}$. Queremos comparar las longitudes del tren medidas en $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$. La medida en $\mathcal{S}'$ es fácil, porque el tren está en reposo en este sistema. Un observador puede, si lo desea, medir las coordenadas de x', x'_1 y x'_2 de las partes de atrás y de delante del tren, y su longitud es justo la diferencia $l' = x'_2 - x'_1$. Esta longitud es la longitud propia del tren, así que

$$l_0 = l' = x'_2 - x'_1. \tag{15.22}$$

La medida en $\mathcal{S}$ es más difícil porque el tren se está moviendo. Con suficiente cuidado, podríamos situar dos observadores Q_1 y Q_2 al lado de la vía de modo que la parte de atrás del tren pase por Q_1 exactamente en el mismo instante ($t_1 = t_2$) que la parte de delante pasa por Q_2. La longitud medida en $\mathcal{S}$ es entonces

$$l = x_2 - x_1.$$

Ahora, aplicando la transformación de Lorentz (15.20) al suceso «parte de delante del tren pasa por Q_2» obtenemos

$$x'_2 = \gamma(x_2 - Vt_2)$$

y, para el suceso «parte de atrás del tren pasa por Q_1,»

$$x'_1 = \gamma(x_1 - Vt_1).$$

Restando y recordando que $t_2 = t_1$, encontramos que

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l$$

o $l = l_0/\gamma$, que es la contracción de la longitud (15.15).

El siguiente ejemplo es una de las muchas paradojas aparentes de relatividad.

Ejemplo 15.3 *Una serpiente relativista*

Una serpiente relativista, de longitud propia 100 cm, está viajando por una mesa a $V = 0{,}6c$. Para hacer rabiar a la serpiente, un estudiante de física sujeta dos cuchillos de carnicero separados 100 cm y planea clavarlos simultáneamente sobre la mesa de manera que el de la mano izquierda se clave justo detrás de la cola de la serpiente. El estudiante razona como sigue: «La serpiente se está moviendo con $\beta = 0{,}6$, así que su longitud se contrae un factor $\gamma = 5/4$ (comprobarlo) y su longitud medida en mi sistema es 80 cm. Por tanto, el cuchillo de mi mano derecha se clava delante de la serpiente, que no resulta dañada». Este escenario se muestra en la Figura 15.5. Mientras tanto la serpiente razona esto: «Los cuchillos se aproximan hacia mí a $\beta = 0{,}6$, así que la distancia entre ellos se contrae a 80 cm, y con seguridad me cortarán cuando caigan». Usar la transformación de Lorentz para resolver esta paradoja.

Escojamos sistemas $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ de la forma habitual. El estudiante está en reposo en $\mathcal{S}$, con los cuchillos en $x_L = 0$ y $x_R = 100$ cm. La serpiente está en reposo en $\mathcal{S}'$, con su cola en $x' = 0$ y su cabeza en $x' = 100$. Para resolver la disputa, debemos encontrar dónde y cuándo caen los dos cuchillos, observados en $\mathcal{S}$ y en $\mathcal{S}'$.

En $\mathcal{S}$ los cuchillos caen simultáneamente en $t = 0$. En ese momento la cola de la serpiente está en $x = 0$. Como su longitud es 80 cm, su cabeza tiene que estar en $x = 80$ cm. [Se puede comprobar, si se quiere, usando la ecuación de transformación $x' = \gamma(x - Vt)$; con $x = 80$ cm y $t = 0$, ésta da el valor correcto $x' = 100$ cm]. Observado en $\mathcal{S}$, el experimento es como se muestra en la Figura 15.5. El cuchillo derecho cae suficientemente delante de la serpiente, el estudiante tiene razón, y la serpiente no resulta dañada.

¿Qué es lo que está mal en el razonamiento de la serpiente? Para contestar a esta pregunta, debemos examinar las coordenadas y los tiempos en los que se clavan los dos cuchillos, observados en $\mathcal{S}'$. El cuchillo izquierdo cae en $t_{\text{izq}} = 0$ y $x_{\text{izq}} = 0$. Según la transformación de Lorentz (15.20), las coordenadas de este suceso, vistas en $\mathcal{S}'$ son

$$t'_{\text{izq}} = \gamma(t_{\text{izq}} - Vx_{\text{izq}}/c^2) = 0$$

y

$$x'_{\text{izq}} = \gamma(x_{\text{izq}} - Vt_{\text{izq}}) = 0.$$

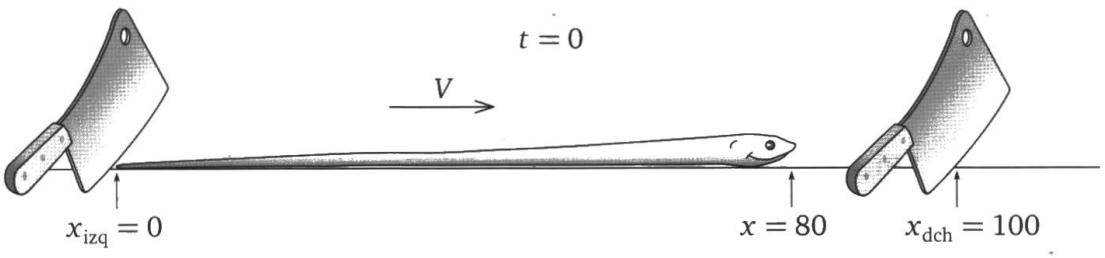


Figura 15.5. La paradoja de la serpiente, vista en el sistema del estudiante $\mathcal{S}$. Los cuchillos se clavan simultáneamente en el instante $t = 0$.

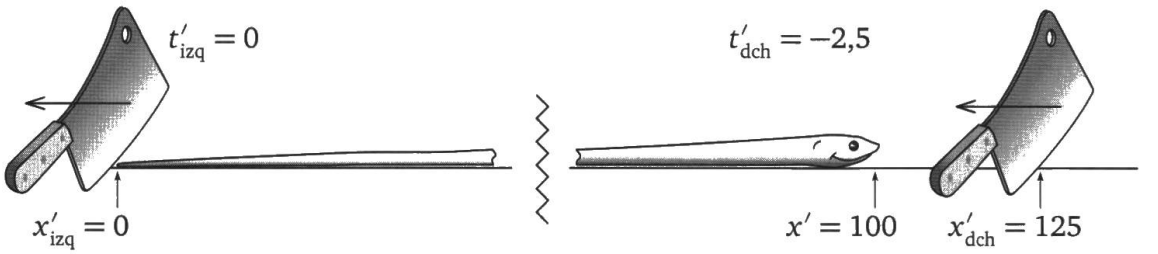


Figura 15.6. La paradoja de la serpiente, medida en el sistema de la serpiente $\mathcal{S}'$. Los cuchillos se mueven hacia la izquierda con velocidad V, y el derecho cae 2,5 ns *antes* que el izquierdo. Aun cuando los cuchillos están separados solamente 80 cm, esto les hace caer separados 125 cm.

Como se esperaba, el cuchillo izquierdo se clava justo detrás de la cola de la serpiente, en el instante $t'_{izq} = 0$, como se muestra en la Figura 15.6(a).

Hasta el momento no hay sorpresas. Sin embargo, el cuchillo derecho cae en $t_{dch} = 0$ y $x_{dch} = 100$ cm. Por tanto, visto en $\mathcal{S}'$, cae en un tiempo dado por la transformación de Lorentz como

$$t'_{dch} = \gamma(t_{dch} - Vx_{dch}/c^2) = -2{,}5 \text{ ns}.$$

(Comprobar los números por uno mismo). El punto crucial es que, vistos en $\mathcal{S}'$, *los dos cuchillos no caen al mismo tiempo*. Como el cuchillo derecho cae *antes* que el izquierdo, no acierta necesariamente a la serpiente, incluso aunque están separados sólo 80 cm (en este sistema). De hecho, la posición en la que el cuchillo derecho cae está dada por la transformación de Lorentz como

$$x'_{dch} = \gamma(x_{dch} - Vt_{dch}) = 125 \text{ cm}.$$

¡Y de hecho, el cuchillo derecho falla y no da a la serpiente!

La resolución de esta paradoja, y muchas paradojas similares, es que dos sucesos que son simultáneos en un sistema no son necesariamente simultáneos en un sistema diferente (un efecto a veces denominado **relatividad de la simultaneidad**. Tan pronto como reconozcamos que los dos cuchillos caen en instantes diferentes en el sistema de la serpiente, no hay ya ningún problema en entender cómo pueden arreglárselas los dos para no acertar a la serpiente.

15.7 Fórmula relativista de composición de velocidades

Otra importante aplicación de la transformación de Lorentz es la fórmula relativista de composición de velocidades. Esta fórmula es la respuesta a la siguiente pregunta: si un objeto (un electrón, una pelota de béisbol, un planeta) se está moviendo con

velocidad $\mathbf{v}$ relativa a un sistema inercial $\mathcal{S}$, ¿cómo podemos calcular su velocidad $\mathbf{v}'$ relativa algún otro sistema $\mathcal{S}'$? En física clásica, la respuesta a esta pregunta es la fórmula clásica de composición de velocidades: si $\mathbf{V}$ denota la velocidad de $\mathcal{S}'$ relativa a $\mathcal{S}$, entonces $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$. (Presumiblemente, siempre que se escribe esta fórmula se hace como $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$). Para el caso especial en que los ejes de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ son paralelos y $\mathbf{V}$ está en la dirección x (la configuración «estándar»), esto se convierte en

$$v'_x = v_x - V, \qquad v'_y = v_y, \qquad \text{y} \qquad v'_z = v_z. \tag{15.23}$$

Nuestra tarea ahora es encontrar el resultado relativista correspondiente.

Consideremos una partícula que se desplaza con posición $\mathbf{r}(t)$ o $\mathbf{r}'(t')$, vista en $\mathcal{S}$ o $\mathcal{S}'$. La definición de la velocidad $\mathbf{v}$ es la derivada

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{15.24}$$

donde $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ es el desplazamiento infinitesimal entre las posiciones en los instantes t_1 y $t_2 = t_1 + dt$. Ahora podemos escribir la transformación de Lorentz para (x_2, y_2, z_2, t_2) y (x_1, y_1, z_1, t_1), y tomando diferencias, encontramos que

$$dx' = \gamma(dx - V\,dt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \gamma(dt - V\,dx/c^2) \tag{15.25}$$

(Advierta que $d\mathbf{r}$ y dt cumplen exactamente las mismas ecuaciones de transformación que $\mathbf{r}$ y t. Esto es porque la transformación de Lorentz resultó ser lineal). Usando la definición (15.24), podemos escribir las componentes de $\mathbf{v}'$, y sustituyendo (15.25) encontramos para v'_x

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - V\,dt)}{\gamma(dt - V\,dx/c^2)}$$

o, cancelando los factores de γ y dividiendo arriba y abajo por dt,

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} \tag{15.26}$$

Análogamente,

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - V\,dx/c^2)}.$$

Dividiendo arriba y abajo por dt, encontramos para v'_y (y análogamente v'_z)

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x V/c^2)} \qquad \text{y} \qquad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - v_x V/c^2)}. \tag{15.27}$$

Advierta que $v'_y \neq v_y$ incluso aunque $dy' = dy$. Esto es porque $dt' \neq dt$.

Las tres ecuaciones en (15.26) y (15.27) son las **fórmulas relativistas de composición de velocidades** o la transformación relativista de velocidades. Si todas las velocidades son mucho menores que c, entonces $\gamma \approx 1$, podemos ignorar el segundo término en los denominadores, y recuperamos los resultados clásicos (15.23). Sin embargo, cuando las velocidades involucradas se aproximan a c, la transformación de velocidades relativista puede producir algunos resultados sorprendentes, como ilustran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 15.4 *Suma de dos velocidades cercanas a c*

Un cohete que viaja a velocidad $0{,}8c$ relativa a la Tierra dispara hacia delante balas con velocidad $0{,}6c$ (relativa al cohete). ¿Cuál es la velocidad de las balas relativa a la Tierra?

Si elegimos sistemas de la manera habitual, con S fijo a la Tierra y S' fijo al cohete, entonces $V = 0{,}8c$ y $v' = 0{,}6c$. Nuestro objetivo es encontrar v. La respuesta clásica es por supuesto $v = v' + V = 1{,}4c$. La respuesta relativista está dada por el inverso de (15.26), que podemos encontrar mediante el truco habitual de intercambiar las variables con primas por las variables sin primas y cambiando el signo de V. El resultado (en el cual omito los subíndices x porque todas las velocidades están en la dirección x) es

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2} \tag{15.28}$$
$$= \frac{0{,}6c + 0{,}8c}{1 + 0{,}8 \times 0{,}6} = \frac{1{,}4}{1{,}48}c \approx 0{,}95c.$$

Lo importante de esto es que cuando «sumamos» $0{,}8c$ y $0{,}6c$ obtenemos un resultado que es menor que c. De hecho, es bastante fácil demostrar que, para cualquier velocidad $v' < c$, la v correspondiente es también, automáticamente, menor que c. (Vea el Problema 15.43). Esto es, cualquier cosa que viaje con velocidad menor que c en un sistema tendrá velocidad menor que c en todos los sistemas.

Ejemplo 15.5 *Suma de dos velocidades, una de las cuales es igual a c*

El cohete del Ejemplo 15.4 dispara hacia delante una señal (un pulso de luz, por ejemplo) con velocidad c relativa al cohete. ¿Cuál es la velocidad de la señal relativa a la Tierra?

Aquí $v' = c$, así que (15.28) se convierte en

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2} = \frac{c + V}{1 + V/c} = c. \tag{15.29}$$

Es decir, una señal que viaja en la dirección x con velocidad c relativa a $\mathcal{S}'$ también tiene velocidad c relativa a $\mathcal{S}$. En realidad este resultado es cierto para cualquier dirección de desplazamiento, como se puede demostrar en el Problema 15.43. Afirma que la velocidad de la luz es invariante bajo la transformación de Lorentz, de acuerdo con el segundo postulado de relatividad (que nos llevó a la transformación de Lorentz en primer lugar).

15.8 Espacio-tiempo tetradimensional; cuadrivectores

La transformación de Lorentz (15.20) mezcla espacio y tiempo, en el sentido de que cada una de las ecuaciones para x' y t' incluye ambas x y t. El matemático ruso-alemán Hermann Minkowski (1864–1909) sugirió que esta mezcla de espacio y tiempo implica que el tiempo se debería combinar con las tres coordenadas espaciales para formar un *espacio–tiempo* tetradimensional, en el cual las transformaciones de Lorentz actúan como una especie de rotación. Antes de examinar esta sugerencia, repasemos un par de hechos sobre las rotaciones ordinarias de nuestro espacio tridimensional cotidiano.

Rotaciones en el espacio tridimensional ordinario

En la discusión de los vectores del espacio tridimensional ordinario, será conveniente cambiar la notación un poco: para cualquier elección de ejes ortogonales, utilizaré la notación mencionada en el Capítulo 1, con los mismos tres vectores unitarios denotados por $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. A las componentes de un vector general $\mathbf{q}$ las llamaré q_1, q_2, q_3, así que

$$\mathbf{q} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} q_i\mathbf{e}_i \tag{15.30}$$

donde, como siempre,

$$q_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{q}. \tag{15.31}$$

Para ajustarnos a esta notación, renombraré, de ahora en adelante, el vector de posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Ahora consideremos una rotación que lleva los ejes definidos por $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ a un segundo conjunto con vectores unitarios $\mathbf{e'}_1$, $\mathbf{e'}_2$, $\mathbf{e'}_3$. Las componentes q'_i del mismo vector con respecto a los nuevos ejes se encuentran fácilmente:

$$q'_i = \mathbf{e'}_i \cdot \mathbf{q} = \mathbf{e'}_i \cdot \sum_{j=1}^{3} q_j\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{3} (\mathbf{e'}_i \cdot \mathbf{e}_j) q_j \,. \tag{15.32}$$

Esta ecuación expresa cada una de las coordenadas q'_i en el nuevo sistema de coordenadas como una suma sobre todas las coordenadas q_j en el sistema antiguo. (Esto es, hace en las rotaciones lo que la transformación de Lorentz hace cuando pasamos entre sistemas en movimiento relativo). Los coeficientes en esta suma son los productos escalares $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$ de los vectores unitarios de los sistemas nuevo y antiguo.[13]

Podemos expresar (15.32) de forma más compacta si adoptamos la notación matricial del Capítulo 10: sea $\mathbf{R}$ la matriz cuadrada 3×3 con elementos

$$R_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j \tag{15.33}$$

y sean $\mathbf{q}$ y $\mathbf{q}'$ las columnas 3×1 formadas por las coordenadas

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{q}' = \begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{bmatrix}. \tag{15.34}$$

[Como en el Capítulo 10, es conveniente estar cómodo con esta notación. Cuando existe algún peligro de confusión, convendremos que $\mathbf{q}$ es una *matriz columna* como en (15.34), pero, cuando no exista tal peligro, continuaremos llamando a $\mathbf{q}$ un «vector» e incluso lo escribiremos como la fila (q_1, q_2, q_3)]. Con estas notaciones, la rotación (15.32) adopta la forma compacta

$$\mathbf{q}' = \mathbf{R}\mathbf{q}. \tag{15.35}$$

El efecto de rotar los ejes es multiplicar la columna $\mathbf{q}$ de coordenadas q_i por una cierta **matriz de rotación** 3×3 $\mathbf{R}$.

Ejemplo 15.6 *Una simple rotación sobre un eje*

Consideremos un conjunto de ejes rectangulares con el plano x_1x_2 escogido horizontal y el eje x_3 escogido verticalmente hacia arriba, y supongamos que rotamos estos ejes alrededor del eje x_2 un ángulo θ, para dar un nuevo conjunto de ejes como se muestra en la Figura 15.7. Encontrar la matriz de rotación $\mathbf{R}$ para esta rotación.

La matriz requerida $\mathbf{R}$ se escribe fácilmente utilizando (15.33). La inspección de la Figura 15.7 nos permite evaluar los productos escalares necesarios para obtener

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{15.36}$$

[13] Los números $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$ se denominan a menudo **cosenos direccionales** de los nuevos ejes con respecto a los antiguos, porque $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos\theta_{ij}$ donde θ_{ij} es el ángulo entre $\mathbf{e}'_i$ y $\mathbf{e}_j$.

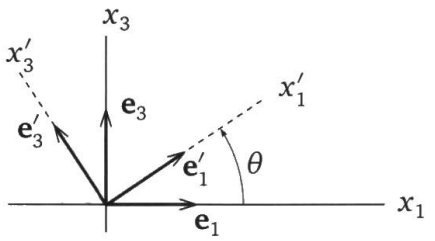


Figura 15.7. Los ejes con primas se obtienen de los ejes sin primas mediante una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor del eje x_2 (hacia dentro de la página) un ángulo θ. La dirección x_2 no se ve afectada por esta rotación y los vectores unitarios $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}'_2$ ambos apuntan hacia dentro de la página.

El efecto de la rotación $\mathbf{R}$ sobre las coordenadas de cualquier punto es $\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}$ o

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= (\cos\theta)x_1 + (\operatorname{sen}\theta)x_3 \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= (-\operatorname{sen}\theta)x_1 + (\cos\theta)x_3. \end{aligned}\right\} \tag{15.37}$$

Uno de los mejores argumentos para tratar los tres números x_1, x_2, x_3 como coordenadas en un espacio tridimensional único es que las rotaciones pueden mezclarlas como en (15.37). Uno podría imaginar el punto de vista de que las distancias verticales (x_3) fueran de alguna manera fundamentalmente diferentes de las distancias horizontales (x_1 o x_2).[14] Pero seguramente se desecharía ese punto de vista cuando se advirtiera que (15.37) junta x_1 y x_3 (y, para $\theta = \pi/2$, simplemente intercambia sus papeles). Argumentaremos ahora del mismo modo que las transformaciones de Lorentz son una especie de rotación que mezcla las coordenadas del espacio y el tiempo en un espacio-tiempo tetradimensional.

Transformaciones de Lorentz como «rotaciones» del espacio-tiempo

Una mirada a la transformación de Lorentz (15.20) debería convencernos de que mezcla x y t de una manera parecida a cómo la rotación (15.37) mezcla x_1 y x_3. Podemos hacer este paralelismo sorprendentemente parecido perfeccionando la notación. Primero, renombraremos las coordenadas espaciales x_1, x_2, x_3 como antes, e introduciremos una cuarta coordenada

$$x_4 = ct \tag{15.38}$$

[14] Por extraño que este punto de vista pueda parecer, sí que parece ser aprobado por algunas prácticas normales. Por ejemplo, las empresas de almacenamiento de agua en presas miden el volumen de agua almacenada en acres·pies, con las áreas horizontales medidas en acres, pero las profundidades verticales en pies.

donde el factor c garantiza que x_4 tiene las mismas dimensiones que x_1, x_2 y x_3. Recordando la definición $\beta = V/c$, podemos escribir la transformación de Lorentz (15.20) como

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \gamma x_1 - \gamma\beta x_4 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= -\gamma\beta x_1 + \gamma x_4. \end{aligned}\right\} \tag{15.39}$$

Podemos mejorar todavía más el paralelismo con la rotación (15.37) si nos damos cuenta de que como $\gamma \geq 1$ podemos definir un «ángulo» ϕ tal que $\gamma = \cosh\phi$. Un poco de álgebra elemental (Problema 15.30) debería convencernos de que esto hace que $\gamma\beta = \operatorname{senh}\phi$ y (15.39) se convierta en

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= (\cosh\phi)x_1 - (\operatorname{senh}\phi)x_4 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= (-\operatorname{senh}\phi)x_1 + (\cosh\phi)x_4 \end{aligned}\right\} \tag{15.40}$$

y el paralelismo es tan grande como puede ser. Es importante entender que nadie podría afirmar que la transformación de Lorentz (15.40) mezcla x_1 y x_4 *exactamente* de la misma manera que la rotación (15.37) mezcla x_1 y x_3 (las funciones trigonométricas de (15.37) se han convertido en funciones hiperbólicas en (15.40) (y un signo ha cambiado). Sin embargo, el paralelismo es grande y es un poderoso argumento tratar $x_4 = ct$ como la cuarta coordenada en un **espacio-tiempo tetradimensional** o simplemente **tetraespacio**.

Cuadrivectores

Los cuatro números x_1, x_2, x_3 y $x_4 = ct$ constituyen un vector en el espacio-tiempo tetradimensional. Tales vectores se denominan **cuadrivectores** para distinguirlos de los vectores tridimensionales, tales como el vector de posición $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Lamentablemente, se utilizan varias notaciones diferentes. Yo usaré letras ordinarias itálicas para los cuadrivectores; por ejemplo,

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\mathbf{x}, ct)$$

para el vector de posición-tiempo recién comentado. Conoceremos algunos otros cuadrivectores (por ejemplo, el cuadrimomento p, que será definido en breve). Mi notación para un cuadrivector arbitrario será

$$q = (q_1, q_2, q_3, q_4) = (\mathbf{q}, q_4),$$

donde la negrita **q**, que está formada por las tres componentes de q, se denomina *componente espacial* de q y la cuarta componente q_4 se denomina *componente temporal*.[15]

Como sucede con los trivectores, muchas veces es conveniente entender los cuadrivectores como *columnas* 4×1,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}. \tag{15.41}$$

Con esta notación, la transformación de Lorentz (15.39) se puede escribir en forma matricial como

$$x' = \Lambda x \tag{15.42}$$

donde Λ es la matriz 4×4

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad \text{[rotación espacio-temporal estándar]}. \tag{15.43}$$

Esta no es la transformación de Lorentz más general. Es la transformación entre dos sistemas en lo que hemos llamado configuración estándar, con ejes correspondientes paralelos y con la velocidad de $\mathcal{S}'$ relativa a $\mathcal{S}$ en la dirección del eje x. Para muchos propósitos, esta **transformación estándar** es la única que necesitamos considerar, pero deberíamos discutir por un momento transformaciones más generales.

Cualquier transformación de Lorentz que deja los ejes correspondientes paralelos se denomina **empujón puro** o sólo empujón (en inglés, *boost*) porque todo lo que hace es «empujarnos» de un sistema al otro viajando a velocidad constante relativa al primero, sin ninguna rotación. La transformación general incluye alguna rotación también. Si la transformación es una rotación *pura* (movimiento no relativo, sólo un cambio de orientación) entonces por supuesto $t' = t$ y sólo las tres coordenadas espaciales varían. De este modo podemos escribir una rotación pura de la forma (15.42), donde la matriz 4×4 Λ tiene la forma de bloques

[15] Esta notación tiene dos inconvenientes a tener en cuenta: (1) como todavía estaremos usando símbolos itálicos para varios escalares (por ejemplo, m para la masa), será necesario deducir por el contexto si un símbolo itálico es un cuadrivector o un escalar. (2) Ya no podemos utilizar la convención de que q es la magnitud del trivector **q**. En su lugar, utilizaremos simplemente $|\mathbf{q}|$ (aunque continuaré usando r para la magnitud del vector de posición, $r = |\mathbf{x}|$).

$$\Lambda = \Lambda_R = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R} & & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{[rotación pura]} \tag{15.44}$$

donde **R** es la matriz 3×3 de la rotación dada. (Si no ha visto este tipo de matriz en bloques antes, escriba la ecuación $x' = \Lambda_R x$ en todo su detalle, y observe cómo rota las tres coordenadas espaciales pero deja la cuarta componente igual, de modo que $t' = t$).

Si queremos escribir un empujón puro Λ_B en una dirección arbitraria **u**, podemos construirlo a partir de un par de rotaciones más un empujón estándar: primero rotamos para que el nuevo eje x_1 apunte en la dirección requerida **u**; después hacemos el empujón estándar (15.43); y entonces rotamos de nuevo hacia atrás hasta la orientación original. Finalmente, cualquier transformación de Lorentz Λ se puede expresar como el producto de un empujón seguido de una rotación conveniente, $\Lambda = \Lambda_R \Lambda_B$.[16] Para tener algo de práctica manejando distintas transformaciones de Lorentz, véanse los Problemas 15.32 hasta 15.34.

Un cuadrivector está definido como cualquier cosa que se transforme de la misma manera que el vector del espacio–tiempo $x = (\mathbf{x}, ct)$ bajo todas las transformaciones de Lorentz (15.42). La definición formal es esta:

Definición de cuadrivector

En cada sistema inercial $\mathcal{S}$, un cuadrivector está especificado por un conjunto de cuatro números $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ tal que los valores en dos sistemas $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ están relacionados por la ecuación $q' = \Lambda q$, donde Λ es la transformación de Lorentz que conecta $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$.

Obviamente el vector del espacio–tiempo $x = (\mathbf{x}, ct)$ se ajusta a esta definición, y veremos varios ejemplos más en las siguientes secciones (incluyendo el cuadrimomento p mencionado arriba).

El gran mérito de la noción de los cuadrivectores es que muchas veces nos permite comprobar casi sin esfuerzo si una ley física propuesta es invariante relativistamente. Supongamos por ejemplo que pensamos que debería haber una ley de la forma

$$q = p \tag{15.45}$$

[16] Realmente no tenemos todavía la transformación *más* general, porque los orígenes espaciales de los dos sistemas coinciden en $t = t' = 0$. Esto se puede arreglar cambiando uno de los orígenes, pero esta posibilidad adicional no nos interesa aquí.

donde sabemos que q y p son cuadrivectores. (La ley de conservación del momento tiene esta forma, $p_{\text{fin}} = p_{\text{in}}$, como veremos). Supongamos incluso que la ley se cumple en el sistema $\mathcal{S}$. Como los valores correspondientes en cualquier otro sistema $\mathcal{S}'$ son $q' = \Lambda q$ y $p' = \Lambda p$, sólo tenemos que multiplicar ambos miembros de (15.45) por Λ y vemos que $q' = p'$. Es decir, el hecho de que la ley de cuadrivectores propuesta (15.45) se cumpla en un sistema $\mathcal{S}$ asegura su validez en cualquier otro sistema $\mathcal{S}'$. Por supuesto, esto no garantiza que la ley *sea* cierta (sólo un experimento puede hacerlo), pero sí garantiza que la ley es coherente con los postulados de relatividad.

Cualquier cantidad única que es invariante bajo rotaciones se denomina **escalar rotacional** o **triescalar**; por ejemplo, la masa m de un objeto es un triescalar, y también lo es el tiempo t. De la misma forma, cualquier cantidad única que es invariante bajo transformaciones de Lorentz se denomina **escalar de Lorentz** o **cuadriescalar**. Por ejemplo, veremos que la masa m (si se define convenientemente) es un cuadriescalar; esto es, la masa de cualquier objeto tiene el mismo valor en todos los sistemas inerciales. Por otro lado, el tiempo t no es un cuadriescalar; más bien, como acabamos de ver, es la cuarta componente de un cuadrivector.

15.9 Producto escalar invariante

Un conjunto de transformaciones (tales como el conjunto de rotaciones en el triespacio, o todas las transformaciones de Lorentz en el cuadriespacio) se pueden muchas veces caracterizar por las cantidades que dejan invariantes. Nuestro interés principal aquí es, por supuesto, en las transformaciones de Lorentz, pero, para hacernos una pequeña idea de lo que deberíamos esperar, observemos primero las rotaciones.

Producto escalar invariante en el triespacio

Una de las propiedades más obvias de las rotaciones en el triespacio es que no cambian la longitud de ningún vector. Si definimos

$$s = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{15.46}$$

como la longitud al cuadrado de cualquier vector $\mathbf{x}$, entonces el valor de $s = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ en un sistema de coordenadas es el mismo que su valor $s' = \mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}'$ en cualquier otro sistema obtenido de la primera rotación. (En la terminología antes introducida, s es un escalar rotacional). Como esto es cierto para cualquier $\mathbf{x}$, podemos sustituir $\mathbf{x}$ por $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son otros dos vectores cualesquiera) y la invariancia de $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2$ implica que

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{a}' + 2\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}' + \mathbf{b}'\cdot\mathbf{b}'. \tag{15.47}$$

Cancelando los términos que ya sabemos que son iguales, encontramos que

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'. \tag{15.48}$$

En otras palabras, la invariancia de la longitud de cualquier trivector bajo rotación implica que el producto escalar de cualquier trivector es invariante. Emplearemos un argumento similar para el producto escalar del cuadriespacio en un momento.

Producto escalar invariante en el cuadriespacio

Podemos construir un producto escalar en el cuadriespacio con varias de las propiedades de su análogo tridimensional. Para cualquier cuadrivector $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\mathbf{x}, ct)$, definamos

$$s = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = r^2 - c^2t^2. \tag{15.49}$$

Esta s es obviamente una generalización de la longitud al cuadrado tridimensional, pero observe bien el signo menos en el cuarto término. (Es por este signo menos por lo que las transformaciones de Lorentz del espacio-tiempo no son exactamente análogas a las rotaciones del espacio ordinario). La cantidad s es invariante bajo transformaciones de Lorentz, como podemos demostrar fácilmente: consideremos primero el empujón estándar (15.39). Bajo esta transformación, la cantidad s se convierte en

$$\begin{aligned} s' &= x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2 \\ &= \gamma^2(x_1 - \beta x_4)^2 + x_2^2 + x_3^2 - \gamma^2(-\beta x_1 + x_4)^2 \\ &= \gamma^2(1-\beta^2)x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \gamma^2(1-\beta^2)x_4^2 \\ &= s \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue porque $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$. Por tanto, la cantidad s es invariante bajo el empujón estándar. Pero hemos visto que cualquier transformación de Lorentz se puede construir a partir de un empujón estándar y rotaciones, y s permanece ciertamente invariante bajo una rotación (porque r^2 y t son invariantes separadamente bajo rotación). Por consiguiente s es invariante bajo *cualquier* transformación de Lorentz.

Antes de discutir la importancia de la nueva cantidad invariante s, podemos utilizarla para definir un **producto escalar invariante** en el cuadriespacio. Para cualesquiera dos cuadrivectores $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, definimos[17]

[17] ¡Estemos alerta! Los físicos están igualmente divididos entre aquellos que usan la definición (15.50) y aquellos que ponen un signo menos delante de la expresión completa. Ambas convenciones tienen sus ventajas y sus desventajas.

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4. \tag{15.50}$$

(De nuevo, observe bien el signo menos en la cuarta componente; este «producto escalar» es ligeramente distinto del producto escalar habitual en el espacio ordinario). Obviamente el invariante s de (15.49) es justo $s = x \cdot x$. Y, como con las rotaciones, el argumento que condujo desde (15.47) hasta (15.48) implica que debido a que $x \cdot x$ es invariante para cualquier cuadrivector x, el producto escalar $x \cdot y$ es invariante para cualesquiera dos cuadrivectores x e y. Veremos que el producto escalar $x \cdot y$ juega un gran papel en relatividad, igual que lo hace el producto ordinario $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ en física clásica. El producto escalar de cualquier cuadrivector x consigo mismo se escribe muchas veces como $x \cdot x = x^2$, y se puede denominar la «longitud invariante al cuadrado» de x, pero no se debe uno confundir por esta terminología y pensar que x^2 es positiva. Por el contrario, x^2 puede ser obviamente positiva, negativa o cero.

Para que sirva de referencia, podemos reescribir la invariancia de $x \cdot y$ como una propiedad de las matrices de Lorentz Λ: sabemos que $x \cdot y = x' \cdot y'$ sean cuales sean los valores de x e y, siempre que $x' = \Lambda x$ e $y' = \Lambda y$ donde Λ es cualquier transformación de Lorentz. Por tanto, podemos decir que, para cualquier transformación de Lorentz Λ,

$$x \cdot y = (\Lambda x) \cdot (\Lambda y) \tag{15.51}$$

para cualesquiera dos columnas de cuatro números x e y.

Para entender de dónde vino el producto escalar, consideremos un experimento en el que una bombilla en el origen $\mathbf{x} = 0$ se enciende en el instante $t = 0$ en un sistema $\mathcal{S}$. El destello de luz se propagará a velocidad c, así que en cualquier instante posterior t ocupará la esfera $r^2 = c^2 t^2$. Usando esta nueva notación, podemos decir que el frente de onda que se propaga está localizado por la condición $x \cdot x = r^2 - c^2 t^2 = 0$. Ahora bien, la invariancia de $x \cdot x$ implica que $x \cdot x = 0$ si y sólo si $x' \cdot x' = 0$ en cualquier otro sistema $\mathcal{S}'$. Por tanto una onda esférica que se propaga con velocidad c vista en $\mathcal{S}$ será una onda esférica que se propaga con velocidad c en $\mathcal{S}'$, y viceversa. Vemos que la invariancia del producto escalar $x \cdot x$ es un reflejo del segundo postulado, que la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales.

15.10 El cono de luz

El producto escalar $x \cdot x$ nos permite dividir el espacio-tiempo en cinco regiones físicamente distintas. Para ayudar a visualizarlo, es conveniente ignorar una de las

dimensiones espaciales (x_3 por ejemplo), de manera que podemos representar las restantes dos dimensiones espaciales horizontalmente y $x_4 = ct$ verticalmente hacia arriba, como en la Figura 15.8. (Matemáticamente, esto supone confinar nuestra atención al «plano» $x_3 = 0$). Consideremos otra vez la luz de una bombilla que se enciende en el origen del espacio-tiempo O (esto es, encendida en $\mathbf{x} = 0$ cuando $t = 0$). A medida que pasa el tiempo, la luz se desplaza hacia fuera en el plano x_1x_2 sobre un círculo en expansión con $r^2 = c^2t^2$, y éste barre el medio cono superior mostrado en la Figura 15.8. Este cono, denominado **cono de luz futuro**, es por tanto el conjunto de todos los puntos del espacio-tiempo que serían visitados por la luz que proviene del origen O. Matemáticamente, es el conjunto de todos los puntos del espacio–tiempo $x = (\mathbf{x}, ct)$ que cumplen $x \cdot x = r^2 - c^2t^2 = 0$ y $t > 0$.

La mitad de abajo del cono mostrado en la Figura 15.8 se denomina **cono de luz pasado** y es el conjunto de todos los puntos del espacio–tiempo $x = (\mathbf{x}, ct)$ con la propiedad de que la luz emitida desde x podría posteriormente pasar a través del origen, O. El cono de luz completo (futuro y pasado) está compuesto de líneas rectas que representan la trayectoria de cualquier rayo que pasa por el origen. Como la luz viaja a velocidad c, y x_4 se eligió astutamente que fuera $x_4 = ct$, estas rectas tienen pendiente 1, así que la superficie del cono de luz (si estuviera dibujada a escala) forma un ángulo de 45° con el eje de tiempos. Como un cono de luz está definido por la condición de que $x \cdot x = 0$ y como $x \cdot x$ es invariante (tiene el mismo valor en todos los sistemas), se sigue que el cono de luz es por sí mismo un concepto invariante.

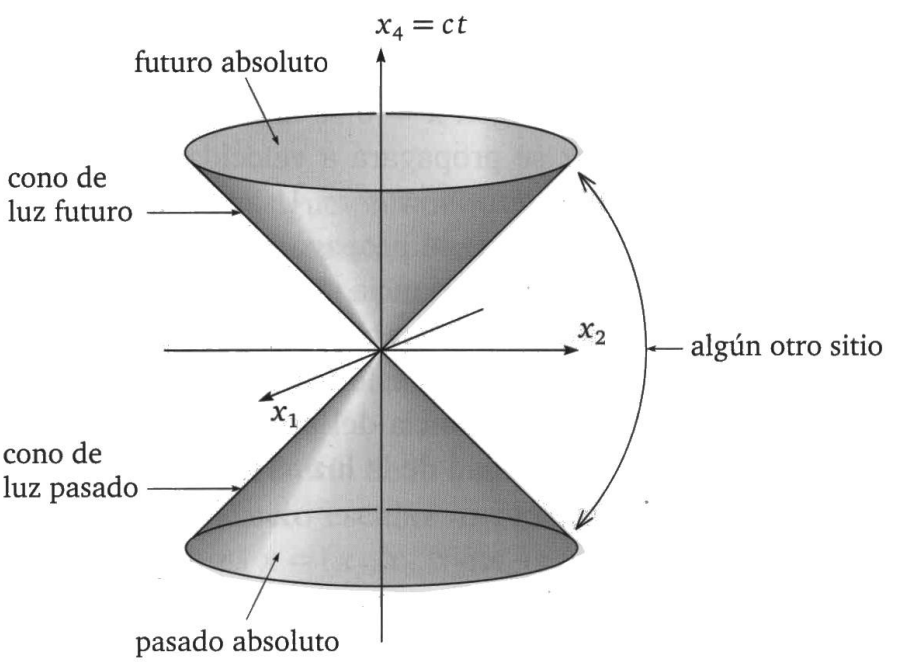


Figura 15.8. El cono de luz está definido por la condición $x \cdot x = r^2 - c^2t^2 = 0$ y divide el espacio-tiempo en cinco partes diferentes: los conos de luz futuro y pasado, con $t > 0$ y $t < 0$ respectivamente; los interiores de los conos de luz futuro y pasado, denominados el futuro absoluto y el pasado absoluto; y la parte de fuera del cono, denominada «algún otro sitio».

Esto es, observadores en cualesquiera dos sistemas estarán siempre de acuerdo en cuáles puntos están sobre el cono de luz.

Interior del cono de luz; futuro y pasado

Consideremos ahora un punto del espacio–tiempo P, con coordenadas $x = (\mathbf{x}, ct)$, situado *dentro* del cono de luz futuro. Éste obviamente tiene $t > 0$ y $r^2 < c^2t^2$ o

$$\left.\begin{array}{l} x_4 > 0, \text{ y} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2 \qquad (\text{o } x\cdot x < 0). \end{array}\right\} \tag{15.52}$$

Estas dos condiciones tienen una consecuencia notable: advierta primero que como $t > 0$, podemos afirmar que cualquier suceso que ocurra en P es posterior que cualquier suceso en O, al menos observado en el sistema $\mathcal{S}$ en el cual medimos las coordenadas x. ¿Pero qué sucede con algún otro sistema $\mathcal{S}'$? Para contestar a esta pregunta, advierta que la segunda condición en (15.52) es justo que $x\cdot x < 0$, y sabemos que $x\cdot x$ es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Por tanto $x'\cdot x'$ es también negativo, y la segunda condición se cumple en $\mathcal{S}'$ también. Para ver que la primera condición se cumple también en $\mathcal{S}'$, supongamos primero que $\mathcal{S}'$ está relacionado con $\mathcal{S}$ por el empujón estándar de Lorentz (15.39), bajo el cual

$$x_4' = \gamma(x_4 - \beta x_1). \tag{15.53}$$

Ahora bien, sabemos que $|\beta| < 1$ y la segunda condición en (15.52) garantiza que $|x_1| < x_4$. Por tanto $x_4' > 0$, y la primera condición se cumple también en $\mathcal{S}'$. Como cualquier transformación de Lorentz se puede construir a partir de un empujón estándar y rotaciones (y las rotaciones no cambian x_4 en absoluto), concluimos que ambas condiciones (15.52) se cumplen en todos los sistemas si se cumplen en un sistema. En otras palabras, la afirmación de que P está dentro del cono de luz futuro es una afirmación de invariante de Lorentz. En concreto, si P está dentro del cono de luz futuro, entonces todos los observadores estarán de acuerdo en que un suceso que ocurre en P es posterior que uno en O. Por esta razón, el interior del cono de luz futuro se denomina muchas veces el **futuro absoluto** («absoluto» porque todos los observadores están de acuerdo en que P está en el futuro de O. De manera análoga, si P está dentro del cono de luz pasado, entonces P es *anterior* que O medido por todos los observadores inerciales, y esta región se denomina **pasado absoluto**. (Vea el Problema 15.39).

Hasta aquí hemos considerado el cono de luz con su vértice en el origen del espacio-tiempo O. Éste está definido por los rayos de luz que resultan pasar a través de O. Si consideramos en lugar de ello, luz que pasase a través de otro punto del espacio-tiempo, Q, esto definiría un cono de luz con su vértice en Q (el cono de luz de Q). Este cono parecería justo como el de la Figura 15.8, excepto que el vértice estaría en un punto arbitrario Q en vez de en el origen O, como se muestra en la

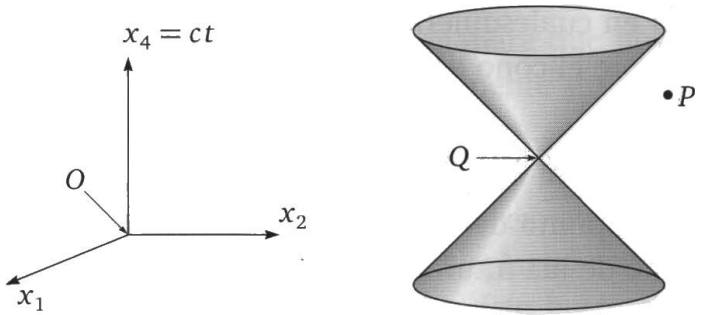


Figura 15.9. El cono de luz de un punto arbitrario del espacio-tiempo Q con coordenadas $x_Q = (\mathbf{x}_Q, ct_Q)$ consiste en todos los rayos de luz que pasan a través de Q. El punto mostrado como P está fuera del cono de luz de Q.

Figura 15.9. Cualquier punto P en este cono debe cumplir $(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q)^2 = c^2(t_P - t_Q)^2$, de modo que

$$(x_P - x_Q)^2 = 0 \qquad (P \text{ dentro del cono de luz de } Q). \tag{15.54}$$

El interior del cono de luz futuro de Q es el futuro absoluto de Q, cuyos puntos son todos vistos más tarde que Q por todos los observadores inerciales. Es decir, para cualquier punto P dentro del cono de luz futuro de Q, todos los observadores están de acuerdo en que $t_P > t_Q$.

Exterior del cono de luz; vectores tipo espacio

La situación es completamente diferente para un punto P que está *fuera* del cono, como en la Figura 15.9. Primero, la condición para que P esté fuera es que

$$(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q)^2 > c^2(t_P - t_Q)^2, \tag{15.55}$$

o, equivalentemente

$$(x_P - x_Q)^2 > 0 \qquad (P \text{ fuera del cono de luz de } Q). \tag{15.56}$$

Esta condición es simétrica entre P y Q. Por consiguiente, si P está fuera el cono de luz de Q, entonces Q está fuera del cono de luz de P, y viceversa. Está claro de la Figura 15.9 que existen puntos P fuera del cono de luz de Q, con P posterior que Q (esto es, $t_P > t_Q$), y otros para los que P y Q son simultáneos ($t_P = t_Q$), y todavía otros con P anteriores a Q ($t_P < t_Q$). No hay nada reseñable sobre esta afirmación; es una consecuencia directa de la geometría de la Figura 15.9. Lo que *es* reseñable es la siguiente proposición (que demostraré directamente):

Proposición Sea P un punto cualquiera del espacio-tiempo fuera del cono de luz de un segundo punto Q. Entonces

(1) existen sistemas $\mathcal{S}$ en los que $t_P > t_Q$

pero

(2) también existen sistemas S' en los que $t'_P = t'_Q$

y

(3) también existen sistemas S'' en los que $t''_P < t''_Q$.

Esta sorprendente proposición implica que el tiempo que ordena dos sucesos dados, cada uno fuera del cono de luz del otro, puede ser diferente en diferentes sistemas: donde un observador dice que el suceso A ocurrió antes del suceso B, un segundo observador puede percibirlos al revés (y un tercero puede percibirlos como simultáneos). Esto tiene profundas implicaciones relacionadas con la noción de **causalidad**: si un suceso A (una explosión, por ejemplo) es la causa de otro suceso B (el colapso de un edificio distante), entonces A debe obviamente ocurrir primero en el tiempo, porque las causas siempre preceden a sus efectos. De acuerdo con nuestra proposición, si el punto del espacio-tiempo P está fuera del cono de luz de Q, entonces ni Q ni P es primero en el tiempo sin ambigüedad. (En algunos sistemas es uno de ellos, y en algunos sistemas es el otro). Por tanto, nada que ocurra en Q puede ser la causa de nada que ocurra en P, al revés. Ahora, cualquier tipo de señal que viaja desde Q hasta P tendría que viajar con velocidad mayor que c. [Esto se deduce de (15.55)]. Al contrario, si una señal que emana de Q tuviera velocidad mayor que c, entonces podría viajar hasta algún punto P fuera del cono de luz de Q. Se sigue que *ninguna influencia causal puede viajar más rápido que la velocidad de la luz.*[18] Debido a que la región fuera del cono de luz de Q es completamente inmune a nada que suceda en Q, esta región se denomina a veces «**algún otro sitio**» de Q.

Para simplificar la prueba de la proposición, pongamos el punto Q en el origen O, y abreviemos las coordenadas de P a $x = (\mathbf{x}, ct)$. (El caso general no es más difícil; es sólo un poco más complicado en lo referente a la notación). Pero haciendo una rotación si es necesario, podemos poner $\mathbf{x}$ en el eje x_1 positivo, de modo que

$$x = (x_1, 0, 0, x_4). \tag{15.57}$$

Ahora supongamos que el enunciado (1) de arriba es cierto (de modo que $x_4 > 0$), y probemos los enunciados (2) y (3). [Obviamente uno de los enunciados debe ser cierto, y se puede comprobar fácilmente que nuestros argumentos funcionan igualmente comenzando desde (2) o desde (3)]. Realicemos ahora un empujón estándar (15.39) a un nuevo sistema S' en el cual

$$x'_4 = \gamma(x_4 - \beta x_1). \tag{15.58}$$

Como P está fuera del cono de luz de O, $\mathbf{x}^2 > c^2t^2$ que para el vector (15.57) significa que $x_1 > x_4$. Entonces podemos elegir $\beta = x_4/x_1 < 1$, y, de acuerdo con (15.58), $x'_4 = 0$. Es decir, $t' = 0$, y hemos demostrado el enunciado (2) de arriba para el caso en que $Q = O$. Si P estaba fuera del cono de luz de un punto arbitrario Q, el empujón

[18] Si la señal causal pudiera tener una velocidad mayor que c, entonces podría viajar desde Q a algún P fuera del cono de luz de Q, pero acabamos de ver que esto es imposible.

correspondiente daría un vector $x'_P - x'_Q$ con su cuarta componente igual a cero, y por tanto $t'_P = t'_Q$, de nuevo como se requería.

Un cuadrivector cuya cuarta componente es cero se puede describir como un vector de espacio puro, y uno que se puede traer a esta forma mediante una transformación de Lorentz se denomina **tipo espacio**. Es decir, un cuadrivector es tipo espacio si existe un sistema en el cual es un vector de espacio puro, con cuarta componente cero. Con esta terminología podemos decir que la parte de fuera del cono de luz está compuesta por todos los vectores de tipo espacio. Análogamente, podemos parafrasear el resultado sobre relaciones causales diciendo que, si la separación $x_P - x_Q$ de dos puntos P y Q es de tipo espacio, entonces nada que suceda en P puede influir sobre lo que pase en Q, ni viceversa.

Para probar el enunciado (3) [suponiendo cierto el enunciado (1)] sólo tenemos que observar de nuevo la transformación (15.58). Como $x_1 > x_4$ podemos elegir β un poco mayor que x_4/x_1 pero todavía menor que 1, y, con esta elección, obtenemos un sistema (digamos $\mathcal{S}''$) en el que $t'' < 0$ (o, en general, $t''_P < t''_Q$) como se requería.

Vectores tipo tiempo

Un argumento similar al anteriormente expuesto para los vectores tipo espacio (Problema 15.44) muestra que si un cuadrivector q está dentro del cono de luz (esto es $q \cdot q < 0$), entonces existe un sistema $\mathcal{S}'$ en el que tiene la forma de tiempo puro $q' = (0, 0, 0, q'_4)$. Naturalmente, describimos vectores dentro del cono de luz como de **tipo tiempo**. Esto se puede subdividir en vectores tipo tiempo futuro (con $q_4 > 0$) y tipo tiempo pasado (con $q_4 < 0$).

Un ejemplo importante de vector tipo tiempo futuro es el cuadrivector desplazamiento dx de cualquier partícula material en un tiempo dt. Como discutiremos en breve, una partícula material se puede definir como cualquier partícula con masa positiva ($m > 0$). De manera equivalente (como veremos), es cualquier partícula para la cual, en cualquier instante dado, existe un sistema en reposo; esto es, un sistema en el que la partícula está en reposo, con $v = 0$. Es un hecho experimental que todos los constituyentes normales de la materia (electrones, protones, neutrones) tienen esta propiedad, y asimismo todos los compuestos, tales como átomos, moléculas, pelotas de béisbol y estrellas.[19] Supongamos ahora que, entre los instantes t y $t + dt$, una partícula material se desplaza desde $\mathbf{x}$ hasta $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$, y consideremos el cuadrivector desplazamiento

[19] Como discutiremos en la Sección 15.16, la única partícula común que no tiene esta propiedad es el fotón, la partícula de la luz. Como ésta viaja a velocidad c en todos los sistemas, ciertamente no tiene sistema en reposo. Naturalmente, no tratamos un fotón como una partícula material.

$$dx = (d\mathbf{x}, c\,dt) = (\mathbf{v}, c)\,dt$$

En el sistema en reposo de la partícula, $d\mathbf{x} = 0$, y dx tiene la forma de tiempo puro $dx = (0, 0, 0, cdt)$. Por tanto, dx es de tipo tiempo en todos los sistemas, y $dx^2 < 0$. Como

$$dx^2 = (\mathbf{v}^2 - c^2)\,dt^2 < 0,$$

concluimos que $\mathbf{v}^2 < c^2$ en todos los sistemas; esto es, las partículas materiales no pueden viajar con velocidades mayores o iguales que la velocidad de la luz. Advierta que este es el tercer sentido en que hemos probado que la velocidad de la luz actúa como un límite universal de velocidad: (1) la velocidad relativa de cualesquiera dos sistemas inerciales es siempre menor que c; (2) en cualquier sistema inercial la velocidad de cualquier señal causal es siempre menor o igual que c; y ahora (3), que en cualquier sistema inercial la velocidad de cualquier partícula material es menor que c.

15.11 Regla del cociente y el efecto Doppler

Como una bonita aplicación de las propiedades de los cuadrivectores, discutiremos ahora el efecto Doppler (el cambio en frecuencia de una onda debido al movimiento de la fuente de la onda o del observador). Antes de hacerlo necesitamos deducir otra propiedad importante de los cuadrivectores, la regla del cociente.

Regla del cociente

Supongamos que hallamos una cantidad k que está especificada por cuatro números $k = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ en todos los sistemas inerciales $\mathcal{S}$. Es naturalmente tentador pensar que k es un cuadrivector, pero esto no es necesariamente cierto. Por ejemplo, al discutir el movimiento de un objeto de masa m, carga q, volumen V y temperatura T, podríamos definir

$$k = (m, q, V, T),$$

y este conjunto de cuatro números sería definido en cada sistema, pero obviamente no es realmente un cuadrivector; esto es, su valor en un sistema $\mathcal{S}$ no está relacionado con el valor en otro sistema $\mathcal{S}'$ por la transformación Lorentz $k' = \Lambda k$. Aunque este ejemplo puede parecer un poco artificial, muestra claramente que no toda cantidad k con cuatro componentes es necesariamente un cuadrivector. Por otro lado, sí que k *es* un cuadrivector si cumple las condiciones del siguiente teorema:

Regla del cociente

Supongamos que se sabe que x es un cuadrivector y que, en todo sistema inercial, $k = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ es un conjunto de cuatro números, y supongamos incluso que para cada valor de x la cantidad $\phi = k \cdot x = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 - k_4x_4$ resulta tener el mismo valor en todos los sistemas (esto es, $\phi = k \cdot x$ es un cuadriescalar), entonces k es un cuadrivector.

La prueba de esta regla es sorprendentemente simple. Primero, que ϕ sea un cuadriescalar implica que

$$k \cdot x = k' \cdot x'. \tag{15.59}$$

Pero de (15.51) sabemos que para cualquier transformación de Lorentz Λ

$$k \cdot x = (\Lambda k) \cdot (\Lambda x)$$

Ahora, por hipótesis, x es un cuadrivector, así que podemos sustituir Λx por x', para obtener

$$k \cdot x = \Lambda k \cdot x'. \tag{15.60}$$

Comparando (15.59) y (15.60), vemos que

$$k' \cdot x' = (\Lambda k) \cdot x'.$$

Esta ecuación es cierta para cualquier elección de x'. Si elegimos $x' = (1, 0, 0, 0)$, entonces nos dice que la primera componente de k' es igual que la primera componente de Λk, y continuando de esta manera podemos mostrar ahora que las cuatro componentes son iguales, de modo que

$$k' = \Lambda k,$$

que muestra que k (el «cociente» del escalar ϕ y el vector x) es de hecho un cuadrivector. Armados con esta regla del cociente, volvamos al efecto Doppler.

Efecto Doppler

Cuando pensamos en el efecto Doppler, probablemente pensemos en el efecto Doppler del sonido. El sonido de una sirena de policía que se acerca rápidamente hacia nosotros tiene un tono más agudo, y luego (a medida que nos pasa y se aleja) un tono más grave, que cuando la sirena está estacionaria; cuando un tren se aleja pasada la campana de cruce, los pasajeros oyen primero un tono más agudo a medida que el tren se aproxima a la campana, y después un tono más grave cuando el tren se aleja.

Existe un efecto correspondiente con la luz y todas las demás formas de ondas electromagnéticas. El famoso «corrimiento al rojo» de la luz de las estrellas es utilizado cotidianamente por los astrónomos para encontrar a qué velocidad se están alejando de la Tierra (e, indirectamente, a qué distancia están); en el «enfriamiento Doppler» de los átomos, el corrimiento Doppler de la luz láser «visto» por un átomo en movimiento se utiliza para frenar selectivamente átomos que se desplazan rápidamente y con ello llevar grupos de átomos hasta temperaturas muy bajas; y en la autopista, el corrimiento Doppler de un radar que rebota en la parte delantera de nuestro coche es utilizado por la policía para medir nuestra velocidad. Para deducir la fórmula del corrimiento Doppler de la luz debemos trabajar de manera relativista. (¡La luz viaja a la velocidad de la luz!) Armados con nuestros conocimientos sobre cuadrivectores, veremos que la deducción es sorprendentemente fácil.

Cualquier onda plana sinusoidal tiene la forma

$$\phi = A\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t - \delta). \tag{15.61}$$

Aquí, la naturaleza de la función ϕ depende de la onda bajo consideración; para una onda de sonido, se podría tomar el cambio en la presión producido por el sonido; para la luz, podría ser cualquier componente del campo electromagnético. El vector $\mathbf{k}$ se denomina **vector de onda**; su dirección es la dirección de propagación de la onda y su magnitud es $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$, donde λ es la longitud de onda; ω es la frecuencia angular, $\omega = 2\pi\nu$, donde ν es la frecuencia ordinaria; y δ es un cambio de fase constante (normalmente no muy interesante). La velocidad de la onda es $v = \omega/|\mathbf{k}|$; para la luz en el vacío, ésta es por supuesto c, así que $\omega = c|\mathbf{k}|$.

Nuestro interés principal con la onda plana (15.61) es la fase $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t$. Es imposible resistirse a escribirlo como un producto escalar en cuatro dimensiones

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t = k\cdot x, \tag{15.62}$$

donde como siempre $x = (\mathbf{x}, ct)$ y k denota el **cuadrivector de onda**,

$$k = (\mathbf{k}, \omega/c). \tag{15.63}$$

Para probar que k definido de esta manera realmente es un cuadrivector, nos damos cuenta de que la fase $k\cdot x$ en cualquier punto x determina la posición en la onda relativa a los valles y las crestas de la onda. Como esto debe ser igual en cualquier sistema, se sigue que $k\cdot x$ es un cuadriescalar, y como x es ciertamente un cuadrivector, la regla del cociente garantiza que k es un cuadrivector como su nombre implica. Como la cuarta componente de k es ω/c y puesto que sabemos cómo se transforma k, estamos preparados para definir la frecuencia de una señal de luz medida en un sistema relativo al cual la fuente se está moviendo.

El experimento que tenemos en mente se muestra en la Figura 15.10. Un observador en reposo en el sistema $\mathcal{S}$ observa un vagón de tren que se desplaza a

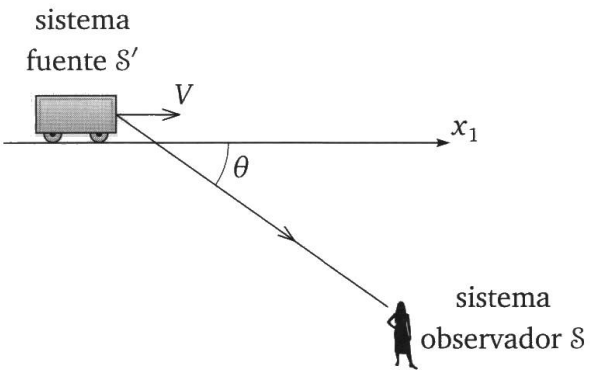


Figura 15.10. El experimento Doppler. Una fuente de luz se desplaza en la dirección del eje x_1 con velocidad V relativa al sistema $\mathcal{S}$. El observador en el sistema $\mathcal{S}$ ve la luz de la fuente formando un ángulo θ con el eje x_1. La frecuencia de la luz es ω medida en $\mathcal{S}$ y $\omega' = \omega_0$ medida en el sistema en reposo de la fuente $\mathcal{S}'$.

velocidad V en la dirección del eje x_1. El vagón está emitiendo luz de frecuencia angular $\omega' = \omega_0$, medida en el sistema en reposo del vagón $\mathcal{S}'$. Si la luz que alcanza al observador viaja formando un ángulo θ con el eje x_1, queremos conocer su frecuencia ω, medida por el observador.

El cuadrivector de onda k de la luz que llega al observador tiene la forma $k = (\mathbf{k}, k_4)$ donde $k_4 = \omega/c = |\mathbf{k}|$. Según el empujón estándar de Lorentz,

$$k'_4 = \gamma(k_4 - \beta k_1).$$

Haciendo $k'_4 = \omega'/c$, $k_4 = \omega/c$, y $k_1 = |\mathbf{k}| \cos\theta = (\omega/c)\cos\theta$, encontramos que

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta\cos\theta),$$

Despejando ω y sustituyendo ω' por ω_0, obtenemos la **fórmula Doppler relativista para la luz**

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)}, \tag{15.64}$$

donde ω_0 es la frecuencia de la luz en el sistema en reposo de la fuente, ω es la frecuencia observada en el sistema donde la fuente tiene velocidad $\mathbf{V}$, y θ es el ángulo entre $\mathbf{V}$ y la luz observada.

15.12 Masa, cuadrivelocidad y cuadrimomento

Se puede estar un poco impaciente por el hecho de que hasta el momento, después de once secciones, hemos discutido sólo la cinemática de la relatividad. De hecho, esto

refleja una verdad sobre la relatividad (que muchas de sus características más interesantes, como la dilatación del tiempo y la imposibilidad de señales causales que viajen a velocidades mayores que la de la luz) son puramente cinemáticas. Sin embargo, ya va siendo hora de abordar la dinámica relativista, y eso es lo que vamos a hacer ahora.

En esta sección introduciré las definiciones relativistas de la masa y el momento de un objeto. Es importante reconocer que no existe realmente algo como la definición «correcta» de un concepto como la masa o el momento cuando nos introducimos en la *terra incognita* de una nueva materia como la relatividad. Como Humpty Dumpty, tenemos, en principio, derecho a definir palabras del modo que queramos.[20] Sin embargo, podemos esperar que satisfagan ciertos requisitos razonables: cualquier definición de momento debería coincidir tanto como sea posible con la definición no relativista en el dominio en que esta última ha demostrado ser útil (a saber, cuando la velocidad del objeto es mucho menor que c). Nos gustaría que las nuevas definiciones compartieran con sus homólogas no relativistas todas las propiedades que parecen esenciales para el concepto en cuestión. Por ejemplo, buscaremos una definición de momento relativista con la propiedad de que el momento total de un sistema aislado se conserve.

La masa en relatividad

Existen, de hecho, dos definiciones diferentes de masa en relatividad, las cuales cumplen los requisitos razonables, y ambas tienen sus partidarios. La definición que utilizaré se puede describir como la *masa invariante* y está respaldada por la mayoría de los físicos en ejercicio. La otra, denominada la *masa variable*, está respaldada mayoritariamente por los divulgadores de la relatividad, porque hace que algunas ideas parezcan más fáciles al principio. Después describiré brevemente la masa variable, pero a lo largo de este capítulo usaré la masa invariante, que se define como sigue: dado cualquier objeto en reposo (o en movimiento con velocidad mucho, mucho menor que c), sabemos que la definición no relativista de masa da una cantidad bien definida y útil. Para poner de relieve esta definición, esta masa se denomina muchas veces **masa en reposo**. Para definir la masa del mismo objeto que viaja a alta velocidad, adoptaremos la siguiente definición, vergonzosamente sencilla:

Definición de masa invariante

La masa, m, de un objeto, sea cual sea su velocidad, se define como su masa en reposo.

[20] «Cuando *yo* uso una palabra», Humpty Dumpty dijo en un tono más bien desdeñoso, «significa justo lo que yo quiero que signifique, ni más ni menos». Lewis Carroll, *Alicia en el país de las maravillas*.

Si los observadores en un sistema inercial $\mathcal{S}$ ven un objeto que navega por los alrededores a la mitad de la velocidad de la luz y quieren conocer su masa, deben de alguna manera llevar el objeto hasta el reposo (o pasar ellos mismos a un sistema que se mueva con el objeto) y entonces medir su masa utilizando cualquier técnica conveniente de mecánica no relativista. La equivalencia de todos los sistemas inerciales garantiza que este procedimiento producirá la misma respuesta en todos los sistemas, así que la masa resultante se puede denominar *masa invariante*. Pero, como es la única definición que utilizaremos, generalmente la denominaremos *masa*. Debido a que la masa definida de esta manera tiene el mismo valor en todos los sistemas, es un escalar Lorentz.

Tiempo propio de un cuerpo

Antes de enunciar la definición de momento relativista, es conveniente introducir otras dos magnitudes cinemáticas importantes. La posición tridimensional $\mathbf{x}(t)$ de un cuerpo en el instante t define un punto $x = (\mathbf{x}(t), ct)$ en el espacio-tiempo, y a medida que el tiempo avanza, este punto traza una trayectoria, denominada **línea del universo** del cuerpo. Hemos visto que la separación dx entre puntos vecinos x y $x+dx$ en la línea del universo de un cuerpo material es un vector de tipo tiempo. Esto significa que existe un sistema (a saber, el sistema en reposo del cuerpo) en el que la separación es de tipo tiempo puro, con la forma $dx_0 = (0, 0, 0, c\,dt_0)$. (El subíndice «0» indica que el sistema está en reposo). Como las dos posiciones en el triespacio son iguales ($\mathbf{x_0} = \mathbf{x_0} + \mathrm{d}\mathbf{x_0}$), el tiempo dt_0 es el tiempo propio entre los dos puntos en la línea del universo del cuerpo. Para encontrar este tiempo propio, no tenemos realmente que ir al sistema en reposo. En cualquier otro sistema, la separación tiene la forma

$$dx = (\mathbf{v}\,dt, c\,dt)$$

y como $dx_0^2 = dx^2$, se sigue que $-c^2 dt_0^2 = (v^2 - c^2)dt^2$, de donde podemos despejar dt_0 y obtener

$$dt_0 = dt\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{dt}{\gamma(v)} \tag{15.65}$$

donde $\gamma(v)$ es el familiar factor $\gamma\ 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, calculado para la velocidad del cuerpo v. [Se reconocerá (15.65) como la fórmula de la dilatación del tiempo (15.11), así que no necesitamos realmente hacer este cálculo]. Podemos aplicar (15.65) en cualquier sistema $\mathcal{S}$ y obtendremos, por supuesto, el mismo valor para dt_0. Esto es, el tiempo propio dt_0 es un escalar Lorentz, lo que lo hace una cantidad conveniente para trabajar, como veremos.

Cuadrivelocidad

Hemos visto que la velocidad tridimensional $\mathbf{v}$ de un cuerpo se transforma según las fórmulas un tanto complicadas de composición de velocidades (15.26) y (15.27). La razón de la complicación es fácil de ver: la trivelocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ es el cociente de un trivector $d\mathbf{x}$ y la cuarta componente dt de un cuadrivector. Así que no es de extrañar que se transforme de forma poco elegante. Habiendo reconocido el problema, podemos fácilmente construir un vector relacionado que se transforme de manera más sencilla. Si considerásemos $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/dt_0$ en lugar de $d\mathbf{x}/dt$, entonces al menos el denominador sería un escalar. De hecho, mientras lo hacemos, podemos también considerar el cuadrivector

$$u = \frac{dx}{dt_0} = \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt_0}, c\frac{dt}{dt_0}\right). \tag{15.66}$$

Como esta **cuadrivelocidad** es el cociente de un cuadrivector y un cuadriescalar, *es* claramente un cuadrivector. Si utilizamos (15.65) para sustituir dt_0 por dt/γ, encontramos que

$$u = \gamma\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, c\frac{dt}{dt}\right) = \gamma(\mathbf{v}, c). \tag{15.67}$$

La característica más importante de este resultado es que la trivelocidad $\mathbf{v}$ *no* es la parte espacial de la cuadrivelocidad u (que es por lo que a esta última la he denominado u en vez de v). Sin embargo, si el cuerpo se está moviendo mucho más despacio que c, entonces $\gamma \approx 1$ y la parte espacial de la cuadrivelocidad es indistinguible de la trivelocidad ordinaria $\mathbf{v}$. Como veremos directamente, el hecho de que u sea un cuadrivector lo hace útil en nuestros esfuerzos por construir una mecánica relativista.

Momento relativista

Estamos ahora preparados para encarar la siguiente definición en mecánica relativista: la definición del momento $\mathbf{p}$ de un cuerpo con masa m y velocidad $\mathbf{v}$. Obviamente queremos que la definición concuerde con la definición clásica ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$), al menos a velocidades no relativistas, $|\mathbf{v}| \ll c$. Qué más le podemos pedir a la definición depende de la propiedad clásica del momento que consideremos lo suficientemente importante como para trasladarla a la relatividad. Sería difícil nombrar una única propiedad más importante del momento en mecánica clásica, pero la conservación del momento es seguramente una candidata fuerte, y buscaremos una definición de $\mathbf{p}$ con la propiedad de que el momento total $\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}$ de un sistema aislado de cuerpos se conserve. Para ser coherente con los postulados de relatividad, esta ley, si es absolutamente cierta, debe ser cierta en todos los sistemas inerciales.

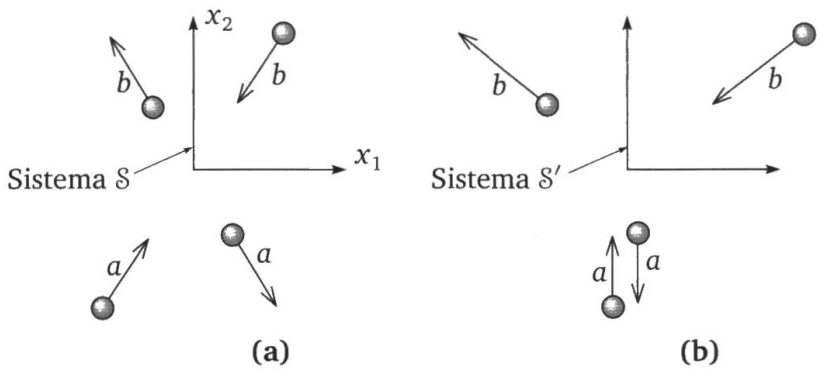


Figura 15.11. Colisión elástica entre dos partículas de igual masa, a y b. **(a)** En el sistema $\mathcal{S}$, las partículas incidentes se aproximan con velocidades iguales pero opuestas y emergen con sus componentes x_2 intercambiadas. El momento total clásico $\sum m\mathbf{v}$ es cero antes y después de la colisión. **(b)** El sistema $\mathcal{S}'$ tiene velocidad igual a la componente x_1 de la velocidad inicial de a en $\mathcal{S}$. Usando la fórmula relativista de composición de velocidades, es fácil mostrar que el momento total clásico $\sum m\mathbf{v}'$ no se conserva en este sistema.

La posibilidad más simple sería que pudiéramos continuar utilizando la definición clásica $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, pero podemos descartar esta posibilidad bastante fácilmente. Con ligera ingenuidad uno puede construir un experimento mental en el que el momento total clásico $\sum m\mathbf{v}$ se conserva en un sistema $\mathcal{S}$, pero no en un segundo sistema $\mathcal{S}'$. Un ejemplo es el que se muestra en la Figura 15.11: una colisión elástica de dos partículas de igual masa a y b. Vistas en el sistema $\mathcal{S}$, las dos partículas se aproximan al origen con velocidades iguales y opuestas en el plano x_1x_2, y emergen con las componentes x_2 de sus velocidades intercambiadas. Obviamente, el momento total clásico, medido en $\mathcal{S}$, es cero ($\sum m\mathbf{v} = 0$) antes y después de la colisión, y el momento clásico se conserva. La Figura 15.11(b) muestra el mismo experimento, visto en un sistema $\mathcal{S}'$ que viaja en la dirección del eje x_1 de $\mathcal{S}$ con velocidad V igual a la componente v_1 de la partícula a, así que la partícula a viaja en línea recta hacia arriba y después hacia abajo por el eje x_2' vista en $\mathcal{S}'$. Usando las transformaciones relativistas de las velocidades (15.26) y (15.27), se puede encontrar las cuatro velocidades medidas en $\mathcal{S}'$. Debido a que estos cálculos, aunque razonablemente directos, son bastante complicados, los dejaré como ejercicio para el lector (Problema 15.54), pero la conclusión importante se enuncia fácilmente: cuando sustituimos las velocidades de $\mathcal{S}'$ encontramos que el momento total clásico *no* se conserva en el sistema $\mathcal{S}'$;[21] esto es, $\sum m\mathbf{v}'_{\text{in}} \neq \sum m\mathbf{v}'_{\text{fin}}$. Evidentemente, si vamos a adoptar la definición clá-

[21] La razón es realmente bastante fácil de ver. La transformación (15.27) de la componente y de la velocidad depende de la componente x. Como las partículas a y b tienen componentes x distintas de la velocidad en $\mathcal{S}$, sus componentes y terminan con magnitudes diferentes en $\mathcal{S}'$. Por consiguiente $\sum mv'_y$ es distinto de cero y realmente cambia el signo cuando las velocidades cambian en la colisión.

sica de momento, una ley de conservación del momento sería incoherente con los postulados de relatividad.

El problema con la definición clásica del momento, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, deriva de la transformación poco práctica de la trivelocidad $\mathbf{v}$, y esto sugiere un enfoque más prometedor al problema. En lugar de utilizar la trivelocidad $\mathbf{v}$, supongamos que utilizamos la cuadrivelocidad u para definir el **cuadrimomento** de cualquier objeto de masa m como

$$p = mu = (\gamma m\mathbf{v}, \gamma mc) \qquad \text{[definición de cuadrimomento]}. \qquad (15.68)$$

[La última expresión se deduce de (15.67)]. Como m es un cuadriescalar y u es un cuadrivector, esto define p como un cuadrivector. Si, de la forma habitual, escribimos

$$p = (\mathbf{p}, p_4) \qquad (15.69)$$

entonces esto define el **trimomento**, $\mathbf{p}$, como la parte espacial del cuadrivector p o, comparando con (15.68),

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = \gamma m\mathbf{v} \qquad \text{[definición de trimomento]}. \qquad (15.70)$$

Si el objeto está viajando lentamente ($|\mathbf{v}| \ll c$), entonces $\gamma \approx 1$ y nuestra nueva definición de $\mathbf{p}$ está de acuerdo con la clásica, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. En general, sin embargo, las dos definiciones difieren en un factor de γ, y es la nueva definición (15.70) la que demuestra ser más útil.

¿Qué sucede con la conservación del momento? Como ahora cargamos con un vector momento cuadridimensional, parece claro que la conservación del momento, si es totalmente cierta, debería ser una ley en cuatro dimensiones, que podríamos escribir como

$$\sum p_{\text{fin}} = \sum p_{\text{in}}. \qquad (15.71)$$

En esta expresión hay realmente cuatro ecuaciones. Las primeras tres serían la ley de conservación del trimomento recientemente definido, y la cuarta sería la conservación de algo más, concretamente la cuarta componente $\sum p_4$. Obviamente, necesitamos averiguar rápidamente cuál es esta cuarta componente, pero le dedicaré a esta importante cuestión una sección propia. No obstante, veremos brevemente que la cuarta componente del nuevo cuadrimomento es la energía (realmente E/c), así que la ley (15.71) es una combinación maravillosamente compacta de las antiguas leyes de conservación del momento *y* la energía.

Lo que quiero poner de manifiesto aquí es lo siguiente: como el cuadrimomento p es un cuadrivector, lo mismo es cierto de ambos miembros de (15.71). Por tanto, si (15.71) es cierto en un sistema $\mathcal{S}$, es automáticamente cierto en todos los sistemas; es decir, la ley propuesta de conservación del cuadrimomento es compatible con los postulados de relatividad. Si la ley es realmente cierta debe, por supuesto, decidirse mediante un experimento. Como no se tiene ninguna duda, el veredicto es claro: incontables experimentos han mostrado que el cuadrimomento total de un sistema aislado es constante.

Masa variable

Algunos físicos prefieren reescribir la definición (15.70) del trimomento relativista introduciendo una **masa variable**

$$m_{\text{var}} = \gamma(v)m. \tag{15.72}$$

Con esta definición el trimomento se convierte en

$$\mathbf{p} = m_{\text{var}}\mathbf{v}. \tag{15.73}$$

Esta definición tiene la ventaja de hacer que el momento relativista se *parezca* a su homólogo no relativista, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Sin embargo, tiene importantes desventajas, que han hecho que la mayoría de los físicos en activo eviten el uso de la masa variable. Primero, no es necesariamente una buena idea hacer que una nueva definición sea parecida a su homóloga cuando existen, de hecho, diferencias importantes. Segundo, la introducción de una masa variable falla a la hora de conseguir un paralelismo completo con la mecánica clásica. Por ejemplo, no es cierto que la energía cinética relativista (que definiremos en la siguiente sección) sea igual a $\frac{1}{2}m_{\text{var}}v^2$, ni tampoco es cierto (en general) que $\mathbf{F} = m_{\text{var}}\mathbf{a}$. (Vea los Problemas 15.59 y 15.79). Tercero, al contrario que la masa invariante, la variable no es un escalar Lorentz. Por todas estas razones, no utilizaré la masa variable aquí.

15.13 Energía, la cuarta componente del momento

La conservación del cuadrimomento significa que, para un sistema aislado, hay cuatro cantidades conservadas. Las primeras tres comprenden el recientemente definido trimomento $\mathbf{p}$. Pero, ¿qué hay de la cuarta componente? Vamos a descubrir que, para un objeto que se mueve libremente, la cuarta componente del cuadrimomento definida por (15.68) es la energía dividida por c. Este es un resultado tan importante que lo enunciaré como una definición formal y después discutiré su justificación y consecuencias. Por consiguiente, enunciamos la siguiente definición

Definición de energía relativista

La energía E de un objeto que se mueve libremente con cuadrimomento $p = (\mathbf{p}, p_4)$ es

$$E = p_4 c = \gamma mc^2, \tag{15.74}$$

donde la segunda expresión se deduce de (15.68), que implica que $p_4 = \gamma mc$. Con esta definición, podemos reescribir el cuadrimomento p como

$$p = (\mathbf{p}, E/c), \tag{15.75}$$

lo que explica por qué el cuadrimomento p se denomina también **cuadrivector energía-momento.**

Como justificación parcial de la definición (15.74), advierta primero que (15.74) tiene al menos dimensiones de energía, a saber [masa × velocidad^2]. Luego, observemos E para un objeto no relativista para ver si se parece a la energía no relativista. Con $v \ll c$, podemos desarrollar γ usando la serie binomial para obtener

$$\gamma = [1-(v/c)^2]^{-1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}(v/c)^2 + \cdots, \tag{15.76}$$

así que (15.74) se convierte en

$$E \approx mc^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{15.77}$$

siempre que $v \ll c$. En mecánica no relativista se pensaba que la masa se conservaba absolutamente, de modo que el término mc^2 se habría considerado constante. Como el cero de energía era arbitrario, un físico clásico habría interpretado (15.77) diciendo que la recientemente definida E es justo la energía cinética clásica más una constante irrelevante.

Para ilustrar el resultado (15.77), consideremos por un momento una colisión elástica. Supongamos, por ejemplo, que dos átomos a y b, con masas m_a^{in} y m_b^{in} y velocidades no relativistas v_a^{in} y v_b^{in} colisionan y emergen con masas finales m_a^{fin} y m_b^{fin} y velocidades v_a^{fin} y v_b^{fin}. (Por supuesto, en mecánica clásica, las masas iniciales y finales serían la misma, pero utilizaremos nombres diferentes para evitar prejuzgar esta cuestión). En una colisión entre dos cuerpos, la conservación de la recientemente definida energía relativista (15.74) implica que

$$E_a^{\text{in}} + E_b^{\text{in}} = E_a^{\text{fin}} + E_b^{\text{fin}}$$

o, si la colisión es no relativista,

$$\left[m_a^{\text{in}}c^2 + \tfrac{1}{2}m_a^{\text{in}}(v_a^{\text{in}})^2\right] + \left[m_b^{\text{in}}c^2 + \tfrac{1}{2}m_b^{\text{in}}(v_b^{\text{in}})^2\right]$$
$$= \left[m_a^{\text{fin}}c^2 + \tfrac{1}{2}m_a^{\text{fin}}(v_a^{\text{fin}})^2\right] + \left[m_b^{\text{fin}}c^2 + \tfrac{1}{2}m_b^{\text{fin}}(v_b^{\text{fin}})^2\right].$$

Reagrupando términos, podemos escribir esta expresión como

$$M^{\text{in}}c^2 + T^{\text{in}} = M^{\text{fin}}c^2 + T^{\text{fin}} \tag{15.78}$$

donde M^{in} denota la masa total inicial, T^{in} la energía cinética total inicial, y así sucesivamente.[22] Ahora bien, de acuerdo con las ideas clásicas, la masa se conserva, así que $M^{\text{in}} = M^{\text{fin}}$. Por tanto, los dos términos de masa en (15.78) se cancelarían, dejando sólo

$$T^{\text{in}} = T^{\text{fin}}.$$

Es decir, la energía cinética total se conservaría (que es precisamente lo que sabemos que es cierto en una colisión elástica). Por consiguiente, en el contexto de las colisiones elásticas relativistas, la conservación de la recientemente definida energía relativista (15.74) coincide con la conservación familiar de la energía clásica. Éste es quizá el más simple y fuerte argumento para tratar la definición (15.74) como una generalización apropiada de la noción clásica de energía (junto con, por supuesto, el hecho experimental de que la energía definida de esta manera *se* conserva).

El argumento del último párrafo proporciona un tranquilizador resultado familiar en el caso de colisiones elásticas. Sin embargo, nos va a llevar a la primera gran sorpresa de la mecánica relativista. Incluso en el contexto de la mecánica no relativista, sabemos que existen procesos *inelásticos*, en los que la energía cinética total *no* se conserva. Por ejemplo, en el caso de los dos átomos, la colisión podría perturbar el movimiento interno de los electrones atómicos, cambiando la energía interna de uno de ellos (o de los dos). En este caso sabemos que los átomos emergerían con energía cinética total cambiada, de modo que $T^{\text{fin}} \neq T^{\text{in}}$. (Que tales procesos pueden ocurrir es un hecho experimental bien establecido; el experimento de Franck–Hertz, en el que electrones colisionan inelásticamente con átomos de mercurio, fue un ejemplo famoso). Ahora, el argumento que conduce a (15.78) sólo depende de la suposición (cierta) de que la energía relativista se conserva, así que (15.78) debe aplicar a cualquier colisión no relativista posible. En particular, en una colisión inelástica con $T^{\text{fin}} \neq T^{\text{in}}$, (15.78) implica que la masa total de los dos átomos tiene que cambiar, $M^{\text{fin}} \neq M^{\text{in}}$. Si imaginamos una colisión inelástica en la cual uno de los átomos tiene su energía interna cambiada mientras que el otro permanece completamente inalterado, entonces para el primer átomo podemos decir lo siguiente: si el átomo gana energía interna (se «excita»), entonces $T^{\text{fin}} < T^{\text{in}}$ y por ello, de (15.78), $M^{\text{fin}} > M^{\text{in}}$; esto es, cuando un átomo gana energía interna tiene que ganar masa. Por el contrario, si el átomo pierde energía interna, tiene que perder masa.

---

[22] Por «energía cinética» quiero decir la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ del movimiento traslacional de cualquier átomo como un todo. Por supuesto, un átomo puede también tener energía cinética de sus electrones cuando orbitan alrededor del núcleo, pero la incluiremos como parte de la energía interna del átomo.

Si la energía relativista se conserva (como sucede), entonces se sigue lógicamente que la masa no se puede conservar. La primera cuestión que se debe tratar es por qué esta no conservación de la masa no se había descubierto mucho antes. Para contestar a esta cuestión, advierta que (15.78) se puede escribir como

$$\Delta M c^2 = -\Delta T. \tag{15.79}$$

La contestación breve a esta cuestión es esta: para los estándares cotidianos, c^2 es una cantidad extremadamente grande, así que, incluso si ΔT es bastante grande, $\Delta M = \Delta T/c^2$ es todavía muy pequeño (en la mayoría de los casos, inobservable, tal como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15.7 *Cambio de masa en el experimento de Franck y Hertz*

En su famoso experimento realizado en 1914, James Franck y Gustav Hertz dispararon electrones a través de un contenedor de vapor de mercurio. El átomo de mercurio tiene un estado cuya energía interna es 4,9 eV (1 eV = $1{,}6 \times 10^{-19}$ J) mayor que el «estado fundamental» normal del átomo. En algunas de las colisiones entre los electrones y los átomos de mercurio, un átomo de mercurio era excitado hasta este estado, con el resultado de que la energía cinética final de las partículas emergentes era 4,9 eV menor que la inicial; esto es, $\Delta T = -4{,}9$ eV. ¿Cuánto había aumentado la masa del átomo de mercurio por la colisión?

De acuerdo con (15.79), el aumento de la masa es

$$\Delta M = -\frac{\Delta T}{c^2} = \frac{4{,}9 \text{ eV}}{c^2} = 8{,}7 \times 10^{-36} \text{ kg}.$$

(Compruebe la conversión y la aritmética). El electrón emerge con su masa inalterada (sigue siendo sólo un electrón), así que todo este aumento de masa va al átomo de mercurio (que es ahora un átomo de mercurio excitado). El aumento es fantásticamente pequeño para los estándares cotidianos, pero la verdadera cuestión es esta: ¿cuánto es el aumento de masa comparado con la masa original del átomo de mercurio, que es 200,6 unidades de masa atómica o $3{,}3 \times 10^{-25}$ kg? Este cambio fraccional en la masa del átomo es

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{8{,}7 \times 10^{-36}}{3{,}3 \times 10^{-25}} = 2{,}6 \times 10^{-11},$$

que es demasiado pequeño como para ser detectado por cualquier medida directa de las masas.

La energía liberada en una reacción química típica es también del orden de unos pocos eV por átomo. Por ejemplo, la combustión de hidrógeno en oxígeno puede entenderse como una colisión inelástica

$$H_2 + H_2 + O_2 \rightarrow H_2O + H_2O \tag{15.80}$$

en la cual la energía cinética total de las dos moléculas finales es alrededor de 5 eV más que la de las tres originales.[23] La conservación de la energía relativista requiere que las moléculas de agua salientes tengan menos masa total que los hidrógenos y oxígenos iniciales, pero, de nuevo, la diferencia es demasiado pequeña como para ser detectada mediante medidas directas.

En las reacciones nucleares, la energía cinética liberada puede ser mucho mayor. Por ejemplo, en la fisión inducida por neutrones

$$n + {}^{235}U \rightarrow {}^{90}Kr + {}^{143}Ba + n + n + n,$$

la energía cinética aumenta unos 200 MeV, y la pérdida fraccional de masa es alrededor de 1 parte en 1000 (todavía no muy grande, pero suficientemente grande para medirla directamente en muchas reacciones nucleares). Como veremos después, existen procesos en los que el cambio de masa es incluso mayor, pero la evidencia de la física nuclear es ya de por sí suficiente para confirmar la predicción relativista (15.79) más allá de toda duda.

Masa energía

Hemos visto que el término mc^2 en el resultado (15.77), $E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$, no es ciertamente la «constante irrelevante» que un físico clásico habría pensado que era. De hecho, en relatividad, al contrario de lo que sucede en mecánica clásica, la energía no contiene una constante arbitraria. Esto es porque ciertamente queremos que el $p = (\mathbf{p}, E/c)$ sea un cuadrivector, y la adición de una constante a E destruiría esta propiedad deseable. (Vea el Problema 15.66). Teniendo esto en la cabeza, volvamos a considerar la definición relativista de la energía de un objeto, $E = \gamma mc^2$. Incluso si el objeto está en reposo, con $\gamma = 1$, el objeto todavía tiene algo de energía, dada por $E = mc^2$ (quizá la ecuación más famosa de toda la física). Esta energía se denomina naturalmente **energía en reposo** del objeto o, como está asociada con la masa m, la **masa energía**.

El concepto de masa energía nos permite interpretar los procesos inelásticos discutidos arriba en los que algo de la masa energía se convierte en energía cinética o viceversa. En los procesos de física atómica y nuclear, la conversión involucra típicamente sólo una pequeña fracción de la masa energía total, pero existen procesos en los que la conversión es del 100 %. Por ejemplo, en una colisión entre un electrón (e^-) y su «antipartícula», el positrón e^+, ambas partículas se pueden aniquilar,

[23] No es una coincidencia que la liberación de energía (o pérdida) en las reacciones químicas sea casi la misma que en el experimento de Franck–Hertz del Ejemplo 15.7. En ambos casos el cambio se origina en diferencias en los niveles de energía de los electrones en los átomos o moléculas, y estas diferencias son casi siempre del orden de unos pocos eV.

$$e^- + e^+ \rightarrow \text{radiación}$$

y el 100% de su masa energía se transforma en la energía de la radiación electromagnética. Cuando un objeto se está moviendo, $\gamma > 1$ y su energía $E = \gamma mc^2$ es mayor que su energía en reposo mc^2. Esto sugiere definir una cantidad T mediante la ecuación

$$E = mc^2 + T. \tag{15.81}$$

Esta T es la energía adicional que un objeto tiene en virtud de su movimiento y se denomina naturalmente **energía cinética**,

$$T = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2. \tag{15.82}$$

Cuando el objeto se desplaza despacio, hemos visto que $T \approx \frac{1}{2}mv^2$ [esto se sigue de (15.77)], pero en general el resultado no relativista es incorrecto y debemos utilizar la definición relativista (15.82).

Tres relaciones útiles

Existen tres relaciones útiles entre los parámetros $m, \mathbf{v}, \mathbf{p}$ y E que caracterizan el movimiento de un objeto. Primero, como $p = \gamma m(\mathbf{v}, c)$ y también $p = (\mathbf{p}, E/c)$, vemos directamente que

$$\boldsymbol{\beta} \equiv \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\mathbf{p}c}{E}. \tag{15.83}$$

Esta relación nos permite hallar la velocidad de un objeto si conocemos su trimomento $\mathbf{p}$ y su energía E.

Consideremos ahora la «longitud al cuadrado» invariante $p^2 = p \cdot p$. En el sistema en reposo del objeto p tiene la forma $p = (0, 0, 0, mc)$, así que $p \cdot p = -(mc)^2$. Como ambos lados de esta ecuación son invariantes, se sigue inmediatamente que la misma relación se cumple en cualquier sistema: para cualquier objeto con cuadrimomento p y masa m,

$$p \cdot p = -(mc)^2 \tag{15.84}$$

en cualquier sistema inercial. Vale la pena memorizar esta relación, que puede simplificar enormemente varios cálculos, como veremos.

Finalmente, es a veces útil reescribir el resultado (15.84) en términos del trimomento y la energía. Como $p = (\mathbf{p}, E/c)$, (15.84) se convierte en $\mathbf{p}^2 - (E/c)^2 = -(mc)^2$ o

$$E^2 = (mc^2)^2 + (\mathbf{p}c)^2 \tag{15.85}$$

Esto muestra que las tres cantidades E, mc^2 y $|\mathbf{p}|c$ están relacionadas como los lados de un triángulo recto, con E como hipotenusa, como se indica en la Figura 15.12. En esta etapa no existe una trascendencia geométrica profunda a esta afirmación, pero sí proporciona una forma fácil de recordar y visualizar la relación (15.85). Si la velocidad es mucho menor que c, entonces $\gamma \approx 1$, así que $E \approx mc^2$; en este caso, la hipotenusa y la base del triángulo son casi iguales, así que $T \ll mc^2$ y el triángulo es muy bajo (altura $\ll$ base). Por otro lado, si v es muy próxima a c, entonces $\gamma \gg 1$, así que $E \gg mc^2$; en este caso, $T \gg mc^2$, así que la energía es mayoritariamente cinética, y el triángulo es muy alto (altura $\gg$ base) con $E \approx |\mathbf{p}|c$.

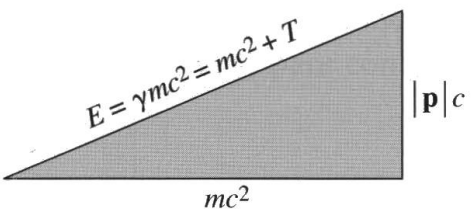


Figura 15.12. Los tres parámetros E, mc^2 y $|\mathbf{p}|c$ están relacionados como los lados de un triángulo recto con E como hipotenusa.

Ejemplo 15.8 *Energía y momento de un electrón*

La energía en reposo de un electrón es alrededor de 0,5 MeV (realmente 0,511, pero para muchos propósitos 0,5 es un valor suficientemente bueno). ¿Cuál es la masa del electrón en la unidad del SI (el kilogramo) y en MeV/c^2? Si su energía cinética es $T = 0{,}8$ MeV, ¿cuál es su energía total E y cuál es la magnitud $|\mathbf{p}|$ de su trimomento en MeV/c? ¿Cuál es su velocidad?

La energía en reposo dada nos dice que

$$mc^2 = 0{,}5 \text{ MeV}. \tag{15.86}$$

Despejando m, convirtiendo eV a julios y poniendo el valor de c, encontramos (como se puede comprobar) que $m \approx 9 \times 10^{-31}$ kg (de forma más precisa, $9{,}11 \times 10^{-31}$). Directo como es este cálculo en kilogramos, es incluso más fácil, y muchas veces más conveniente, en MeV/c^2. Simplemente dividimos ambos miembros de (15.86) por c^2 y tenemos la respuesta directamente:

$$m = 0{,}5 \text{ MeV}/c^2.$$

Evidentemente, la masa en MeV/c^2 es numéricamente la misma que mc^2 en MeV. Esto es tan sencillo que uno tarda un poco en acostumbrarse. Si no se ha utilizado nunca

antes la unidad MeV/c^2, sólo se debe recordar que la afirmación $m = 0{,}5$ MeV/c^2 es precisamente equivalente a la afirmación de que $mc^2 = 0{,}5$ MeV. La razón de que ésta sea una manera muy conveniente de especificar masas es que lo que nos importa muchas veces *no* es la masa propiamente, sino más bien la energía correspondiente mc^2, y la unidad más conveniente para la última es muchas veces el MeV.

Si $T = 0{,}8$ MeV, entonces claramente $E = T + mc^2 = 1{,}3$ MeV, y por la «relación útil» (15.85)

$$|\mathbf{p}|c = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} = \sqrt{1{,}3^2 - 0{,}5^2}\ \text{MeV} = 1{,}2\ \text{MeV}.$$

Una vez más, podríamos obtener una respuesta en unidades del SI realizando las conversiones necesarias, pero una acción más sencilla, y muchas veces más conveniente, es dividir ambos miembros entre c para obtener

$$|\mathbf{p}| = 1{,}2\ \text{MeV}/c.$$

Finalmente, de acuerdo con la relación útil (15.83), la velocidad sin dimensiones del electrón $\beta = v/c$ es

$$\beta = \frac{|\mathbf{p}|c}{E} = \frac{1{,}2\ \text{MeV}}{1{,}3\ \text{MeV}} = 0{,}92;$$

esto es, $v = 0{,}92c$.

Advierta lo bien que cancelan los factores c si medimos las masas en MeV/c^2 y los momentos en MeV/c cuando usamos las relaciones (15.83) y (15.85). Esto es porque m y $\mathbf{p}$ entran en estas relaciones a través de las combinaciones mc^2 y $\mathbf{p}c$. Para practicar un poco utilizando estas relaciones y las nuevas unidades, vea los Problemas 15.61 hasta 15.63.

15.14 Colisiones

Las leyes de conservación de la energía y el momento juegan un papel clave en el análisis de colisiones. En esta sección ilustraré esta afirmación con tres ejemplos.

Ejemplo 15.9 *Colisión de dos trozos de masilla*

Una bola de masilla relativista, con masa m_a, energía E_a y velocidad $\mathbf{v}_a$, colisiona con otra bola estacionaria de masa m_b, como se muestra en la Figura 15.13. Si las dos bolas se funden para formar un único trozo, ¿cuál es la masa del trozo m y con qué velocidad $\mathbf{v}$ sale despedido?

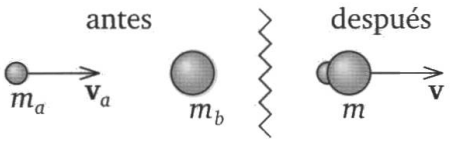


Figura 15.13. Dos bolas de masilla colisionan y forman un único trozo.

Para encontrar la masa final, sólo tenemos que recordar que la «longitud al cuadrado» invariante del cuadrimomento de cualquier objeto es $-m^2c^2$. Si denotamos el cuadrimomento final por p_{fin}, entonces

$$(p_{\text{fin}})^2 = -m^2c^2. \tag{15.87}$$

Por la conservación de la energía-momento, $p_{\text{fin}} = p_{\text{in}}$, donde p_{in} es el momento total inicial; esto es, $p_{\text{in}} = p_a + p_b$, de la cual

$$\begin{aligned}(p_{\text{in}})^2 = (p_a + p_b)^2 &= p_a^2 + p_b^2 + 2p_a \cdot p_b \\ &= -m_a^2c^2 - m_b^2c^2 - 2E_a m_b \end{aligned} \tag{15.88}$$

donde el último término aparece porque $p_b = (0, 0, 0, m_b c)$. Comparando (15.87) y (15.88), encontramos que la masa del pedazo inicial es

$$m = \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + 2E_a m_b/c^2}.$$

Advierta que si el movimiento original era no relativista, entonces $E_a \approx m_a c^2$, y recuperamos el resultado no relativista $m = m_a + m_b$; pero, en general, $m > m_a + m_b$.

De acuerdo con la relación útil (15.83), la velocidad final es $\mathbf{v} = \mathbf{p}_{\text{fin}}c^2/E_{\text{fin}}$. Por la conservación del cuadrimomento, podemos sustituir las componentes de p_{fin} por aquéllas de p_{in} para obtener

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}_a c^2}{E_a + m_b c^2} = \frac{\gamma_a m_a \mathbf{v}_a}{\gamma_a m_a + m_b} \tag{15.89}$$

donde γ_a denota el factor γ para la bola incidente a. Advierta que si $v_a \ll c$, esto se reduce al resultado familiar no relativista $\mathbf{v} = m_a\mathbf{v}_a/(m_a + m_b)$.

El sistema CM

En mecánica no relativista vimos que un concepto muy útil es el de CM o sistema del centro de masa (el sistema de coordenadas en el que el centro de masa de un sistema está en reposo). Alternativamente, este sistema de coordenadas se puede caracterizar como el sistema en el cual el momento total es cero, $\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = \mathbf{0}$. (Así que se puede pensar en el «CM» como si fuera un «centro de momento»). Esta definición

alternativa se transfiere directamente a la mecánica relativista.[24] Hemos visto que el cuadrimomento p de cualquier partícula material es de tipo espacio futuro (está dentro del cono de luz futuro).[25] Es un ejercicio sencillo demostrar (Problema 15.69) que la suma de cualquier número de vectores de tipo tiempo futuro es ella misma de tipo tiempo futuro. Por tanto, el momento total $P = \sum p$ de cualquier colección de partículas es también de tipo tiempo, y esto garantiza que existe un sistema en el que P tiene la forma $P = (0, 0, 0, P_4)$. Naturalmente, definimos este sistema, en el que el trimomento total $\mathbf{P} = 0$, como el sistema de referencia CM del sistema.

Sucede muchas veces que un problema de colisiones es muy fácil de resolver en el sistema de referencia CM. De este modo, si necesitamos resolver el mismo problema en algún otro sistema de referencia $\mathcal{S}$, el procedimiento más sencillo es muchas veces transformar desde $\mathcal{S}$ al sistema de referencia CM, resolver allí el problema, y después transformar de vuelta a $\mathcal{S}$, como se ilustra en los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 15.10 *Colisión elástica frontal*

Consideremos una colisión elástica frontal entre un proyectil, con masa m_a y velocidad $\mathbf{v}_a$, y un blanco estacionario de masa m_b, como se muestra en la Figura 15.14(a). (Que la colisión sea frontal significa que las dos partículas emergen de la colisión siguiendo la línea de la velocidad incidente $\mathbf{v}_a$, como se muestra). ¿Cuál es la velocidad final $\mathbf{v}_b$ de la partícula blanco b?

Denotemos por $\mathcal{S}$ el sistema de referencia lab (laboratorio), en el que sucede realmente el experimento (con b inicialmente en reposo), y tomemos la dirección de la velocidad incidente la del eje x. Para resolver el problema directamente en el sistema $\mathcal{S}$, escribiríamos las ecuaciones de conservación de la energía y el momento y despejaríamos la velocidad final requerida. Desafortunadamente, las ecuaciones son extremadamente enrevesadas, y una ruta mucho más simple es transformar al sistema de referencia CM $\mathcal{S}'$. En el sistema del CM los dos trimomentos incidentes son iguales y opuestos, y es fácil ver (Problema 15.68) que la colisión sencillamente los intercambia. Por consiguiente, el procedimiento será el siguiente: (1) transformar p_b al sistema CM $\mathcal{S}'$; (2) cambiar su parte espacial $\mathbf{p}_b$; y (3) transformar otra vez a $\mathcal{S}$ y calcular la velocidad. Antes de hacerlo, necesitamos hallar la velocidad del sistema CM $\mathcal{S}'$ relativa a $\mathcal{S}$. Como el cuadrimomento total es

[24] Curiosamente, la noción de centro de masa no se transfiere satisfactoriamente a la relatividad. Por consiguiente, es mejor pensar en el sistema de referencia CM como el sistema de centro de momento.

[25] Hasta el momento estamos considerando sólo partículas materiales, es decir, partículas con masa $m > 0$. Discutiremos en breve el caso de partículas sin masa, para las cuales p está *sobre* el cono de luz. Afortunadamente (con una pequeña excepción) los mismos resultados aplican incluso cuando algunas de las partículas no tienen masa. Vea los Problemas 15.88 y 15.89.

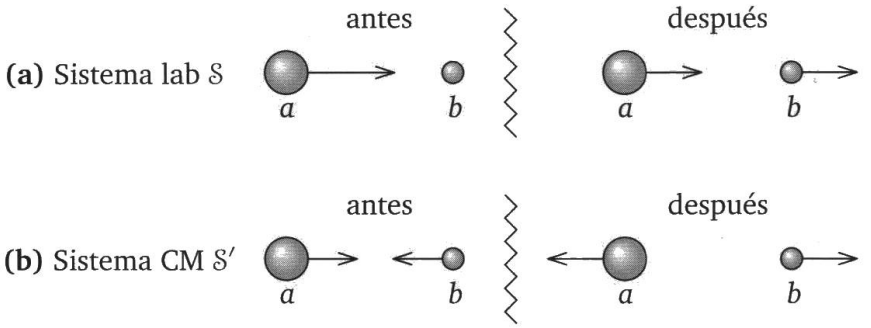


Figura 15.14. **(a)** Colisión elástica frontal vista en el sistema de referencia del laboratorio $\mathcal{S}$, donde el blanco b está inicialmente en reposo. **(b)** En el sistema de referencia CM $\mathcal{S}'$, todos los trimomentos tienen la misma magnitud. El único efecto de la colisión es cambiar el trimomento de cada partícula. (Las flechas representan momentos).

$$P = \left(\mathbf{p}_a, \frac{E_a + m_b c^2}{c}\right),$$

la velocidad requerida (sin dimensiones) $\boldsymbol{\beta}$ para transformar al sistema de referencia CM es

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{p}_a c}{E_a + m_b c^2}. \tag{15.90}$$

(En el límite no relativista, con $\mathbf{p}_a \approx m_a \mathbf{v}_a$ y $E_a \approx m_a c^2$, esto corresponde a una velocidad $\mathbf{v} = m_a \mathbf{v}_a/(m_a + m_b)$, que es la velocidad del centro de masa, como se esperaba).

Podemos seguir ahora los tres pasos para resolver el problema. En el sistema de referencia lab, el cuadrimomento inicial del blanco b es

$$p_b^{\text{in}} = (0, 0, 0, m_b c) \qquad \text{[sistema lab, inicial]}. \tag{15.91}$$

Aplicando el empujón estándar de Lorentz, con velocidad (15.90), encontramos el momento del CM correspondiente

$$p_b'^{\text{in}} = \gamma m_b c(-\beta, 0, 0, 1) \qquad \text{[sistema CM, inicial]}. \tag{15.92}$$

En el sistema CM la colisión sencillamente cambia las componentes espaciales de este momento. De este modo el momento final correspondiente es

$$p_b'^{\text{fin}} = \gamma m_b c(\beta, 0, 0, 1) \qquad \text{[sistema CM, final]}. \tag{15.93}$$

Finalmente, transformando otra vez al sistema lab, llegamos a

$$p_b^{\text{fin}} = \gamma^2 m_b c\left(2\beta, 0, 0, (1 + \beta^2)\right) \qquad \text{[sistema lab, final]}. \tag{15.94}$$

La velocidad sin dimensiones correspondiente es justo la razón $2\beta/(1+\beta)$, así que la velocidad final real del blanco es

$$\mathbf{v}_b = \frac{2\boldsymbol{\beta}}{1+\beta^2}c \tag{15.95}$$

con $\boldsymbol{\beta}$ dado por (15.90).

Aunque se ha encontrado fácilmente, la respuesta (15.95) no es especialmente ilustrativa en general. En el caso especial en que las dos masas son iguales, es fácil mostrar (Problema 15.73) que (15.95) se reduce a $\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_a$; es decir, el blanco b emerge precisamente con la velocidad del proyectil incidente a, y el proyectil por tanto se frena en seco. Este comportamiento es bien conocido por los estudiantes de mecánica no relativista (y por los jugadores de billar) y muestra que, en el caso en que $m_a = m_b$, el resultado relativista (15.95) concuerda exactamente con el familiar no relativista.

Sin importar si las masas son iguales o no, se muestra fácilmente que en el límite $v_a \ll c$, el resultado relativista (15.95) tiende al no relativista correspondiente. (Vea el Problema 15.73).

Energías umbral

La mayoría de las partículas elementales que se han descubierto en aproximadamente los últimos setenta años se se encontraron cuando ellas se generaban en colisiones de otras partículas. Por ejemplo, el pión negativo, π^-, se puede crear en una colisión de un protón y un neutrón,

$$\mathrm{p} + \mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \pi^-.$$

Análogamente, el primer antiprotón que se observó se produjo por una colisión protón-protón en la reacción

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}}. \tag{15.96}$$

(El antiprotón cargado negativamente $\bar{\mathrm{p}}$ es la «antipartícula» del protón, con la misma masa pero carga opuesta). Una cantidad de gran importancia para cualquier experimentador que espera observar este tipo de reacción es la **energía umbral**, definida como la energía mínima de las partículas iniciales para la cual la reacción puede ocurrir.

Consideremos una reacción de la forma

$$a + b \rightarrow d + \cdots + g.$$

En el experimento de colisiones tradicional, una de las partículas originales (digamos b) estaba normalmente en reposo (definiendo lo que hemos estado denominando el

sistema de referencia lab. Por consiguiente, el interés era conocer la energía umbral para una reacción de este tipo en el sistema lab. A primera vista esto podría parecer una cosa sencilla de calcular. La mínima energía posible de la partícula final es justo su energía total en reposo $\sum m_{\text{fin}}c^2$, la energía que tiene cuando está es reposo. Entonces, seguramente la energía umbral para la reacción es justo $\sum m_{\text{fin}}c^2$. Lamentablemente este argumento creíble es incorrecto. El problema es que en el sistema lab el trimomento total inicial es distinto de cero. (La partícula b está en reposo, así que a debe estar en movimiento para traer la energía necesaria). La conservación del trimomento requiere que el trimomento final sea distinto de cero, y de esa manera las partículas finales no pueden estar en reposo. Por tanto, la energía umbral es más que simplemente $\sum m_{\text{fin}}c^2$. ¿Pero cuál es?

La manera más fácil de responder a esta cuestión es observar que en el sistema CM, en el que el trimomento total *es* cero, todas las partículas finales pueden estar en reposo. De este modo

$$E_{\text{cm}} \geq \sum m_{\text{fin}}c^2 \tag{15.97}$$

y la igualdad aquí *es* posible, con todas las partículas finales en reposo. Podemos encontrar ahora la energía umbral en el lab, comparando los cuadrimomentos totales en los dos sistemas. En el sistema CM el cuadrimomento total tiene la forma $P_{\text{cm}} = (0,0,0,E_{\text{cm}}/c)$. En el sistema lab, es $P_{\text{lab}} = p_a + p_b$, donde $p_a = (\mathbf{p}_a, E_a/c)$ y $p_b = (0,0,0,m_bc)$ son los momentos de las dos partículas originales. Ahora, por la invariancia del producto escalar, $P_{\text{cm}}^2 = P_{\text{lab}}^2$, así que

$$-E_{\text{cm}}^2/c^2 = (p_a + p_b)^2 = p_a^2 + p_b^2 + 2p_a \cdot p_b = -m_a^2c^2 - m_b^2c^2 - 2E_am_b$$

o, resolviendo para E_a,

$$E_a = \frac{E_{\text{cm}}^2 - m_a^2c^4 - m_b^2c^4}{2m_bc^2}$$

Insertando el valor mínimo de E_{cm} de (15.97), encontramos para la energía mínima del proyectil a en el sistema lab

$$E_a^{\text{min}} = \frac{(\sum m_{\text{fin}})^2 - m_a^2 - m_b^2}{2m_b}c^2. \tag{15.98}$$

Un ejemplo famoso del uso de esta ecuación fue el diseño del experimento para verificar la existencia del antiprotón usando la reacción (15.96). En esta reacción $\sum m_{\text{fin}} = 4m_{\text{p}}$, mientras que $m_a = m_b = m_{\text{p}}$, así que la energía mínima (15.98) es $7m_{\text{p}}c^2$; esto es, la energía cinética mínima para que los protones produzcan antiprotones por la reacción (15.96) era $6m_{\text{p}}c^2 \approx 5600$ MeV. La reacción en cuestión se observó primero en Berkeley, usando protones acelerados hasta esta energía por una máquina llamada Bevatrón, que había sido específicamente diseñada para acelerar

protones hasta unos 6000 MeV, justo un poco por encima de la energía umbral para estar seguros de que se produjera la reacción.

Una característica importante de (15.98) es que el término principal es proporcional a $(\sum m_{\text{fin}})^2$. De este modo, si la partícula que se espera producir es muy pesada, $E_a^{\min}$ puede ser prohibitivamente grande. Por ejemplo, la partícula llamada ψ (o J/ψ) tiene una masa de unos 3100 MeV/c^2 y fue descubierta en la reacción

$$e^+ + e^- \rightarrow \psi$$

en la que el positrón y el electrón tienen una masa de unos 0,5 MeV/c^2 cada una. Poniendo estos números en (15.98), vemos que, si esta reacción se fuera a producir disparando positrones a electrones estacionarios (o viceversa), la energía mínima incidente tendría que ser unos fantásticos $E^{\min} \approx 10^7$ MeV (bien fuera del alcance de cualquier acelerador de electrones o positrones que exista hoy en día). La manera de esquivar este obstáculo que parecía insalvable fue utilizar haces de colisión, con los electrones y los positrones acercándose unos a otros con momentos aproximadamente iguales y opuestos. Es decir, el experimento se realizó en el sistema de referencia CM. De (15.97) se puede ver que el umbral en este caso es sólo $E_{\text{cm}} \approx 3100$ MeV. En este experimento, las ventajas de esta energía umbral mucho menor compensaron con creces las desventajas de tener que trabajar con dos haces de partículas de alta energía.

15.15 Fuerza en relatividad

No hemos introducido el concepto de fuerza en nuestra mecánica relativista. Una de las razones es que la fuerza tiene un papel mucho más pequeño en relatividad que en mecánica no relativista. Otra es que el concepto de fuerza es mucho más complicado en relatividad. La complicación más obvia es que (como varios otros parámetros, tales como la masa y la velocidad) la fuerza se puede definir de varias maneras diferentes. Una segunda complicación surge de la posibilidad de que la masa en reposo de un objeto pueda cambiar. Como hemos visto, una colisión inelástica de un electrón con un átomo puede dar al átomo energía adicional y aumentar su masa en reposo. Como un ejemplo macroscópico del mismo efecto, imaginemos que sujetamos una llama debajo de un objeto metálico; el calor absorbido aumenta la energía interna del objeto y su masa en reposo. Como muchos textos introductorios, evitaré la complicación de tales «fuerzas de tipo calor» centrando la atención en fuerzas que *no cambian las masas en reposo de los objetos sobre los que actúan*.[26] Afortunadamente, éstas incluyen muchas fuerzas importantes en relatividad especial,

[26] Para una discusión clara y cuidadosa de fuerzas «de tipo calor», vea el excelente libro de Wolfgang Rindler, *Introduction to Special Relativity*, Oxford University Press, segunda edición,

incluida la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{15.99}$$

sobre una carga q en el seno de campos eléctrico y magnético $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$.

De las varias definiciones posibles de fuerza en relatividad, la única más útil es probablemente la **trifuerza** definida como

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{15.100}$$

donde $\mathbf{p}$ denota el trimomento relativista $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$. Esta no es, por supuesto, la misma que la fuerza no relativista, porque $\mathbf{p}$ no es el momento no relativista, pero sí tiene el mérito esencial de que concuerda con la definición no relativista cuando $v \ll c$ (y $\gamma \approx 1$). Una segunda propiedad que aconseja la definición (15.100) es que experimentalmente se muestra que, con esta definición, la fuerza sobre una carga q en un campo electromagnético está dada por la ecuación de Lorentz (15.99). En tercer lugar, con la definición (15.100), podemos demostrar el análogo del teorema del trabajo y la EC, como se explica a continuación. Recuerde la relación útil (15.85), que $E^2 = (\mathbf{p}c)^2 + (mc^2)^2$. Derivando ambos miembros con respecto al tiempo, vemos que (recuerde que estamos suponiendo que la masa en reposo m no varía, así que no hay término en dm/dt, pero vea el Problema 15.85)

$$E\frac{dE}{dt} = \mathbf{p}c^2 \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{p}c^2 \cdot \mathbf{F}$$

o, dividiendo ambos miembros por E y recordando que $\mathbf{p}c^2/E = \mathbf{v}$,

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}. \tag{15.101}$$

Multiplicando ambos miembros por dt encontramos que

$$dE = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}, \tag{15.102}$$

donde $d\mathbf{x}$ denota el desplazamiento $d\mathbf{x} = \mathbf{v}dt$. Finalmente, como $E = mc^2 + T$ y estamos suponiendo que la masa m no cambia, encontramos que

$$dT = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \tag{15.103}$$

que es precisamente el teorema del trabajo y la EC, generalizado para incluir energías y fuerzas relativistas.

1991, pero tenga en cuenta que Rindler tiende a usar m para denotar la masa variable (lo que nosotros llamaríamos γm).

Ejemplo 15.11 *Movimiento con una fuerza constante*

Un objeto de masa fija en reposo m es perturbado por una fuerza uniforme constante $\mathbf{F}$ (por ejemplo la fuerza sobre una carga en un campo electrostático uniforme) y se deja libre desde el reposo en el origen en el instante $t = 0$. Encontrar el trimomento del objeto $\mathbf{p}$, su trivelocidad $\mathbf{v}$, y su posición $\mathbf{x}$, todas como funciones del tiempo.

Integrando (15.100) (con $\mathbf{F}$ constante), encontramos inmediatamente

$$\mathbf{p} = \mathbf{F}t. \tag{15.104}$$

De (15.85) es fácil ver que $\gamma^2 = 1 + \mathbf{p}^2/(mc)^2$, así que

$$\gamma = \sqrt{1 + (Ft/mc)^2}$$

y

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} = \frac{\mathbf{F}t}{m\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}}. \tag{15.105}$$

Cuando t es pequeño, podemos despreciar el segundo término dentro de la raíz cuadrada, y recuperamos la respuesta no relativista $\mathbf{v} = \mathbf{F}t/m$, pero cuando t se hace grande, el segundo término en la raíz cuadrada domina y vemos que v tiende a c, sin alcanzarla nunca del todo. Esto es coherente con nuestro conocimiento de que ninguna partícula material puede alcanzar una velocidad mayor o igual que la velocidad de la luz.

Para hallar la posición del objeto $\mathbf{x}$, sólo tenemos que integrar (15.105) para obtener

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{F}}{m}\left(\frac{mc}{F}\right)^2\left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} - 1\right). \tag{15.106}$$

Como se puede comprobar fácilmente, cuando t es pequeño, esto se reduce al resultado familiar no relativista $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{F}t^2/m$ (esto es, $\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$); cuando $t \to \infty$, es asintótica a $(ct + \text{cte.})$, en la dirección de $\mathbf{F}$, cuando la velocidad se aproxima a la velocidad de la luz (Problema 15.82).

Energía potencial

Puede suceder que, al menos en un sistema $\mathcal{S}$, la fuerza $\mathbf{F}$ sobre un objeto sea el gradiente de una función $U(\mathbf{x})$; esto es, $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}U(\mathbf{x})$ y la fuerza sea conservativa. Este es el caso, por ejemplo, para un carga q que se mueve en un campo electrostático. Cuando esto sucede, el trabajo realizado sobre el objeto a medida que se desplaza una cantidad $d\mathbf{x}$ es $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = -\boldsymbol{\nabla}U\cdot d\mathbf{x} = -dU$. Combinando este resultado con el teorema

del trabajo y la EC (15.103), encontramos que $dT = -dU$ o $d(T + U) = 0$; es decir, al igual que en mecánica no relativista, si la fuerza sobre un objeto es conservativa, $T + U$ se conserva.

Cuadrifuerza

La trifuerza $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ no es la parte espacial de un cuadrivector. (El problema es que, aunque $d\mathbf{p}$ *es* la parte espacial de un cuadrivector, dt no es un escalar). A este respecto, la trifuerza es como la trivelocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$, y la transformación de $\mathbf{F}$ de un sistema a otro es en cierto modo similar a la de $\mathbf{v}$ (Problema 15.83). Al igual que con la velocidad, es fácil ver cómo definir una cuadrifuerza que está estrechamente relacionada con la trifuerza. Podemos definir la **cuadrifuerza** sobre un objeto como la derivada de p con respecto al tiempo propio t_0 medida a lo largo de la línea del universo del objeto:

$$K = \frac{dp}{dt_0} \tag{15.107}$$

(No existe una notación ampliamente aceptada para la cuadrifuerza, pero K es una de las distintas notaciones utilizadas). Como dp es un cuadrivector y dt_0 es un cuadriescalar, K es automáticamente un cuadrivector. Como $dt_0 = dt/\gamma$, podemos reescribir K como

$$K = (\mathbf{K}, K_4) = \gamma\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}, \frac{1}{c}\frac{dE}{dt}\right) = \gamma(\mathbf{F}, \mathbf{v}\cdot\mathbf{F}/c) \tag{15.108}$$

donde la última igualdad se deduce de (15.101). Vemos que la parte espacial de la cuadrifuerza es γ veces la trifuerza $\mathbf{F}$, justo como la parte espacial de la cuatrivelocidad u es γ veces la trivelocidad usual $\mathbf{v}$, como en (15.67).

Las ventajas de la cuadrifuerza son consecuencia de que es un cuadrivector. Esto significa que su transformación de un sistema a otro es justo la transformación familiar de Lorentz. También significa que la invariancia de Lorentz de cualquier ley física formulada en términos de la cuadrifuerza es fácil de comprobar. La principal *desventaja* de la cuadrifuerza es que da la derivada temporal del momento con respecto al tiempo propio, mientras que la trifuerza da la derivada con respecto al tiempo de cualquier sistema inercial. Como nuestro interés principal suele ser el movimiento de un objeto en términos del tiempo en un sistema particular (en oposición al tiempo propio de un objeto en movimiento), la trifuerza es, a este respecto, más útil.

15.16 Partículas sin masa; el fotón

Una consecuencia sorprendente de la relatividad es la posibilidad de partículas con masa cero, $m = 0$. En mecánica no relativista, la noción de una partícula sin masa no tiene ningún sentido. Las definiciones $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ y $T = \frac{1}{2}mv^2$ muestran claramente que una partícula con $m = 0$ no tendría momento ni energía cinética y, por ello, sería presumiblemente nada en absoluto. A primera vista, el mismo argumento podría parecer aplicable en relatividad: si dejamos que $m \to 0$ en las definiciones relativistas

$$\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v} \qquad \text{y} \qquad E = \gamma mc^2 \tag{15.109}$$

parece que llegaríamos a la misma conclusión (que una partícula sin masa no tendría momento ni energía y por tanto no existiría). Dejemos esta dificultad por un momento y observemos las dos relaciones (15.85) y (15.83)

$$E^2 = (mc^2)^2 + (\mathbf{p}c)^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\mathbf{p}c}{E}. \tag{15.110}$$

Si fuera a existir una partícula con $m = 0$ (y si esas relaciones aplicasen todavía) entonces la primera relación se convertiría en

$$E = |\mathbf{p}|c \qquad [\text{si } m = 0] \tag{15.111}$$

y ésta, combinada con la segunda relación, implicaría que la velocidad de la partícula tendría que ser c,

$$v = c \qquad [\text{si } m = 0]. \tag{15.112}$$

En otras palabras, si fuera a existir una partícula sin masa, entonces las relaciones usuales de la mecánica relativista requerirían que siempre viajase con velocidad c. Si volvemos a nuestras definiciones originales (15.109) de $\mathbf{p}$ y E, vemos que cuando $m \to 0$, también $v \to c$ y $\gamma \to \infty$. Por tanto, para una partícula sin masa, las dos definiciones tomarían la forma $\infty \times 0$, que está indefinida y por tanto no descarta realmente la existencia de partículas con $m = 0$.

Evidentemente, la mecánica relativista tiene sitio para partículas sin masa, siempre que viajen a velocidad c. Si tales partículas existen es, por supuesto, una cuestión experimental, y los experimentos nos dicen sin ambigüedad que sí existen. El fotón es la partícula que transporta la energía y el momento de las ondas electromagnéticas; y los experimentos muestran que, para un fotón, E y $\mathbf{p}$ sí cumplen (15.111) y que los fotones siempre viajan (¡no hay sorpresa!) a la velocidad de la luz.[27]

---

[27] Se solía pensar que el neutrino era otro ejemplo de partícula sin masa, pero evidencias actuales muestran que su masa, aunque pequeña, es definitivamente distinta de cero, quizá unas 10^{-6} veces la masa del electrón. (Como comparación, el límite experimental sobre la posible masa

Advierta que con $m = 0$, el cuadrimomento de un fotón cumple

$$p^2 = 0; \tag{15.113}$$

su longitud invariante al cuadrado es cero. Hemos visto que el cuadrimomento de una partícula material (esto es, una partícula con $m > 0$) es siempre de tipo tiempo futuro. En contraste, aquél de cualquier partícula sin masa está sobre el cono de luz futuro y es **tipo luz futuro**.

Como las definiciones (15.109) ya no tienen sentido, la cuestión que naturalmente aparece es cómo se definen la energía y el momento de una partícula sin masa. En principio, al menos, se pueden definir usando las leyes de conservación. Consideremos, por ejemplo, la emisión de un fotón por un átomo X:

$$X^* \rightarrow X + \gamma \tag{15.114}$$

donde X^* denota un estado excitado del átomo y X su estado fundamental, y donde γ es el símbolo estándar para el fotón. Como ya sabemos cómo definir y medir la energía y el momento de cualquier estado del átomo, podemos hallar los valores correspondientes para el fotón a partir de la conservación de la energía y el momento. Por supuesto, se debe comprobar que esta definición sea coherente. ¿Conduciría otro proceso diferente a las mismas respuestas para el mismo fotón? Por ejemplo, supongamos que permitimos al fotón de (15.114) colisionar con un segundo átomo Y y expulsar un electrón (el efecto fotoeléctrico):

$$\gamma + Y \rightarrow Y^+ + \mathrm{e} \tag{15.115}$$

donde Y^+ denota el ión positivo de Y con un electrón menos. Utilizando este proceso, podríamos medir la energía y el momento de un fotón, y estas segundas medidas deberían producir las mismas respuestas que el primero. Los experimentos han mostrado repetidamente que la energía y el momento del fotón están definidos de forma coherente de esta manera.

De hecho hay una segunda manera de hallar la energía y el momento del fotón. Uno de los primeros descubrimientos (debido a Max Planck y Einstein) en el desarrollo de la mecánica cuántica fue que la energía de un fotón está relacionada con la frecuencia de su onda electromagnética asociada por la famosa relación

$$E = \hbar\omega \tag{15.116}$$

donde $\hbar$ es la constante de Planck (realmente la constante de Planck original h dividida entre 2π, $\hbar = h/2\pi = 1{,}05 \times 10^{-34}$ J·s) y omega es la frecuencia angular de la

---

del fotón es del orden de 10^{-20} veces la masa del electrón). En las bases teóricas se acepta generalmente que debe existir una partícula sin masa llamada gravitón, que hace por la gravedad lo mismo que el fotón por el electromagnetismo, pero no hay evidencia directa de su existencia.

onda. Análogamente, el momento de un fotón está dado por

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \tag{15.117}$$

donde $\mathbf{k}$ es el vector de onda de la onda. De este modo, E y $\mathbf{p}$ se pueden hallar midiendo la frecuencia y el vector de onda de la onda correspondiente. Es un hecho agradable que las dos relaciones (15.116) y (15.117) se puedan combinar en una única relación de cuadrivector. Como $p = (\mathbf{p}, E/c)$ y el cuadrivector de onda es $k = (\mathbf{k}, \omega/c)$, las dos relaciones implican que

$$p = \hbar k. \tag{15.118}$$

Como ambos miembros de esta ecuación son cuadrivectores, esta relación es invariante relativista; es decir, las dos relaciones cuánticas (15.116) y (15.117) son coherentes con los principios de relatividad.

La relación (15.117) se reescribe muchas veces en términos de la longitud de onda λ. Como $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$,

$$|\mathbf{p}| = \hbar|\mathbf{k}| = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}. \tag{15.119}$$

En esta forma la relación se denomina muchas veces **relación de De Broglie** en honor al físico francés Louis de Broglie (1892–1987), quien primero propuso que esta relación debería aplicarse a la onda cuántica asociada con *cualquier* partícula (no sólo fotones). Para que sirva de referencia, reescribiré el cuadrimomento de un fotón como sigue:

$$p = \hbar k = \hbar\left(\mathbf{k}, \frac{\omega}{c}\right) = \frac{\hbar\omega}{c}(\hat{\mathbf{k}}, 1) \tag{15.120}$$

donde la última igualdad se cumple porque $|\mathbf{k}| = \omega/c$, así que $\mathbf{k} = (\omega/c)\hat{\mathbf{k}}$.

El efecto Compton

Históricamente, la evidencia más influyente y persuasiva para la existencia de fotones sin masa que cumplen las relaciones de los últimos párrafos fue el experimento del físico estadounidense Arthur Compton (1892–1962) en 1923. Compton disparó fotones de rayos X sobre electrones estacionarios [28] y midió el aumento en la longitud de onda de los fotones dispersados. La teoría clásica requeriría que la longitud

[28] Los electrones blanco eran realmente los electrones de valencia presentes en los átomos de carbono de un trozo de grafito. Por ello los electrones no eran ciertamente perfectamente estacionarios, pero su energía cinética (unos pocos eV) era despreciable comparada con la energía de los fotones de rayos X (muchos cientos de eV). Por la misma razón, la ligadura de los electrones (energía de ligadura $\approx$ unos pocos eV) no era importante con energías del fotón tan altas.

de onda de la radiación dispersada fuera exactamente la misma que la de las ondas incidentes, pero un aumento en la longitud de onda se explica fácilmente si la radiación es transportada por fotones tipo partícula. Cuando un fotón colisiona con un electrón, el electrón retrocede, llevándose un poco de la energía original del fotón. Por tanto el fotón emergente debe tener menos energía y por ello menos momento que los del haz incidente. Según (15.119) menos momento significa mayor longitud de onda, y esto explica el aumento en la longitud de onda. Utilizando las relaciones de los últimos párrafos, Compton fue capaz de calcular el cambio esperado en la longitud de onda y su experimento confirmó triunfante sus cálculos.

El experimento de Compton se muestra esquemáticamente en la Figura 15.15. El fotón viene de la izquierda con cuadrimomento $p_{\gamma o}$ y emerge formando un ángulo θ con cuadrimomento p_γ, donde según (15.120)

$$p_{\gamma o} = \frac{\hbar\omega_o}{c}(\hat{\mathbf{k}}_o, 1) \qquad \text{y} \qquad p_\gamma = \frac{\hbar\omega}{c}(\hat{\mathbf{k}}, 1). \tag{15.121}$$

El cuadrimomento inicial del electrón es

$$p_o = (0, 0, 0, mc) \tag{15.122}$$

y retrocede con cuadrimomento p. Ahora, por conservación del cuadrimomento, $p_o + p_{\gamma o} = p + p_\gamma$, o

$$p_o + (p_{\gamma o} - p_\gamma) = p.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros encontramos que

$$p_o^2 + 2p_o \cdot (p_{\gamma o} - p_\gamma) + \left(p_{\gamma o}^2 - 2p_{\gamma o} \cdot p_\gamma + p_\gamma^2\right) = p^2.$$

Puesto que $p_o^2 = p^2 = -m^2c^2$, estos dos términos se cancelan, y como $p_{\gamma o}^2 = p_\gamma^2 = 0$, estos dos términos desaparecen, y nos queda

$$p_o \cdot (p_{\gamma o} - p_\gamma) = p_{\gamma o} \cdot p_\gamma. \tag{15.123}$$

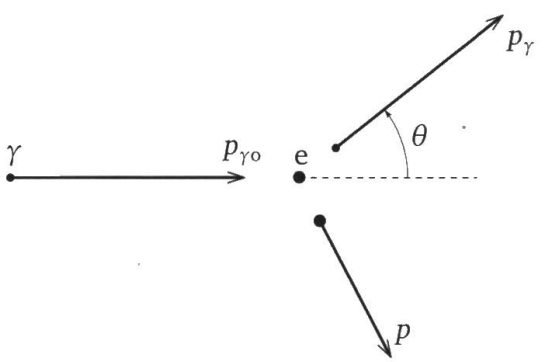


Figura 15.15. Un fotón, denotado por γ, con cuadrimomento $p_{\gamma o}$ choca con un electrón estacionario. El fotón emerge formando un ángulo θ con el cuadrimomento p_γ, y el electrón retrocede con cuadrimomento p.

La sustitución de (15.122) y (15.121), seguida de un poco de álgebra, conduce a (como se debería comprobar)

$$\omega_0 - \omega = \frac{\hbar}{mc^2}(1 - \cos\theta)\omega_0\omega$$

o

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0} = \frac{\hbar}{mc^2}(1\cos\theta).$$

Finalmente, sustituyendo ω por $2\pi c/\lambda$, encontramos el cambio en la longitud de onda deseado,

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta), \tag{15.124}$$

donde he sustituido $2\pi\hbar$ por la constante original de Planck h. Ésta es la célebre fórmula de Compton para el cambio en la longitud de onda de radiación dispersada. El hecho de que los datos de Compton concordasen con su predicción a varios ángulos apoyó fuertemente la idea de que la energía y el momento de la radiación son transportados por fotones que cumplen las leyes de la mecánica relativista, pero con $m = 0$.

15.17 Tensores*

* *Como es habitual, las secciones marcadas con un asterisco se pueden omitir en una primera lectura*

En la siguiente y última sección de este capítulo daré una breve explicación de la forma relativista de la teoría electromagnética. Desafortunadamente, incluso esta breve introducción requiere algunos conocimientos sobre las propiedades de los tensores en el espacio-tiempo tetradimensional, y estos cuadritensores son el tema principal de la presente sección. Una revisión completa de los cuadritensores requiere una maquinaria más elaborada todavía de vectores «covariantes» y «contravariantes», pero, para nuestros propósitos actuales podemos arreglarnos sin este formalismo. Sin embargo, se debe tener en cuenta que si se desea profundizar en el estudio de la relatividad, se necesitará llegar a dominar esta maquinaria más elaborada.[29] Aquí comenzaré mi explicación examinando las propiedades de transformación de los vectores tridimensionales y los tensores.

[29] Para una explicación sencilla, clara y razonable vea David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, tercera edición (PrenticeHall, 1999), páginas 501 y 535.

Vectores y tensores en tres dimensiones

Un trivector **a** está caracterizado por sus tres componentes (en cada sistema) y por sus propiedades de transformación bajo rotaciones, como en (15.35),

$$\mathbf{a}' = \mathbf{R}\mathbf{a}, \tag{15.125}$$

donde **a** y **a**′ denotan las columnas formadas por las tres componentes en cada uno de los dos sistemas, y **R** es la matriz de rotación (3 × 3) que las conecta. En detalle, esta ecuación matricial se lee

$$a_i' = \sum_j R_{ij} a_j \tag{15.126}$$

donde la suma va de $j = 1$ a 3.

Para cálculos posteriores necesitamos establecer una propiedad importante de la rotación de matrices **R**. Sabemos, por supuesto, que cualquier rotación deja invariante el producto escalar **a**·**b** de cualesquiera dos vectores; esto es, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'$, con **a**′ dado por (15.125), y asimismo **b**′. Ahora bien, en notación matricial, el producto escalar es

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} \tag{15.127}$$

donde debemos ahora insistir en que **b** denota la *columna* de números b_1, b_2, b_3 y $\tilde{\mathbf{a}}$ la *fila* de números a_1, a_2, a_3. De este modo, en notación matricial, la ecuación $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'$ se escribe

$$\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} = (\mathbf{R}\mathbf{a})\tilde{}(\mathbf{R}\mathbf{b}) = \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R})\mathbf{b}. \tag{15.128}$$

[Aquí he utilizado el resultado de que $(\mathbf{R}\mathbf{a})\tilde{} = \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{R}}$ (vea el Problema 15.94]. Como esto se debe cumplir para cualquier elección de **a** y **b**, es fácil mostrar (Problema 15.95) que

$$\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R} = \mathbf{1}, \tag{15.129}$$

donde, como antes, **1** denota la matriz unitaria 3 × 3. Cualquier matriz que cumpla esta condición se dice que es una **matriz ortogonal**, así que hemos demostrado que las rotaciones están dadas por matrices ortogonales 3 × 3.

Un tensor tridimensional **T** comprende nueve elementos T_{ij} (en cada sistema de referencia cartesiano tridimensional), donde i y j toman ambos valores de 1 a 3. (Estrictamente hablando, un tensor con nueve elementos T_{ij} es un tensor de *segundo orden*. Más generalmente, un tensor de orden n tiene 3^n elementos, pero sólo estaremos interesados con el caso $n = 2$). Para encontrar las propiedades de transformación de un tensor, consideremos el ejemplo simple de un tensor con elementos

$$T_{ij} = a_i b_j \tag{15.130}$$

donde a_i y b_j son las componentes de cualesquiera dos vectores. (Por ejemplo, **a** podría ser la posición de una partícula y **b** su velocidad). Éste obviamente tiene los nueve elementos requeridos y es, en un sentido, el tensor prototipo.

La transformación del tensor (15.130) se sigue inmediatamente de la de los dos vectores a partir de la cual se construye:

$$T'_{ij} = a'_i b'_j = \left(\sum_k R_{ik} a_k\right)\left(\sum_l R_{jl} b_l\right)$$
$$= \sum_{k,l} R_{ik} R_{jl} T_{kl}. \tag{15.131}$$

Esta transformación es la característica que define un tensor. Es muy parecida a la transformación (15.126) para un vector, excepto que el tensor, con sus dos índices, obtiene dos matrices de rotación, una para cada índice.

Podemos escribir la transformación (15.131) en forma matricial si advertimos que $(\mathbf{R})_{jl} = (\tilde{\mathbf{R}})_{lj}$, donde $\tilde{\mathbf{R}}$ denota la transpuesta de **R**, así que (15.131) se puede escribir

$$\mathbf{T}' = \mathbf{RT}\tilde{\mathbf{R}}. \tag{15.132}$$

Cualquier tensor tridimensional (de segundo orden) se transforma de acuerdo con esta ecuación, y cualquier conjunto de nueve elementos que se transforme de esta manera es un tensor.

Una de las operaciones más importantes que uno puede realizar con tensores es multiplicarlos por vectores. Por ejemplo, el momento angular **L** de un cuerpo rígido está dado por el producto $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ del tensor momento de inercia **I** y el vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Es importante que cualquier producto de esta forma sea, como esperaríamos, un vector, y esto es fácil de probar: sea **T** cualquier tensor y **a** cualquier vector, y en todo sistema de referencia sea la columna de tres números **b** definida como $\mathbf{b} = \mathbf{Ta}$. Para mostrar que, con esta definición, **b** es un vector, usamos las propiedades (15.132) y (15.125) de **T** y **a** como sigue:

$$\mathbf{b}' = \mathbf{T}'\mathbf{a}' = (\mathbf{RT}\tilde{\mathbf{R}})(\mathbf{Ra}) = \mathbf{RT}(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R})\mathbf{a} = \mathbf{RTa} = \mathbf{Rb}, \tag{15.133}$$

donde la cuarta igualdad se sigue porque, según (15.129), $\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R} = \mathbf{1}$. Concluimos que **b**, que es claramente una columna de tres números, se transforma como un vector; es decir, $\mathbf{b} = \mathbf{Ta}$ *es* un vector. Podemos darle la vuelta a este argumento y probar (Problema 15.99) que sabiendo que **a** y **b** son vectores y en todo sistema se halla que $\mathbf{b} = \mathbf{Ta}$, donde **T** es una matriz 3×3 de números (en cada sistema), entonces **T** cumple (15.132) y es Por tanto un tensor.

Vectores y tensores en el espacio-tiempo tetradimensional

La discusión de vectores y tensores en el espacio-tiempo tetradimensional es muy similar a la que acabamos de mencionar para tres dimensiones, con las únicas complicaciones que produce el signo menos en el producto escalar invariante. Un cuadrivector está dado por una columna a de cuatro números (en cada sistema), que se transforma bajo la transformación de Lorentz $a' = \Lambda a$ cuando nos movemos de una sistema inercial $\mathcal{S}$ a otro, $\mathcal{S}'$. Esta transformación deja invariante el producto escalar, que podemos escribir en notación matricial como

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4 = \tilde{a} G b \tag{15.134}$$

donde b denota la columna para el cuadrivector b, $\tilde{a}$ es la fila para a, y G es la matriz 4×4

$$G = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{15.135}$$

Esta **matriz métrica**, insertada entre $\tilde{a}$ y b en (15.134), simplemente cambia el signo de la cuarta componente de b y así inserta el signo menos necesario en el producto escalar.

El producto escalar (15.134) es invariante cuando sustituimos a y b por Λa y Λb, y exactamente el argumento que condujo a (15.129) muestra (Problema 15.98) que

$$\tilde{\Lambda} G \Lambda = G \tag{15.136}$$

(el análogo relativista de la condición $\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R} = \mathbf{1}$ para rotaciones). El conjunto de todas las matrices 4×4 que cumplen la condición (15.136) se denomina **grupo de Lorentz**, porque todas las transformaciones de Lorentz deben cumplir esta condición.

Un cuadritensor (estrictamente hablando un cuadritensor de orden 2) está definido como un conjunto de dieciséis números $T_{\mu\nu}$ (definido para todo sistema inercial $\mathcal{S}$), donde los índices μ y ν van desde 1 hasta 4, el cual, cuando se forma en una matriz 4×4 T, cumple

$$T' = \Lambda T \tilde{\Lambda} \tag{15.137}$$

(una propiedad totalmente análoga a la ecuación (15.132) para los tritensores). Igual que formamos el producto escalar (producto punto) (15.134) de dos cuadrivectores insertando la matriz G entre dos matrices apropiadas, podemos formar un producto punto de un tensor y un vector de la misma manera:

$$T \cdot a = T G a. \tag{15.138}$$

Es un ejercicio directo mostrar que, si T es un tensor cualquiera y a cualquier vector, entonces $b = T \cdot a$ es un cuadrivector. [La prueba es análoga a (15.133) para tres dimensiones (vea el Problema 15.96)]. Recíprocamente, se puede probar (Problema 15.99) una «regla del cociente», que sabiendo que a y b son cuadrivectores y si $b = T \cdot a$ en todo sistema $\mathcal{S}$, entonces T (el «cociente» de b y a) es un cuadritensor.

Armados con estas definiciones y propiedades de los cuadritensores, estamos preparados para una breve aventura por la electrodinámica relativista.

15.18 Electrodinámica y relatividad

Que la luz viaje a velocidad c en todas las direcciones es una consecuencia de las leyes del electromagnetismo clásico, y la relatividad especial nació del hecho de que la velocidad de la luz c es la misma en todos los sistemas inerciales. Estas dos observaciones sugieren que el electromagnetismo clásico puede ya ser congruente con los principios de relatividad. La manera más sencilla de *probar* esta sugerencia es mostrar que las leyes familiares de la electrodinámica se pueden escribir en términos de cuadriescalares, cuadrivectores y cuadritensores, de modo que su invariancia bajo transformaciones de Lorentz sea en sí misma evidente. Aquí lo haré sólo para una ley, la importantísima ley de la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{15.139}$$

Durante el proceso encontraremos las reglas de transformación para los campos eléctrico y magnético, **E** y **B**. Antes de tratar las propiedades de los campos **E** y **B**, necesitamos saber que es un hecho experimental que la carga q de cualquier partícula tiene el mismo valor en todos los sistemas inerciales; es decir, q es un escalar Lorentz.

Adoptaré el punto de vista de que la ecuación de Lorentz (15.139) es un hecho observado, válida en todos los sistemas inerciales (que lo es definitivamente). En la forma (15.139), ciertamente no *parece* invariante desde el punto de vista relativista, y nuestro objetivo es reescribirla para que lo parezca. La primera pista sobre cómo hacerlo es advertir que (15.139) define **F** como una función lineal de **v**. El siguiente paso, muy natural, es reescribir la relación lineal en términos de la cuadrifuerza K y la cuadrivelocidad u. Recuerde que

$$K = \left(\gamma \mathbf{F}, \frac{\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c}\right) \qquad \text{y} \qquad u = (\gamma \mathbf{v}, \gamma c). \tag{15.140}$$

Multiplicando ambos miembros de (15.139) por γ, se puede ver que K es una función lineal de u. La relación más sencilla de ese tipo tendría la forma $K = q\mathcal{F} \cdot u$, donde $\mathcal{F}$ sería algo así como un cuadritensor, todavía desconocido (y he insertado un factor separado de q porque K es obviamente proporcional a q). En forma matricial, esta

relación se leería $K = q\mathcal{F}Gu$ [donde K y u deben verse ahora como columnas 4×1, y G es la matriz métrica (15.135)]. Los 16 elementos de la matriz $\mathcal{F}G$ se pueden hallar escribiendo las componentes de K una por una. Por ejemplo, de (15.140) y (15.139), la primera componente de K es

$$K_1 = \gamma q(E_1 + v_2 B_3 - v_3 B_2) = q[B_3 u_2 - B_2 u_3 + (E_1/c)u_4]. \tag{15.141}$$

Los coeficientes de $u_1, \ldots, u_4$ son justo la primera fila de la matriz $\mathcal{F}G$ en la relación propuesta $K = q\mathcal{F}Gu$. Procediendo de esta manera, vemos que la matriz entera $\mathcal{F}G$ tiene que ser

$$\mathcal{F}G = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1/c \\ -B_3 & 0 & B_1 & E_2/c \\ B_2 & -B_1 & 0 & E_3/c \\ E_1/c & E_2/c & E_3/c & 0 \end{bmatrix}. \tag{15.142}$$

[Comparemos la primera fila de esta matriz con los coeficientes en (15.141); para más detalles, vea el Problema 15.104]. Finalmente, como $G^2 = 1$ (la matriz unitaria 4×4), podemos multiplicar por G por la derecha para obtener el **tensor del campo electromagnético**

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -E_1/c \\ -B_3 & 0 & B_1 & -E_2/c \\ B_2 & -B_1 & 0 & -E_3/c \\ E_1/c & E_2/c & E_3/c & 0 \end{bmatrix} \tag{15.143}$$

en términos del cual la fuerza de Lorentz toma la forma excelentemente sencilla

$$K = q\mathcal{F} \cdot u. \tag{15.144}$$

Estamos adoptando el punto de vista de que la ley de la fuerza de Lorentz es un hecho experimental, válida en todos los sistemas inerciales. En la ecuación (15.144), K y u se sabe que son cuadrivectores, y la carga q es un escalar. De la regla del cociente mencionada debajo de la ecuación (15.138) se deduce que $\mathcal{F}$ es un cuadritensor, que nos permitirá encontrar el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos bajo cualquier transformación de Lorentz.[30] Para que sirva de referencia, advierta que $\mathcal{F}$ es un tensor *antisimétrico*; esto es, la matriz $\mathcal{F}$ es antisimétrica, y cumple por tanto $\tilde{\mathcal{F}} = -\mathcal{F}$.

[30] Existen muchas maneras de llegar al tensor de campo $\mathcal{F}$, algunas de las cuales *definen* $\mathcal{F}$ como un cuadritensor. Con tal enfoque, la ecuación de la fuerza de Lorentz (15.144) automáticamente tiene la forma «cuadrivector = cuadrivector», que garantiza la invariancia de Lorentz de la ecuación de la fuerza de Lorentz.

Transformación de Lorentz de los campos eléctrico y magnético

El tensor de campo $\mathcal{F}$ especifica los campos **E** y **B** en cualquier sistema inercial dado $\mathcal{S}$. Como $\mathcal{F}$ es un cuadritensor, su valor en cualquier otro sistema $\mathcal{S}'$ está dado por (15.137) como

$$\mathcal{F}' = \Lambda \mathcal{F} \tilde{\Lambda}. \tag{15.145}$$

Para cualquier transformación de Lorentz Λ dada, es un ejercicio directo, aunque tedioso, obtener el segundo miembro de (15.145), y comparando el resultado con la definición (15.143) de $\mathcal{F}'$, se pueden escribir los campos transformados. Por ejemplo, para el empujón estándar con velocidad v en la dirección del eje x_1, uno encuentra (Problema 15.105)

$$\begin{aligned} E_1' &= E_1, \quad E_2' = \gamma(E_2 - \beta c B_3), \quad E_3' = \gamma(E_3 + \beta c B_2) \\ B_1' &= B_1, \quad B_2' = \gamma(B_2 + \beta E_3/c), \quad B_3' = \gamma(B_3 - \beta E_2/c). \end{aligned} \tag{15.146}$$

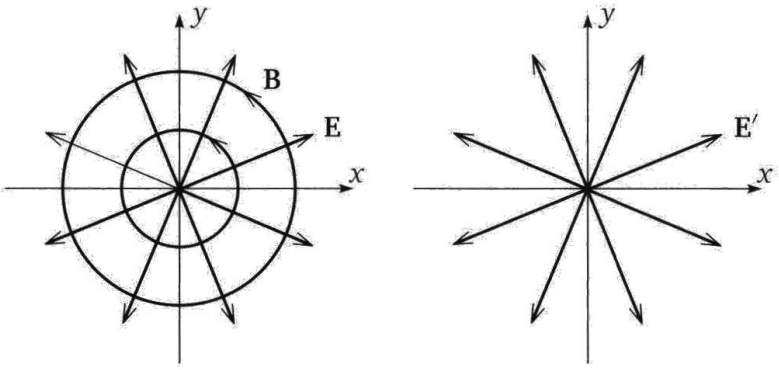
La característica más importante de las transformaciones (15.146) es que mezclan los campos eléctrico y magnético. Una configuración cuyos campos sean puramente eléctricos en un sistema $\mathcal{S}$ ($\mathbf{B} = 0$ en todas partes, como para cualquier distribución estática de carga), tendrá inevitablemente componentes magnéticas distintas de cero en algunos otros sistemas $\mathcal{S}'$ ($\mathbf{B}' \neq 0$). Por consiguiente podemos decir que en relatividad la existencia de campos eléctricos *requiere* de la existencia de campos magnéticos y viceversa.

Una ventaja importante de conocer las propiedades de transformación de los campos electromagnéticos es esta: en la búsqueda de los campos debidos a cierta distribución de carga y de corriente en un sistema $\mathcal{S}$, puede ser posible encontrar un sistema $\mathcal{S}'$ en el cual los campos se evalúan más fácilmente. Si esto sucede, entonces la ruta más simple puede ser escribir los campos en $\mathcal{S}'$ y después transformarlos de nuevo al sistema original $\mathcal{S}$, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15.12 *Campos de una corriente recta larga*

Encontrar los campos E y B de una línea de carga uniforme, infinitamente larga con densidad λ (medida en coulombios/metro), situada sobre el eje z del sistema $\mathcal{S}$ y que viaja con velocidad v en la dirección $+z$.

La línea de carga que se mueve constituye una corriente $I = \lambda v$ por el eje z, así que el problema es hallar los campos combinados de una carga lineal y una corriente lineal. Reconozcamos primero que esto se puede hacer por métodos elementales, sin abandonar el sistema $\mathcal{S}$: usando la ley de Gauss podemos mostrar que el campo E de la carga lineal es $E = 2k\lambda/\rho$ radialmente hacia fuera desde el eje z. (Aquí



(a) Sistema $\mathcal{S}$ **(b)** Sistema $\mathcal{S}'$

Figura 15.16. Campos producidos por una línea de carga sobre el eje z. **(a)** En el sistema $\mathcal{S}$, la línea de carga se está moviendo hacia arriba, fuera de la página. Esto constituye una corriente, que produce un campo B que da vueltas alrededor del eje z (además del campo E, que apunta radialmente hacia fuera del eje z). **(b)** El sistema $\mathcal{S}'$ es el sistema en reposo de las cargas, así que no hay corriente y por tanto tampoco hay campo B (sólo el campo radial E).

$k = 1/4\pi\epsilon_0$ es la constante de la fuerza de Coulomb y ρ es la distancia perpendicular desde el eje z, esto es, la primera de las coordenadas ρ, ϕ, z de coordenadas polares cilíndricas). Análogamente, usando la ley de Ampere, se puede mostrar que el campo B de la corriente es $B = (\mu_0/2\pi)I/\rho$ en la dirección dada por la regla de la mano derecha, donde μ_0 es la famosa permeabilidad del espacio o del vacío. Estos dos resultados bien conocidos se pueden expresar de forma compacta utilizando los vectores unitarios de coordenadas polares cilíndricas:

$$\mathbf{E} = \frac{2k\lambda}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho}\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{15.147}$$

Ambos campos están esbozados en la Figura 15.16(a).

Aunque la deducción mediante las leyes de Gauss y Ampere es totalmente directa, es instructivo volver a obtener los mismos resultados transformando a un sistema $\mathcal{S}'$ que se desplaza con las cargas. En $\mathcal{S}'$, no hay corriente, así que el único campo es el campo eléctrico radial, $E' = 2k\lambda'/\rho'$, como se muestra en la Figura 15.16(b). Este campo apunta en la dirección del vector unitario $\hat{\boldsymbol{\rho}}' = (x'/\rho', y'/\rho', 0)$, así que se puede escribir como

$$\mathbf{E}' = \frac{2k\lambda'}{\rho'}\hat{\boldsymbol{\rho}}' = \frac{2k\lambda'}{\rho'^2}(x', y', 0). \tag{15.148}$$

Antes de transformar de nuevo al sistema original $\mathcal{S}$, debemos reconocer que las densidades de carga λ y λ' no son iguales: la carga total contenida en un segmento cualquiera del eje z debe ser la misma en cualquier sistema (invariancia de la carga), así que $\lambda\,\Delta z = \lambda'\Delta z'$, pero, debido a la contracción de la longitud, $\Delta z = \Delta z'/\gamma$.

Por tanto

$$\lambda = \gamma\lambda'. \tag{15.149}$$

Debemos transformar ahora los campos $\mathbf{E}'$, dados por (15.148), y $\mathbf{B}' = 0$ otra vez al sistema $\mathcal{S}$. Para hacerlo advertimos primero que $\mathcal{S}'$ está viajando por el eje z de $\mathcal{S}$ (no por el eje x, como en el empujón estándar). Por consiguiente debemos primero reescribir (15.146) para un empujón en la dirección del eje z. Entonces debemos encontrar la inversa de esta transformación (porque queremos los campos sin primas en términos de los campos con primas). El resultado es, como se puede comprobar fácilmente,

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma(E_1' + \beta c B_2'), \quad E_2 = \gamma(E_2' - \beta c B_1'), \quad E_3 = E_3' \\ B_1 &= \gamma(B_1' - \beta E_2'/c), \quad B_2 = \gamma(B_2' + \beta E_1'/c), \quad B_3 = B_3'. \end{aligned} \tag{15.150}$$

Sustituyendo $\mathbf{B}' = 0$ y las componentes de $\mathbf{E}'$ de (15.148), vemos que

$$\mathbf{E} = \gamma \frac{2k\lambda'}{\rho^2}(x, y, 0) = \frac{2k\lambda}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}. \tag{15.151}$$

Al escribir la primera igualdad he usado el hecho de que x e y, y por tanto $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, son invariantes bajo un empujón en la dirección z; en la segunda, he sustituido $\gamma\lambda'$ por λ. Esto concuerda exactamente con el campo E hallado en (15.147).

Análogamente, sustituyendo $\mathbf{B}' = 0$ y (15.148) en las expresiones para $\mathbf{B}$ en (15.150), encontramos el campo magnético

$$\mathbf{B} = \gamma\beta \frac{2k\lambda'}{c\rho^2}(-y, x, 0)$$

Si hacemos las sustituciones $\gamma\lambda' = \lambda$, $\beta = v/c, k/c^2 = 1/(4\pi\epsilon_0 c^2) = \mu_0/4\pi$ y $(-y/\rho, x/\rho, 0) = \hat{\boldsymbol{\phi}}$, esto se convierte en

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\lambda v}{\rho}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{15.152}$$

y, como $\lambda v = I$ (la corriente), éste es exactamente el mismo que el campo B en (15.147). La característica destacada de esta deducción de $\mathbf{B}$ es que no se hizo referencia a la ley de Ampere. La ley de Gauss en el sistema $\mathcal{S}'$, combinada con la transformación de Lorentz de los campos, ha proporcionado el resultado que normalmente vemos como una expresión de la ley de Ampere.

Con este asombroso ejemplo del comportamiento del campo electromagnético bajo la transformación de Lorentz, debo terminar esta breve incursión en la electrodinámica relativista. Se pueden explorar algunos aspectos más en los problemas

al final del capítulo, y después se podrían leer los excelentes libros de Griffiths y Jackson.[31]

Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 15

Dilatación del tiempo

Si dos sucesos, observados en el sistema $\mathcal{S}_0$, ocurren en el mismo lugar y están separados por un intervalo de tiempo Δt_0, entonces el tiempo entre ellos medido en cualquier otro sistema $\mathcal{S}$ es

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \qquad \text{[Ec. (15.11)]}$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = V/c$ y V es la velocidad de $\mathcal{S}$ relativa a $\mathcal{S}_0$.

Contracción de la longitud

Si, observado en el sistema $\mathcal{S}_0$, un cuerpo está en reposo y tiene longitud l_0, entonces su longitud medida en un sistema $\mathcal{S}$ que se desplaza con velocidad **V** en la dirección de la longitud es

$$l = l_0/\gamma. \qquad \text{[Ec. (15.15)]}$$

Longitudes perpendiculares a **V** permanecen inalteradas.

La transformación de Lorentz

Las coordenadas de cualquier suceso medidas en dos sistemas (en la configuración estándar) están relacionadas por la **transformación de Lorentz**:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - Vx/c^2). \end{aligned}\right\} \qquad \text{[Ec. (15.20)]}$$

La transformación inversa de Lorentz se obtiene intercambiando las variables con primas y sin primas y cambiando el signo de V.

Fórmula de composición de velocidades

Las velocidades de un único objeto medidas en dos sistemas (en la configuración estándar) están relacionadas por la **fórmula de composición de velocidades**

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x V/c^2)} \quad \text{y} \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - v_x V/c^2)}$$

[Ecs. (15.26) y (15.27)]

---

[31] El Capítulo 12 de David J.Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (tercera edición, Prentice Hall, 1999), está aproximadamente al nivel de este libro pero naturalmente profundiza en la electrodinámica con mucho más detalle. El de J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (tercera edición, John Wiley, 1998), es un texto de graduado, que se puede abordar después de leer el libro de Griffiths.

Cuadrivectores

Si reescribimos las coordenadas (x, y, z) como (x_1, x_2, x_3) e introducimos $x_4 = ct$, entonces los cuadrivectores $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ representan puntos en un **espacio–tiempo** tetradimensional. Si aceptamos disponer las componentes de x en una columna 4×1, entonces las transformaciones de Lorentz se convierten en «rotaciones» de la forma $x' = \Lambda x$, donde Λ es una matriz 4×4. Un **cuadrivector** es cualquier conjunto de cuatro números, $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ (un conjunto para cada sistema inercial) que se transforma de esta manera,

$$q' = \Lambda q. \qquad \text{[Sección 15.8]}$$

Producto escalar invariante

El **producto escalar** de dos cuadrivectores x e y se define como

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4 \qquad \text{[Ec. (15.50)]}$$

y es invariante bajo todas las transformaciones de Lorentz. El producto escalar de un vector por sí mismo se suele escribir como $x \cdot x = x^2$.

El cono de luz

El cono de luz de un punto Q en el espacio-tiempo consiste en todos los rayos de luz que pasan por Q; equivalentemente, contiene todos los puntos P con $(x_P - x_Q)^2 = 0$.

[Sección 15.10]

Efecto Doppler relativista

La luz de una fuente que viaja con velocidad $\mathbf{V}$ relativa al sistema $\mathcal{S}$ se observa a un ángulo θ (θ = ángulo entre $\mathbf{V}$ y el rayo de luz). Si la frecuencia de la luz, medida en el sistema en reposo de la fuente es ω_0 la frecuencia observada en $\mathcal{S}$ es

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \beta \cos\theta)}. \qquad \text{[Ec. (15.64)]}$$

Masa, cuadrivelocidad, momento, y energía

La **masa** (invariante) de un objeto se define como su masa en reposo. La **cuadrivelocidad** es

$$u = \frac{dx}{dt_0} = \gamma(\mathbf{v}, c). \qquad \text{[Ecs. (15.66) y (15.67)]}$$

El cuadrimomento es

$$p = mu = (\gamma m\mathbf{v}, \gamma mc) = (\mathbf{p}, E/c). \qquad \text{[Ecs. (15.68), (15.70) y (15.75)]}$$

Tres relaciones útiles

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{p}c/E, p \cdot p = -(mc)^2, \quad \text{y} \quad E^2 = (mc^2)^2 + (\mathbf{p}c)^2. \qquad \text{[Ecs. (15.83)–(15.85)]}$$

Trifuerza y cuadrifuerza

La **trifuerza F** y la **cuadrifuerza** K sobre una partícula son

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \text{y} \quad K = \frac{dp}{dt_0}. \qquad \text{[Ecs. (15.100) y (15.107)]}$$

Partículas sin masa

Con $m = 0$, una partícula sin masa tiene

$$E = |\mathbf{p}|c, uv = c, \quad \text{y} \quad p^2 = 0. \qquad \text{[Ecs. (15.111)–(15.113)]}$$

Transformación de los campos electromagnéticos

Bajo el empujón estándar, los campos eléctrico y magnético se transforman como sigue:

$$\begin{aligned} E_1' &= E_1, \quad E_2' = \gamma(E_2 - \beta c B_3), \quad E_3' = \gamma(E_3 + \beta c B_2) \\ B_1' &= B_1, \quad B_2' = \gamma(B_2 + \beta E_3/c), \quad B_3' = \gamma(B_3 - \beta E_2/c). \end{aligned} \qquad \text{[Ec. (15.146)]}$$

Problemas para el Capítulo 15

Los asteriscos indican el nivel aproximado de dificultad, desde los más fáciles (⋆) hasta los más difíciles (⋆ ⋆ ⋆).

Sección 15.2 Relatividad galileana

15.1 ⋆ Usando argumentos similares a los de la Sección 15.2, demostrar que la primera y la tercera leyes de Newton son invariantes bajo la transformación galileana.

15.2 ⋆ ⋆ Considerar una colisión inelástica clásica de la forma $A + B \rightarrow C + D$. (Por ejemplo, ésta podría ser una colisión tal como Na + Cl→ $Na^+ + Cl^-$ en la que dos átomos neutros intercambian un electrón y se convierten en iones con carga opuesta). Mostrar que la ley de conservación del momento clásico es invariante bajo la transformación galileana si y sólo si la masa total se conserva (como sucede ciertamente en mecánica clásica). (Veremos que en relatividad la definición clásica de momento tiene que ser modificada y que la masa total *no* se conserva).

Sección 15.4 Relatividad del tiempo; dilatación del tiempo

15.3 ⋆ Un satélite de la Tierra que viaja a baja altura se desplaza a unos 8000 m/s. ¿Cuál es el factor γ para su velocidad? Observado desde el suelo, ¿por cuánto diferiría un reloj que viajase a esa velocidad respecto de uno que estuviese situado en el suelo después de una hora (medido por el último)? ¿Cuál es la diferencia porcentual?

15.4 ⋆ ¿Cuál es el factor γ para una velocidad de $0{,}99c$? Observado desde el suelo, ¿en cuánto diferiría un reloj que viajase a esa velocidad respecto de uno que estuviera basado en el suelo después de una hora (medido por el último)?

15.5 ⋆ Un explorador del espacio A parte a una velocidad uniforme $0{,}95c$ hacia una estrella distante. Después de explorar la estrella durante un corto período de tiempo, regresa a la misma velocidad y llega a su casa después de una ausencia total de 80 años (según los observadores situados en la Tierra). ¿Cuánto tiempo estuvo ausente según los relojes de A? ¿Y cuánto ha envejecido comparado con su gemelo B que se quedó atrás en la Tierra?

[*Nota:* Esta es la famosa «paradoja de los gemelos». Es bastante fácil obtener la respuesta correcta mediante la inserción juiciosa de un factor de γ en el lugar correcto, pero para entenderla, se necesita reconocer que incluye *tres* sistemas inerciales: el sistema inercial confinado en la Tierra

$\mathcal{S}$, el sistema $\mathcal{S}'$ del cohete que va, y el sistema $\mathcal{S}''$ del cohete que vuelve. Escribir la fórmula de la dilatación del tiempo para las dos mitades del viaje y después sumarla. Advertir que el experimento *no* es simétrico entre los dos gemelos: B se queda en reposo en el único sistema inercial $\mathcal{S}$, pero A ocupa al menos dos sistemas diferentes. Esto es lo que permite al resultado ser asimétrico].

15.6 ⋆ A su regreso a la empresa de alquiler de cohetes Hertz después de una semana viajando por la galaxia, Spock se queda horrorizado cuando le dicen que le van a cobrar el alquiler de tres semanas. Suponiendo que viajó directamente hacia afuera y después directamente de vuelta, siempre a la misma velocidad, ¿a qué velocidad viajaba? (Ver la nota al Problema 15.5).

15.7 ⋆⋆ Los muones creados por los rayos cósmicos en la atmósfera superior caen hacia abajo más o menos uniformemente sobre la superficie de la Tierra, aunque algunos de ellos se desintegran durante el camino hacia abajo, con una vida media de unos 1,5 μs (medida en su sistema en reposo). Un detector de muones se transporta en un globo hasta una altitud de 2000 m, y en el transcurso de una hora detecta 650 muones que viajan a $0{,}99c$ hacia la Tierra. Si un detector idéntico permanece al nivel del mar, ¿cuántos muones debería registrar en una hora? Calcular la respuesta teniendo en cuenta la dilatación del tiempo relativista y también clásicamente. (Recordar que después de n vidas medias, 2^{-n} de las partículas originales sobreviven). No es necesario decir que la respuesta relativista concuerda con el experimento.

15.8 ⋆⋆ El pión (π^+ o π^-) es una partícula inestable que se desintegra con una vida media propia de $1{,}8 \times 10^{-8}$ s. (Esta es la vida media medida en el sistema en reposo del pión). **(a)** ¿Cuál es la vida media del pión medida en un sistema $\mathcal{S}$ en el que está viajando a $0{,}8c$? **(b)** Si se crean 32 000 piones en el mismo lugar, todos viajando a la misma velocidad, ¿cuántos quedarán después de haber bajado por una tubería de longitud $d = 36$ m? Recordar que después de n vidas medias, 2^{-n} de las partículas originales sobreviven. **(c)** ¿Cuál sería al respuesta si se hubiera ignorado la dilatación del tiempo? (Naturalmente es la respuesta (b) la que concuerda con el experimento).

15.9 ⋆⋆ Una manera de montar el sistema de relojes sincronizados en un sistema $\mathcal{S}$, tal como se describe al principio de la Sección 15.4, sería que el observador jefe mandase llamar a todos sus observadores al origen O y mandase sincronizar sus relojes allí, y entonces les hiciera viajar a sus posiciones asignadas *muy despacio*. Probar esta afirmación como sigue: suponer que cierto observador está asignado a una posición P a una distancia d del origen. Si viaja a velocidad constante V, cuando alcanza P, ¿cuánto diferirá su reloj del reloj del jefe en O? Mostrar que esta diferencia tiende a 0 cuando $V \to 0$.

15.10 ⋆⋆⋆ La dilatación del tiempo implica que cuando un reloj se mueve respecto al sistema $\mathcal{S}$, medidas cuidadosas hechas por observadores en $\mathcal{S}$ demostrarán que el reloj está atrasando. Esta no es en absoluto la misma cosa que decir que un único observador en $\mathcal{S}$ *verá* que el reloj atrasa, y esta última afirmación no siempre es cierta. Para entender esto, recordar que lo que vemos está determinado por la luz hasta que llega a nuestros ojos. Considerar una observadora situada muy cerca al lado del eje x cuando un reloj se aproxima a ella con velocidad V en la dirección del eje. Cuando el reloj se desplace de la posición A hasta la B, registrará un tiempo Δt_o, pero medido por los ayudantes de la observadora, el tiempo entre los dos sucesos («reloj en A» y «reloj en B») es $\Delta t = \gamma \Delta t_o$. Sin embargo, como B está más cerca que A de la observadora, la luz del reloj en B alcanzará a la observadora en un tiempo más corto de lo que lo hará la luz de A. Por tanto, el tiempo Δt_{ve} entre que la observadora *ve* el reloj en A y lo *ve* en B es menor que Δt. **(a)** Probar que

$$\Delta t_{ve} = \Delta t(1-\beta) = \Delta t_o \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

(que es menor que Δt_o). Probar ambas igualdades. **(b)** ¿Qué tiempo verá la observadora una vez que el reloj la ha rebasado y se aleja?

La enseñanza de este problema es que se debe tener cuidado al enunciar o pensar sobre la dilatación del tiempo. Está bien decir «los relojes en movimiento observados o medidos, atrasan», pero está definitivamente mal decir «los relojes en movimiento se ve que atrasan».

Sección 15.5 Contracción de la longitud

15.11 ⋆ Cuando un palo de un metro de largo me sobrepasa muy rápido (con velocidad **v** paralela al palo), mido su longitud y obtengo 80 cm. ¿Cuál es v?

15.12 ⋆⋆ Considerar el experimento del Problema 15.8 desde el punto de vista del sistema en reposo de los piones. ¿Cuál es la vida media de los piones en este sistema? En la parte (b), ¿cómo de larga es la tubería «vista» por los piones y cuánto tardan en pasar los piones? ¿Cuántos piones quedan al final de este tiempo? Comparar con la respuesta al Problema 15.8 y describir cómo los dos argumentos diferentes conducen al mismo resultado.

15.13 ⋆⋆ Un palo de un metro está en reposo en el sistema $\mathcal{S}'$, que está viajando con velocidad $V = 0{,}8c$ en la configuración estándar relativa al sistema $\mathcal{S}$. **(a)** El palo está en el plano $x'y'$ y forma un ángulo $\theta' = 60°$ con el eje x' (medido en $\mathcal{S}'$). ¿Cuál es su longitud l medida en $\mathcal{S}$, y cuál es el ángulo θ con el eje x? [*Ayuda:* Puede ayudar pensar en el palo como la hipotenusa de un triángulo 30–60–90 de contrachapado]. **(b)** ¿Cuál es l si $\theta = 60°$? ¿Cuál es θ' en este caso?

15.14 ⋆⋆⋆ Como la dilatación del tiempo, la contracción de la longitud no puede ser *vista* directamente por un solo observador. Para explicar esta afirmación, imaginemos una barra de longitud propia l_0 que se mueve por el eje x del sistema $\mathcal{S}$ y un observador situado lejos del eje x y a la derecha de la barra completa. Medidas cuidadosas de la longitud de la barra en un instante cualquiera en el sistema $\mathcal{S}$ proporcionarían, por supuesto, el resultado $l = l_0/\gamma$. **(a)** Explicar claramente por qué la luz que alcanza el ojo del observador en un instante cualquiera debe haber abandonado los dos extremos A y B de la barra en *instantes diferentes*. **(b)** Mostrar que el observador vería (y una cámara grabaría) una longitud mayor que l. [*Ayuda:* Imaginar que el eje x está marcado con una escala graduada]. **(c)** Mostrar que si el observador está de pie bien cerca de un lado del camión, verá una longitud que es realmente mayor que l_0; es decir, la contracción de la longitud se distorsiona a una dilatación.

Sección 15.6 Transformación de Lorentz

15.15 ⋆ Resolver las ecuaciones de la transformación de Lorentz (15.20) para obtener x, y, z, t en términos de x', y', z', t'. Verificar que se obtiene la transformación inversa de Lorentz (15.21). Observar que se podría haber llegado al mismo resultado intercambiando las variables con primas y las sin primas y cambiando V por $-V$.

15.16 ⋆ Considerar dos sucesos que ocurren en las posiciones $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ y en los instantes t_1 y t_2. Sean $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ y $\Delta t = t_2 - t_1$. Escribir la transformación de Lorentz para $\mathbf{r}_1$ y t_1, y asimismo para $\mathbf{r}_2$ y t_2 y deducir la transformación para $\Delta\mathbf{r}$ y Δt. Advertir que las diferencias $\Delta\mathbf{r}$ y Δt se transforman exactamente de la misma manera que $\mathbf{r}$ y t. Esta importante propiedad se sigue de la linealidad de la transformación de Lorentz.

15.17 ⋆ Considerar dos sucesos que ocurren simultáneamente en $t = 0$ en el sistema $\mathcal{S}$, ambos sobre el eje x en $x = 0$ y $x = a$. **(a)** Hallar los instantes de los dos sucesos medidos en un sistema $\mathcal{S}'$ que se desplaza en la dirección positiva del eje x con velocidad V. **(b)** Hacer lo mismo para un segundo sistema $\mathcal{S}''$ que se desplaza a velocidad V pero en la dirección negativa del eje x. Comentar el orden cronológico de los dos sucesos visto en los tres sistemas diferentes. Este sorprendente resultado se discute con más detalle en la Sección 15.10.

15.18 ⋆⋆ Usar la transformación inversa de Lorentz (15.21) para rededucir la fórmula de la dilatación del tiempo (15.8). [*Ayuda:* Considerar de nuevo el experimento mental de la Figura 15.3, con el destello y el clic que ocurren en las mismas posiciones vistas en el sistema $\mathcal{S}'$].

15.19 ⋆⋆ Una viajera en un cohete de longitud propia $2d$ monta un sistema de coordenadas $\mathcal{S}'$ con su origen O' anclado en el punto medio exacto del cohete y el eje x' a lo largo de la longitud del cohete. En $t' = 0$ enciende una bombilla en O'. **(a)** Escribir las coordenadas x'_F, t'_F y x'_B, t'_B para la llegada de la luz a las partes delantera y trasera del cohete. **(b)** Ahora consideremos el mismo experimento observado desde el sistema $\mathcal{S}$ relativo al cual el cohete está viajando con velocidad V (con $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ en la configuración estándar). Usar la transformación inversa de Lorentz para hallar las coordenadas x_F, t_F y x_B, t_B para la llegada de las dos señales. Explicar claramente con palabras por

qué las dos llegadas son simultáneas en $\mathcal{S}'$ pero no en $\mathcal{S}$. Este fenómeno se denomina relatividad de la simultaneidad.

Sección 15.7 Fórmula relativista de composición de velocidades

15.20 ⋆ La primera ley de Newton se puede enunciar así: si un objeto está aislado (no sometido a ninguna fuerza en absoluto), entonces se desplaza con velocidad constante. Sabemos que esto es invariante bajo la transformación galileana. Demostrar que también es invariante bajo la transformación de Lorentz. [Suponer que es cierto en un sistema inercial $\mathcal{S}$, y utilizar la fórmula relativista de composición de velocidades para mostrar que también es cierto en cualquier otro sistema $\mathcal{S}'$].

15.21 ⋆ Un cohete que viaja a velocidad $\frac{1}{2}c$ relativa al sistema $\mathcal{S}$ dispara balas hacia delante que viajan a velocidad $\frac{3}{4}c$ relativa al cohete. ¿Cuál es la velocidad de las balas relativa a $\mathcal{S}$?

15.22 ⋆ Un cohete se está desplazando a velocidad $0{,}9c$ por el eje x del sistema $\mathcal{S}$. Dispara una bala cuya velocidad $\mathbf{v}'$ (medida en el sistema en reposo del cohete $\mathcal{S}'$) es $0{,}9c$ en la dirección del eje y' de $\mathcal{S}'$. ¿Cuál es la velocidad de la bala (magnitud y dirección) medida en $\mathcal{S}$?

15.23 ⋆ Vistos en el sistema $\mathcal{S}$, dos cohetes se aproximan el uno al otro por el eje x viajando con velocidades iguales y opuestas de $0{,}9c$. ¿Cuál es la velocidad del cohete de la derecha medida por observadores situados en el de la izquierda? [Este y los dos problemas anteriores ilustran el resultado general de que en relatividad la «suma» de dos velocidades que son menores que c es siempre menor que c. Vea el Problema 15.43].

15.24 ⋆ El vehículo de huida de un ladrón, que puede viajar a una impresionante velocidad de $0{,}8c$, es perseguido por un policía, cuyo vehículo puede viajar modestamente a $0{,}4c$. Al darse cuenta de que no puede alcanzar al ladrón, el policía trata de dispararle con balas de viajan a $0{,}5c$ (relativa al policía). ¿Pueden las balas del policía dar el ladrón?

15.25 ⋆ Un cohete se desplaza a velocidad V por el eje x del sistema $\mathcal{S}$. Emite una señal (por ejemplo, un pulso de luz) que viaja con velocidad c en la dirección del eje y' del sistema en reposo del cohete $\mathcal{S}'$. ¿Cuál es la velocidad de la señal medida en $\mathcal{S}$?

15.26 ⋆ Dos objetos A y B se están aproximando el uno al otro, viajando en direcciones opuestas por el eje x del sistema $\mathcal{S}$ con velocidades v_A y v_B. En el instante $t = 0$, están en las posiciones $x = 0$ y $x = d$. Escribir sus posiciones para un instante t arbitrario y mostrar que se encuentran en el instante $t = d/(v_A + v_B)$. Advertir que esto implica que la velocidad relativa de los dos objetos es $v_A + v_B$ medida en el sistema $\mathcal{S}$ en el cual ambos se están moviendo. Esto puede parecer sorprendente a primera vista, porque podemos claramente escoger valores de v_A y v_B para los cuales esta velocidad relativa es mayor que c.[32]

15.27 ⋆ ⋆ ⋆ El sistema $\mathcal{S}'$ se desplaza a velocidad V_1 en la dirección del eje x del sistema $\mathcal{S}$ (en la configuración estándar). El sistema $\mathcal{S}''$ se desplaza a velocidad V_2 por el eje x' del sistema $\mathcal{S}'$ (también en la configuración estándar). Aplicando la transformación estándar de Lorentz dos veces, encontrar las coordenadas x'', y'', z'', t'' de cualquier suceso en términos de x, y, z, t. Mostrar que esta transformación es de hecho la transformación estándar de Lorentz con velocidad V dada por la «suma» relativista de V_1 y V_2.

15.28 ⋆ ⋆ ⋆ La fórmula relativista de composición de velocidades es la respuesta a la siguiente cuestión: si $\mathbf{u}$ es la velocidad de un observador inercial B relativa a un observador A, y $\mathbf{v}$ es la velocidad de C relativa a B, ¿cuál es la velocidad $\mathbf{w}$ de C relativa a A? Denotemos a la respuesta por $\mathbf{w} = \text{«}\mathbf{u}+\mathbf{v}\text{.»}$ En física clásica, ésta es justo la suma de vectores ordinaria de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$; en relatividad, está dada por la inversa de las fórmulas de composición de velocidades (15.26) y (15.27) (al menos para el caso en que $\mathbf{u}$ apunta en la dirección del eje x). Tomando $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ y $\mathbf{v} = (0, v, 0)$, escribir las componentes de «$\mathbf{u} + \mathbf{v}$» y también para «$\mathbf{v} + \mathbf{u}$.» [Tener cuidado al distinguir entre los factores

[32] Sin embargo, esto no viola ningún principio de relatividad. Veremos que ningún único objeto puede tener velocidad mayor que c relativa a algún sistema inercial, pero no hay nada que prohíba que *dos* objetos tengan velocidad relativa mayor que c medida en un sistema en el que ambos objetos se están moviendo.

γ, $\gamma(u)$ y $\gamma(v)$ que pertenecen a u y v]. Mostrar que «$\mathbf{u}+\mathbf{v}$» $\neq$ «$\mathbf{v}+\mathbf{u}$,» pero que los dos vectores tienen magnitudes iguales y difieren sólo por una rotación alrededor del eje z. Esta rotación se denomina a veces la rotación de Wigner y es la causa de la famosa precesión de Thomas, que tiene un efecto importante sobre la estructura fina de los niveles de energía atómicos.

Sección 15.8 Espacio-tiempo tetradimensional; cuadrivectores

15.29 ⋆ **(a)** Encontrar la matriz 3×3 $\mathbf{R}(\theta)$ que rota el espacio tridimensional alrededor del eje x_3, de modo que $\mathbf{e}_1$ rota un ángulo θ hacia $\mathbf{e}_2$. **(b)** Mostrar que $[\mathbf{R}(\theta)]^2 = \mathbf{R}(2\theta)$, e interpretar este resultado.

15.30 ⋆ El «ángulo» ϕ introducido en relación con la Ecuación (15.40) tiene varias propiedades útiles. Para cualquier velocidad $v < c$ (con factores correspondientes β y γ) podemos definir ϕ de modo que $\gamma = \cosh\phi$. Definido de esta manera, ϕ se denomina la **rapidez** correspondiente a v. Probar que $\operatorname{senh}\phi = \beta\gamma$ y que $\operatorname{tgh}\phi = \beta$.

15.31 ⋆ He aquí una útil propiedad de la rapidez introducida en el Problema 15.30: suponer que el observador B tiene rapidez ϕ_1 medida por A y que C tiene rapidez ϕ_2 medida por B (con ambas velocidades en la dirección del eje x). Esto es, la velocidad de B relativa a A tiene $\beta_1 = \operatorname{tgh}\phi_1$ y así sucesivamente. Probar que la rapidez de C medida por A es justo $\phi = \phi_1 + \phi_2$.

15.32 ⋆ En la Sección 15.8 afirmé que la matriz 4×4 Λ_R correspondiente a una rotación pura tiene la forma de bloques (15.44). Verificar esta afirmación escribiendo las componentes separadas de la ecuación $x' = \Lambda_R x$ y mostrar que la parte espacial (x_1, x_2, x_3) está rotada, mientras que x_4 permanece inalterada.

15.33 ⋆⋆ **(a)** Intercambiando x_1 y x_2, escribir la transformación de Lorentz para un empujón de velocidad V en la dirección del eje x_2 y la matriz 4×4 Λ_{B2} correspondiente. **(b)** Escribir las matrices 4×4 Λ_{R+} y Λ_{R-} que representan rotaciones del plano x_1x_2 a través de $\pm\pi/2$, con el ángulo de rotación medido en sentido contrario al de las agujas del reloj. **(c)** Verificar que $\Lambda_{B2} = \Lambda_{R-}\Lambda_{B1}\Lambda_{R+}$, donde Λ_{B1} es el empujón estándar en la dirección del eje x_1, e interpretar este resultado.

15.34 ⋆⋆ Sea $\Lambda_B(\theta)$ la matriz 4×4 que produce un empujón puro en la dirección que forma un ángulo θ con el eje x_1 en el plano x_1x_2. Explicar por qué esto se puede hallar como $\Lambda_B(\theta) = \Lambda_R(-\theta)\Lambda_B(0)\Lambda_R(\theta)$, donde $\Lambda_R(\theta)$ denota la matriz que rota el plano x_1x_2 un ángulo θ y $\Lambda_B(0)$ es el empujón estándar en la dirección del eje x_1. Usar este resultado para hallar $\Lambda_B(\theta)$ y comprobar el resultado encontrando el movimiento del origen espacial del sistema $\mathcal{S}$ observado en $\mathcal{S}'$.

15.35 ⋆⋆ Probar el siguiente útil resultado, denominado *teorema de la componente cero*: sea q un cuadrivector, y suponer que una componente de q se encuentra que es cero en todos los sistemas inerciales. (Por ejemplo, $q_4 = 0$ en todos los sistemas). Entonces las cuatro componentes de q son cero en todos los sistemas.

Sección 15.9 Producto escalar invariante

15.36 ⋆ Hemos visto que el producto escalar $x\cdot x$ de cualquier cuadrivector x consigo mismo es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Usar la invariancia de $x\cdot x$ para probar que el producto escalar $x\cdot y$ de cualesquiera dos cuadrivectores x e y es también invariante.

15.37 ⋆ Verificar directamente que $x'\cdot y' = x\cdot y$ para cualesquiera dos cuadrivectores x e y, donde x' y y' están relacionados con x e y por el empujón estándar de Lorentz en la dirección del eje x_1.

15.38 ⋆⋆ Cuando un observador se desplaza por el espacio con posición $\mathbf{x}(t)$, el cuadrivector $(\mathbf{x}(t), ct)$ traza una trayectoria a través del espacio-tiempo denominada línea del universo del observador. Considerar dos sucesos que ocurren en los puntos P y Q en el espacio-tiempo. Mostrar que si, medidos por el observador, los dos sucesos ocurren en el mismo instante t, entonces la línea que une P y Q es ortogonal a la línea del universo del observador en el instante t; esto es $(x_P - x_Q)\cdot dx = 0$, donde dx une dos puntos vecinos en la línea de mundo en los instantes t y $t + dt$.

Sección 15.10 El cono de luz

15.39 ⋆ Supongamos que un punto P en el espacio-tiempo con coordenadas $x = (\mathbf{x}, x_4)$ está dentro del cono de luz pasado visto en el sistema $\mathcal{S}$. Esto significa que $x \cdot x < 0$ y $x_4 < 0$ al menos en el sistema $\mathcal{S}$. Probar que estas dos condiciones se cumplen en todos los sistemas. Como esto significa que todos los observadores están de acuerdo en que $t < 0$, esto justifica denominar al interior del cono de luz pasado el pasado absoluto.

15.40 ⋆ Mostrar el enunciado de que un punto x en el espacio-tiempo que está en el cono de luz futuro es invariante Lorentz.

15.41 ⋆ En la proposición de la página 692, es obvio que al menos uno de los tres enunciados debe ser cierto. En la prueba dada allí, mostré que si el enunciado (1) es cierto, entonces también lo son los enunciados (2) y (3). Para completar la prueba, mostrar que (2) implica (1) y (3). [Estrictamente hablando se debería comprobar también que (3) implica (1) o (2), pero esto es tan similar al argumento ya dado que no es necesario molestarse].

15.42 ⋆ Probar que si x es de tipo tiempo y $x \cdot y = 0$, entonces y es de tipo espacio.

15.43 ⋆ **(a)** Mostrar que si un cuerpo tiene velocidad $v < c$ en un sistema inercial, entonces $v < c$ en todos los sistemas. [*Ayuda:* Considerar el cuadrivector desplazamiento $dx = (d\mathbf{x}, c\,dt)$, en el que $d\mathbf{x}$ es el desplazamiento tridimensional en un tiempo corto dt]. **(b)** Mostrar análogamente que si una señal (tal como un pulso de luz) tiene velocidad c en un sistema, su velocidad es c en todos los sistemas.

15.44 ⋆⋆ **(a)** Mostrar que si q es de tipo tiempo, existe un sistema $\mathcal{S}'$ en el que tiene la forma $q' = (0, 0, 0, q'_4)$. **(b)** Mostrar que si q es de tipo tiempo hacia delante en un sistema $\mathcal{S}$, entonces es de tipo tiempo hacia delante en todos los sistemas inerciales.

Sección 15.11 Regla del cociente y efecto Doppler

15.45 ⋆ La regla del cociente deducida al comienzo de la Sección 15.11 es sólo una de varias reglas del cociente similares. He aquí otra. Supongamos que k y x son ambos cuadrivectores conocidos y que todo sistema inercial k es un múltiplo de x. Esto es, $k = \lambda x$ en el sistema $\mathcal{S}$, y $k' = \lambda' x'$ en el sistema $\mathcal{S}'$, y así sucesivamente. Entonces el factor λ (el «cociente» de k y x) es de hecho un cuadriescalar con el mismo valor en todos los sistemas, $\lambda = \lambda'$. Probar esta regla del cociente.

15.46 ⋆ **(a)** Mostrar que en el caso en que la fuente se está aproximando al observador de frente, la fórmula de Doppler (15.64) se puede reescribir como $\omega = \omega_0 \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$. **(b)** ¿Cuál es el resultado correspondiente para el caso en que la fuente se está alejando directamente del observador?

15.47 ⋆ Considerar la historia del físico que es multado por saltarse un semáforo en rojo y argumenta que como se estaba aproximando a la intersección, la luz roja estaba afectada por el desplazamiento Doppler y aparecía verde. ¿A qué velocidad habría tenido que estar desplazándose? ($\lambda_{\text{rojo}} \approx 650$ nm y $\lambda_{\text{verde}} \approx 530$ nm).

15.48 ⋆⋆ El factor γ en la fórmula de Doppler (15.64), que se puede atribuir a la dilatación del tiempo, significa que incluso cuando $\theta = 90°$ hay un corrimiento Doppler. (En física clásica no hay corrimiento Doppler cuando $\theta = 90°$ y la fuente tiene velocidad cero en la dirección del observador). Este *corrimiento Doppler transversal* es por tanto una prueba de la dilatación del tiempo, y ha conducido a algunas pruebas muy precisas sobre la teoría. No obstante, excepto cuando la fuente se está desplazando a una velocidad muy cercana a la de la luz, el corrimiento transversal es muy pequeño. **(a)** Si $V = 0{,}2c$, ¿cuál es el cambio de porcentaje cuando $\theta = 90°$? **(b)** Comparar esto con el cambio cuando la fuente se aproxima al observador de frente.

Sección 15.12 Masa, cuadrivelocidad y cuadrimomento

15.49 ⋆ Mostrar que la cuadrivelocidad de cualquier objeto tiene longitud al cuadrado invariante $u \cdot u = -c^2$.

15.50 ⋆ Para cualesquiera dos objetos a y b, mostrar que el producto escalar de sus cuadrivelocidades es $u_a \cdot u_b = -c^2 \gamma(v_{\text{rel}})$, donde $\gamma(v)$ denota el factor γ usual, $\gamma(v) = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, y v_{rel} denota la velocidad de a en el sistema en reposo de b o viceversa.

15.51 ⋆⋆ **(a)** Para la colisión mostrada en la Figura 15.11, verificar que las cuatro componentes del cuadrimomento total $p_a + p_b$ [con los momentos individuales definidos de forma relativista como en (15.68)] se conservan en el sistema $\mathcal{S}$ de la parte (a). **(b)** En dos líneas o menos, probar que el cuadrimomento total se conserva en el sistema $\mathcal{S}'$ de la parte (b).[Este problema no demuestra, por supuesto, que la ley de conservación del cuadrimomento sea cierta en general, pero sí muestra al menos que la ley es coherente con la colisión de la Figura 15.11].

15.52 ⋆⋆ **(a)** Suponer que el trimomento total $\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}$ de un sistema asilado se conserva. Mostrar que si esto es cierto (que lo es), entonces la cuarta componente P_4 del cuadrimomento total $P = (\mathbf{P}, P_4)$ *tiene* que conservarse también. **(b)** Utilizando el teorema de la componente cero del Problema 15.34, se puede probar muy rápidamente el siguiente resultado más potente: si una componente cualquiera del cuadrimomento total P se conserva en todos los sistemas, entonces *las cuatro* componentes se conservan.

15.53 ⋆⋆ Para dos objetos cualesquiera a y b, mostrar que

$$p_a \cdot p_b = m_a E_b = m_b E_a = m_a m_b c^2 \gamma(v_{\text{rel}})$$

donde m_a es la masa de a y E_b es la energía de b en el sistema en reposo de a, y viceversa, y v_{rel} es la velocidad de a en el sistema en reposo de b (o viceversa).

15.54 ⋆⋆⋆ **(a)** Usando la fórmula relativista correcta de composición de velocidades, hacer una tabla que muestre las cuatro velocidades vistas en el sistema $\mathcal{S}'$ de la colisión de la Figura 15.11(b) en términos de la velocidad inicial de a en $\mathcal{S}$. [Dar a la última un nombre sencillo, tal como $\mathbf{v}_a = (\xi, \eta, 0)$]. **(b)** Añadir una columna que muestre el momento clásico total $m_a v'_a + m_b v'_b$ antes y después de la colisión, y mostrar que la componente y del momento clásico *no* se conserva en $\mathcal{S}'$.

15.55 ⋆⋆⋆ Como la cuadrivelocidad $u = \gamma(\mathbf{v}, c)$ es un cuadrivector sus propiedades de transformación son simples. Escribir el empujón estándar de Lorentz para las cuatro componentes de u. Utilizarlas para deducir la fórmula relativista de composición de velocidades para $\mathbf{v}$.

Sección 15.13 Energía, la cuarta componente del momento

15.56 ⋆ Cuando se combina oxígeno con hidrógeno en la reacción (15.80), se liberan unos 5 eV de energía (esto es, la energía cinética de las dos moléculas finales es 5 eV mayor que la de las tres moléculas iniciales). **(a)** ¿Cuánto cambia la masa en reposo total de las moléculas? **(b)** ¿Cuál es el cambio fraccional en la masa total? **(c)** Si se quisiera obtener 10 gramos de agua mediante esta reacción, ¿cuál sería el cambio total en masa?

15.57 ⋆ Cuando un núcleo radiactivo de astato 215 se desintegra en reposo, el átomo completo se parte en dos según la reacción

$$^{215}\text{At} \rightarrow ^{211}\text{Bi} + ^{4}\text{He}.$$

Las masas de los tres átomos son (en orden) 214,9986, 210,9873 y 4,0026, todas en unidades de masa atómicas. (Una unidad de masa atómica $= 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg $= 931{,}5$ MeV/c^2). ¿Cuál es la energía cinética total de los dos átomos resultantes, en julios y en MeV?

15.58 ⋆ **(a)** ¿Cuál es la velocidad de una partícula si su energía cinética T es igual a su energía en reposo? **(b)** ¿Cuál sería si su energía E fuera igual a n veces su energía en reposo?

15.59 ⋆ Si se define una masa variable $m_{\text{var}} = \gamma m$, entonces el momento relativista $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ se convierte en $m_{\text{var}}\mathbf{v}$ que se parece más la definición clásica. Mostrar, no obstante, que la energía cinética relativista *no* es igual a $\frac{1}{2} m_{\text{var}} v^2$.

15.60 ⋆ Una partícula de masa m_a se desintegra en reposo en dos partículas idénticas, cada una de masa m_b. Usar la conservación del momento y la energía para hallar la velocidad de las partículas resultantes.

15.61 ⋆ Una partícula de masa 3 MeV/c^2 tiene momento 4 MeV/c. ¿Cuáles son su energía (en MeV) y su velocidad (en unidades de c)?

15.62 ⋆ Una partícula de masa 12 MeV/c^2 tiene energía cinética de 1 MeV. ¿Cuáles son su momento (en MeV/c) y su velocidad (en unidades de c)?

15.63 ⋆ **(a)** ¿Cuánto es una masa de 1 MeV/c^2 en kilogramos? **(b)** ¿Cuál es un momento de 1 MeV/c en kg·m/s?

15.64 ⋆ Medido en el sistema inercial $\mathcal{S}$, un protón tiene cuadrimomento p. También medido en $\mathcal{S}$, un observador en reposo en un sistema $\mathcal{S}'$ tiene cuadrivelocidad u. Mostrar que la energía del protón, medida por este observador, es $-u\cdot p$.

15.65 ⋆⋆ La energía cinética relativista de una partícula es $T=(\gamma-1)mc^2$. Usar la serie binomial para expresar T como una serie en potencias de $\beta = v/c$. **(a)** Verificar que el primer término es justo la energía cinética no relativista, y mostrar que al más bajo orden en β la diferencia entre las energías cinéticas relativista y no relativista es $3\beta^4mc^2/8$. **(b)** Usar este resultado para hallar la velocidad máxima a la cual el valor no relativista está entre el 1 % del valor relativista correcto.

15.66 ⋆⋆ En mecánica no relativista, la energía contiene una constante aditiva arbitraria (la física no cambia por la sustitución $E \to E$ + constante). Mostrar que este no es el caso en mecánica relativista. [*Ayuda*: Recordar que el cuadrimomento p se supone que se transforma como un cuadrivector].

Sección 15.14 Colisiones

15.67 ⋆ Dos bolas de masas iguales (m cada una) se aproximan la una a la otra de frente con velocidades iguales y opuestas de magnitud $0{,}8c$. Su colisión es perfectamente inelástica, así que se quedan pegadas y forman un único cuerpo de masa M. ¿Cuál es la velocidad del cuerpo final y cuál es su masa M?

15.68 ⋆ Considerar la colisión frontal elástica del Ejemplo 15.10, en la que dos partículas (de masas m_a y m_b) se aproximan la una a la otra desplazándose a lo largo del eje x, chocan, y emergen por el mismo eje. En el sistema CM (por su definición) $\mathbf{p}_a^{\text{in}} = -\mathbf{p}_b^{\text{in}}$. Usar la conservación del momento y la energía para probar que $\mathbf{p}_a^{\text{fin}} = -\mathbf{p}_a^{\text{in}}$; esto es, el momento de la partícula a (y también de b) justo se cambia a sí mismo en el sistema CM.

15.69 ⋆ **(a)** Mostrar que el cuadrimomento de cualquier partícula material ($m > 0$) es de tipo tiempo hacia delante. **(b)** Mostrar que la suma de cualesquiera vectores tipo tiempo futuro es también tipo tiempo futuro, y por tanto que la suma de cualquier número de vectores tipo tiempo es en sí misma un vector tipo tiempo.

15.70 ⋆ **(a)** Usar los resultados del Problema 15.69 para probar que para un número cualquiera de partículas materiales existe un sistema CM, esto es, un sistema en el que el trimomento total es cero. **(b)** Relativa a un sistema arbitrario $\mathcal{S}$, mostrar que la velocidad del sistema CM está dada por $\beta = \sum \mathbf{p}c / \sum E$.

15.71 ⋆ Una manera de crear partículas pesadas exóticas es preparar una colisión entre dos partículas más ligeras

$$a + b \to d + e + \cdots + g$$

donde d es la partícula pesada de interés y $e, \cdots, g$ son otras posibles partículas producidas en la reacción. (Un buen ejemplo de tal proceso es la producción de la partícula ψ en el proceso $e^+ + e^- \to \psi$, en el que no hay otras partículas $e, \ldots, g$). **(a)** Suponiendo que m_d es mucho más pesada que cualquiera de las otras partículas, mostrar que la energía mínima (o umbral) para producir esta reacción en el sistema CM es $E_{\text{cm}} \approx m_d c^2$. **(b)** Mostrar que la energía umbral para producir la misma reacción en el sistema lab, en el que una partícula b está inicialmente en reposo, es $E_{\text{lab}} \approx m_d^2 c^2 / 2m_b$. **(c)** Calcular estas dos energías para el proceso $e^+ + e^- \to \psi$, con $m_e \approx 0{,}5$ MeV/c^2 y $m_\psi \approx 3100$ MeV/c^2. Las respuestas deberían explicar por qué los físicos de partículas se toman la molestia e incurren en los gastos que supone construir experimentos de colisiones de partículas.

15.72 ⋆ Un físico loco afirma haber observado la desintegración de una partícula de masa M en dos partículas idénticas de masa m, con $M < 2m$. En respuesta a las objeciones de que esto viola la

conservación de la energía, replica que si M estaba viajando suficientemente rápido podría haber tenido fácilmente energía mayor que $2mc^2$ y por tanto podría desintegrarse en las dos partículas de masa m. Mostrar que no tiene razón. [Se ha olvidado que tanto la energía como el momento se conservan. Se puede analizar este problema en términos de estas dos leyes de conservación, pero es mucho más sencillo ir al sistema en reposo de M].

15.73 ⋆⋆ Considerar la colisión frontal elástica del Ejemplo 15.10, en la cual la velocidad final $\mathbf{v}_b$ de la partícula b está dada por (15.95). **(a)** Mostrar que, en el caso especial en que las masas son iguales ($m_a = m_b$), $v_b = v_a$, la velocidad inicial de la partícula a. Mostrar que en este caso la velocidad final de a es cero. [Este resultado para colisiones de masas iguales es bien conocido en mecánica clásica; se acaba de mostrar que se extiende a la relatividad]. **(b)** Mostrar que en el límite no relativista (15.95) se reduce a $v_b = 2v_a m_a/(m_a + m_b)$. Haciendo los cálculos no relativistas necesarios, mostrar que esto está de acuerdo con la respuesta no relativista para colisiones frontales elásticas.

15.74 ⋆⋆ Una partícula a que se desplaza en la dirección positiva del eje x del sistema $\mathcal{S}$ con velocidad $0{,}5c$ se desintegra en dos partículas idénticas, $a \to b + b$, las cuales continúan moviéndose, ambas, por el eje x. **(a)** Dado que $m_a = 2{,}5m_b$, hallar la velocidad de una de las dos partículas b en el sistema en reposo de la partícula a. **(b)** Haciendo la transformación necesaria en el resultado de la parte (a), encontrar las velocidades de las dos partículas b en el sistema original $\mathcal{S}$.

15.75 ⋆⋆ Una partícula de masa desconocida M se desintegra en dos partículas de masas conocidas $m_a = 0{,}5\ \text{GeV}/c^2$ y $m_b = 1{,}0\ \text{GeV}/c^2$, cuyos momentos se miden y son $\mathbf{p}_a = 2{,}0\ \text{GeV}/c$ en la dirección del eje x_2 y $\mathbf{p}_b = 1{,}5\ \text{GeV}/c$ en la dirección del eje x_1. ($1\ \text{GeV} = 10^9\ \text{eV}$). Hallar la masa desconocida M y su velocidad.

15.76 ⋆⋆ La partícula a está persiguiendo a la partícula b por el eje x_1 de un sistema $\mathcal{S}$. Las dos masas son m_a y m_b y las velocidades son v_a y v_b (con $v_a > v_b$). Cuando a alcanza a b colisionan y se fusionan para formar una única partícula de masa m y velocidad v. Mostrar que

$$m^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2m_a m_b \gamma(v_a)\gamma(v_b)(1 - v_a v_b/c^2)$$

y encontrar v.

15.77 ⋆⋆⋆ Considerar la colisión frontal elástica del Ejemplo 15.10, en la cual la partícula a colisiona con una partícula estacionaria b. Suponiendo que $m_a \neq m_b$, mostrar que la energía cinética final de la partícula a cumple $T_a^{\text{fin}} < (m_a - m_b)^2 c^2/2m_b$. [*Ayuda:* Observar el sistema CM, en donde se puede mostrar que el cuadrivector $p_a^{\text{fin}} - p_b^{\text{in}}$ es de tipo tiempo, así que $(p_a^{\text{fin}} - p_b^{\text{in}})^2 < 0$]. **(b)** El resultado de la parte (a) implica que si T_a^{in} es grande, casi toda esta energía incidente se pierde para b. Esto es bastante diferente de la situación no relativista. Probar que en mecánica no relativista la proporción de energía cinética retenida por a es fija, independiente de T_a^{in}. Específicamente, $T_a^{\text{fin}} = T_a^{\text{in}}(m_a - m_b)^2/(m_a + m_b)^2$.

15.78 ⋆⋆⋆ Considerar la colisión elástica mostrada en la Figura 15.17. En el sistema lab $\mathcal{S}$, la partícula b está inicialmente en reposo; la partícula a entra con cuadrimomento p_a y se dispersa un ángulo θ; la partícula b retrocede formando un ángulo ψ. En el sistema CM $\mathcal{S}'$, las dos partículas se aproximan y emergen con momentos iguales y opuestos, y la partícula a se dispersa un ángulo θ'. **(a)** Mostrar que la velocidad del sistema CM relativa al sistema lab es $\mathbf{V} = \mathbf{p}_a c/(E_a + m_b)$ **(b)** Transformando el momento final de a de vuelta desde el sistema CM al sistema lab, mostrar que

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta'}{\gamma(V)(\cos\theta' + V/v_a')} \tag{15.153}$$

donde v_a' es la velocidad de a en el sistema CM. **(c)** Mostrar que en el límite en que todas las velocidades son mucho menores que c, este resultado concuerda con el resultado no relativista (14.53) (donde $\lambda = m_a/m_b$). **(d)** Particularizar ahora para el caso en que $m_a = m_b$. Mostrar que, en este caso, $V/v_a' = 1$, y encontrar una fórmula como (15.153) para $\operatorname{tg}\psi$. **(e)** Mostrar que el ángulo entre dos momentos salientes está dado por $\operatorname{tg}(\theta + \psi) = 2/[\beta(V)^2\gamma(V)\operatorname{sen}\theta']$.

Mostrar que en el límite en que $V \ll c$, se recupera el resultado no relativista bien conocido de que $\theta + \psi = 90°$.

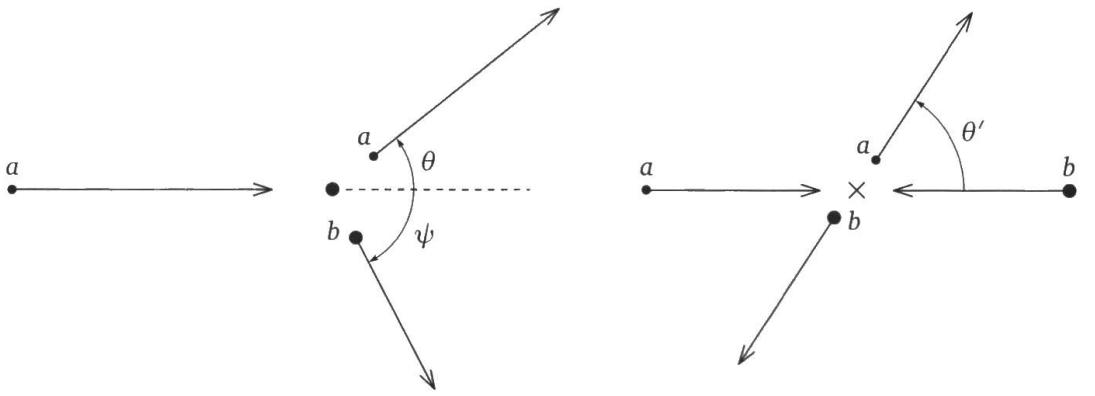


Figura 15.17. Problema 15.78.

Sección 15.15 Fuerza en relatividad

15.79 ⋆ Considerar un objeto de masa m (la cual se puede aceptar que es constante), sobre el que actúa una fuerza $\mathbf{F}$. De la definición (15.100) probar que

$$\mathbf{F} = \gamma m\mathbf{a} + (\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}/c^2$$

donde $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ es la aceleración del objeto. Advertir que ciertamente en relatividad no es verdad que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Ni tampoco es cierto que $\mathbf{F} = m_{\text{var}}\mathbf{a}$, donde m_{var} es la masa variable $m_{\text{var}} = \gamma m$, excepto en el caso especial en que $\mathbf{F}$ resulta ser perpendicular a $\mathbf{v}$. En general, $\mathbf{F}$ y $\mathbf{a}$ no están ni siquiera en la misma dirección.

15.80 ⋆ Una partícula de masa m y carga q se desplaza en un campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B}$. Mostrar que si $\mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$, la partícula describe una circunferencia de radio

$$r = |\mathbf{p}/qB|. \tag{15.154}$$

[Este resultado concuerda con el resultado no relativista (2.81), excepto que $\mathbf{p}$ es ahora el momento relativista $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$].

15.81 ⋆ Un electrón (masa 0,5 MeV/c^2) se desplaza con velocidad 0,7c en una trayectoria circular en un campo magnético de 0,02 teslas. Usando el resultado relativista (15.154) del Problema 15.80, encontrar el radio de la órbita del electrón. ¿Cuál habría sido la respuesta si se hubiera usado la definición clásica de momento. [No es necesario decir que el resultado relativista está confirmado por experimentos, y esto dio una de las primeras evidencias de que la mecánica relativista era correcta.[33]]

15.82 ⋆ **(a)** Verificar el resultado (15.106) para la posición de la partícula que se desplaza en un campo eléctrico uniforme, integrando la expresión (15.105). **(b)** Cuando t es pequeño, la partícula debería estar moviéndose lentamente y (15.106) debería estar de acuerdo con el resultado no relativista $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$. Verificar que esto es así. **(c)** Mostrar que cuando t es grande, $x \approx \hat{\mathbf{F}}(ct + \text{const})$ y explicar este resultado.

---

[33] En un trabajo en *Göttingen Nachrichten*, p. 143 (1901), Walter Kaufmann mostró que la «masa aparente» del electrón (lo que llamaríamos su masa variable) en un campo magnético parecía aumentar con la velocidad en buen acuerdo con la fórmula relativista $m_{\text{var}} = \gamma(v)m$. Advierta que esto precedió en algunos años al primer trabajo de Einstein sobre relatividad.

15.83 ⋆ Comenzando desde la definición (15.100) de la fuerza **F** de un objeto, probar que la transformación de las componentes de **F** cuando pasamos de un sistema $\mathcal{S}$ a un segundo sistema $\mathcal{S}'$, que viaja a velocidad V en la configuración estándar relativa a $\mathcal{S}$, es

$$F_1' = \frac{F_1 - \beta \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}/c}{1-\beta v_1/c}, \qquad F_2' = \frac{F_2}{\gamma(1-\beta v_1/c)} \qquad F_3' = \frac{F_3}{\gamma(1-\beta v_1/c)} \tag{15.155}$$

donde $\beta = \beta(V)$ y $\gamma = \gamma(V)$ se relacionan con la velocidad relativa de los dos sistemas y **v** es la velocidad del objeto medida en $\mathcal{S}$.

15.84 ⋆⋆ Una masa m es lanzada desde el origen en $t = 0$ con trimomento inicial p_0 en la dirección y. Si está sometida a una fuerza constante F_0 en la dirección x, hallar su velocidad **v** como una función de t, e integrando **v** encontrar su trayectoria. Comprobar que en límite no relativista la trayectoria es la parábola esperada.

15.85 ⋆⋆ Hemos visto que existen procesos en los que la masa de un objeto varía con el tiempo. **(a)** Comenzando desde (15.85), probar que $dm/dt_0 = -u\cdot K/c^2$, donde t_0 es el tiempo propio del objeto, u es su cuadrivelocidad, y K es la cuadrifuerza sobre el objeto. **(b)** Esto significa que la condición necesaria y suficiente de que una fuerza no cambia la masa de un objeto es que $u\cdot K = 0$. Es un hecho experimental que si una partícula cargada está en reposo en un campo electromagnético (incluso instantáneamente) entonces $dE/dt = 0$. Usar esto para argumentar que las fuerzas electromagnéticas no hacen que la masa de la partícula cambie.

Sección 15.16 Partículas sin masa; el fotón

15.86 ⋆ El pión neutro π^0 es una partícula inestable (masa $m = 135\ \text{MeV}/c^2$) que puede desintegrarse en dos fotones, $\pi^0 \to \gamma + \gamma$. **(a)** Si el pión está en reposo, ¿cuál es la energía de cada fotón? **(b)** Suponer en lugar de ello que el pión se está moviendo por el eje x y que los fotones se observan también desplazándose por el eje x, uno hacia delante y el otro hacia detrás. Si el primer fotón tiene tres veces la energía del segundo, ¿cuál era la velocidad original del pión v?

15.87 ⋆ Un pión neutro (Problema 15.86) está viajando con velocidad v cuando se desintegra en dos fotones, que se ven emerger a ángulos iguales θ a cada lado de la velocidad original. Mostrar que $v = c\cos\theta$.

15.88 ⋆ Dos partículas a y b con masas $m_a = 0$ y $m_b > 0$ se aproximan una a la otra. Probar que tienen un sistema CM (esto es, un sistema en el cual su trimomento total es cero). [Ayuda: Como se debería explicar, esto es equivalente a mostrar que la suma de dos cuadrivectores, uno de los cuales es tipo luz futuro y el otro tipo tiempo futuro, es en sí misma tipo tiempo futuro].

15.89 ⋆ Mostrar que dos partículas cualesquiera con masa cero tienen un sistema CM, siempre que sus trimomentos no sean paralelos. [*Ayuda:* Como se debería explicar, esto es equivalente a mostrar que la suma de dos vectores tipo luz futuro es tipo tiempo futuro, a menos que las partes espaciales sean paralelas].

15.90 ⋆⋆ Los primeros positrones que se observaron fueron creados en pares electrón-positrón a partir de fotones de rayos cósmicos de alta energía en la atmósfera superior. **(a)** Mostrar que un fotón aislado no puede convertirse en un par electrón-positrón en el proceso $\gamma \to e^+ + e^-$. [Mostrar que este proceso viola inevitablemente la conservación del cuadrimomento]. **(b)** Lo que ocurre realmente es que un fotón colisiona con un núcleo estacionario con el resultado

$$\gamma + \text{núcleo} \to e^+ + e^- + \text{núcleo}.$$

Convencerse a sí mismo de que la fórmula (15.98) se puede usar para hallar la energía mínima para que un fotón induzca esta reacción. [La deducción de (15.98) supone que la partícula incidente tenía $m > 0$]. Mostrar que siempre que la masa del núcleo sea mucho mayor que la del electrón, la mínima energía del fotón para inducir esta reacción es aproximadamente $2m_e c^2$. [Ésta es exactamente la energía que se habría calculado para el proceso $\gamma \to e^+ + e^-$ y mostrar que el papel del núcleo es como el de un «catalizador» que puede absorber algo del trimomento].

15.91 ⋆⋆ Un estado excitado X* de un átomo en reposo cae a su estado fundamental X emitiendo un fotón. En física atómica es habitual suponer que la energía E_γ del fotón es igual a la diferencia de energía de los dos estados atómicos, $\Delta E = (M^* - M)c^2$, donde M y M^* son las masas en reposo de los estados fundamental y excitado del átomo. Esto no puede ser exactamente cierto, porque el átomo en retroceso X debe llevarse algo de la energía ΔE. Mostrar que de hecho $E_\gamma = \Delta E[1 - \Delta E/(2M^*c^2)]$. Dado que ΔE es del orden de unos pocos eV, mientras que el átomo más ligero tiene M del orden de 1 GeV/c^2, discutir la validez de la suposición $E_\gamma = \Delta E$.

15.92 ⋆⋆ Un pión positivo se desintegra en un muón y un neutrino, $\pi^+ \to \mu^+ + \nu$. Las masas involucradas son $m_\pi = 140$ MeV/c^2, $m_\mu = 106$ MeV/c^2 y $m_\nu = 0$. (Hay ahora evidencia convincente de que m_ν no es exactamente cero, pero es suficientemente pequeña para que se pueda tomar como cero en este problema). Mostrar que la velocidad del muón saliente tiene $\beta = (m_\pi^2 - m_\mu^2)/(m_\pi^2 + m_\mu^2)$. Evaluarlo numéricamente. Hacer lo mismo para el modo de desintegración mucho más raro $\pi^+ \to e^+ + \nu$, ($m_e = 0{,}5$ MeV/c^2).

15.93 ⋆⋆⋆ Considerar una colisión frontal elástica entre un electrón de alta energía (energía E_0 y velocidad $\beta_0 c$) y un fotón de energía $E_{\gamma 0}$. Mostrar que la energía final E_γ del fotón es

$$E_\gamma = E_0 \frac{1 + \beta_0}{2 + (1\beta_0)E_0/E_{\gamma 0}}.$$

[*Ayuda:* Usar (15.123)]. Mostrar que $E_\gamma < E_0$, pero que si $\beta_0 \to 1$, entonces $E_\gamma/E_0 \to 1$; esto es, un electrón de muy alta energía pierde casi toda su energía a favor del fotón en una colisión frontal. ¿Qué fracción de su energía original retendría el electrón si $E_0 \approx 10$ TeV y el fotón estaba en el rango visible, $E_{\gamma 0} \approx 3$ eV? (Recordar que la masa del electrón es de unos 0,5 MeV/c^2; 1 TeV = 10^{12} eV).

Sección 15.17 Tensores

15.94 ⋆ Probar que dos matrices cualesquiera A y B, donde A tiene tantas columnas como filas tiene B, la transpuesta de AB cumple $(AB)\tilde{} = \tilde{B}\tilde{A}$.

15.95 ⋆ Haciendo elecciones adecuadas para los vectores n-dimensionales **a** y **b**, mostrar que si $\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{C}\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{D}\mathbf{b}$ para cualesquiera elecciones de **a** y **b** (donde **C** y **D** son matrices $n \times n$), entonces $\mathbf{C} = \mathbf{D}$.

15.96 ⋆ Probar que si T y a son respectivamente un cuadritensor y un cuadrivector, entonces $b = T \cdot a = TGa$ es un cuadrivector; esto es, se transforma de acuerdo con la regla $b' = \Lambda b$.

15.97 ⋆ **(a)** Un tensor T se dice que es simétrico si $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$. Probar que si T es simétrico en un sistema inercial, entonces es simétrico en todos los sistemas inerciales. **(b)** T es antisimétrico si $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$. Probar que si T es antisimétrico en un sistema inercial, entonces es antisimétrico en todos los sistemas inerciales. (Un ejemplo de la última propiedad es el tensor del campo electromagnético, que es antisimétrico en todos los sistemas).

15.98 ⋆⋆ **(a)** Usar la invariancia del producto escalar $a \cdot b = \tilde{a}Gb$ para probar que las matrices 4×4 de la transformación de Lorentz Λ deben cumplir la condición (15.136), $\tilde{\Lambda}G\Lambda = G$. **(b)** Verificar que el empujón estándar de Lorentz (15.43) sí cumple esta condición.

15.99 ⋆⋆ Una forma útil de la regla del cociente para vectores tridimensionales es esta: supongamos que **a** y **b** son trivectores conocidos y supongamos que para todo conjunto ortogonal de ejes existe una matriz 3×3 **T** con la propiedad de que $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}$ para cada elección de **a**, entonces **T** es un tensor. **(a)** Probarlo. **(b)** Enunciar y probar la regla correspondiente para cuadrivectores y cuadritensores.

15.100 ⋆⋆⋆ **(a)** La afirmación de que $\boldsymbol{\nabla}$ es un operador vectorial significa que si $\phi(\mathbf{x})$ es cualquier escalar, entonces las tres componentes de $\boldsymbol{\nabla}\phi = (\partial\phi/\partial x_1, \partial\phi/\partial x_2, \partial\phi/\partial x_3)$ se transforman de acuerdo con la ley de transformación de los trivectores (15.126). Probar esta última afirmación. [*Ayuda:* Recordar la regla de la cadena, que $\partial\phi/\partial x_i = \sum_j (\partial x_j'/\partial x_i)\partial\phi/\partial x_j'$]. **(b)** Probar que en

el espacio-tiempo tetradimensional, si ϕ es cualquier cuadriescalar, la cantidad $\Box\phi$ definida con las componentes

$$\Box\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3}, -\frac{\partial\phi}{\partial x_4}\right) \tag{15.156}$$

(apreciar bien el signo menos en la cuarta componente) es un cuadrivector. Este resultado es crucial al escribir las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético.

Sección 15.18 Electrodinámica y relatividad

15.101 ⋆ **(a)** Demostrar que $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ y $E^2 - c^2B^2$ son los dos invariantes bajo cualquier transformación de Lorentz. [Usar las ecuaciones de transformación (15.146) para demostrar los resultados requeridos para el empujón estándar y después explicar por qué, si cualquier cantidad es invariante bajo el empujón estándar, entonces es invariante bajo *cualquier* transformación de Lorentz]. Usar los resultados para demostrar las siguientes dos proposiciones: **(b)** si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares en el sistema $\mathcal{S}$, entonces son perpendiculares en cualquier otro sistema $\mathcal{S}'$, y **(c)** si $E > cB$ en un sistema $\mathcal{S}$, entonces no puede existir un sistema en el que $E = 0$.

15.102 ⋆ **(a)** Comenzando por las ecuaciones de transformación (15.146) para el empujón estándar en la dirección del eje x_1, encontrar el empujón correspondiente en la dirección del eje x_3. **(b)** Escribir la inversa de esta transformación y después verificar los resultados(15.151) y (15.152) para los campos de una línea de carga móvil.

15.103 ⋆ **(a)** Usando las ecuaciones de transformación (15.146), mostrar que si $\mathbf{E} = 0$ en el sistema $\mathcal{S}$, entonces $\mathbf{E}' = \mathbf{v}\times\mathbf{B}'$ en $\mathcal{S}'$. **(b)** Análogamente, mostrar que si $\mathbf{B} = 0$ en el sistema $\mathcal{S}$, entonces $\mathbf{B}' = -\mathbf{v}\times\mathbf{E}'/c^2$.

15.104 ⋆⋆ Definimos el tensor del campo electromagnético mediante la ecuación $K = q\mathcal{F}\cdot u \equiv q\mathcal{F}Gu$, donde K es la cuadrifuerza sobre una carga q y u es su cuadrivelocidad. **(a)** Comenzando desde la fuerza de Lorentz (15.139) escribir las cuatro componentes de K [como en (15.141)]. **(b)** Usar éstas para encontrar la matriz $\mathcal{F}G$ y mostrar que el tensor $\mathcal{F}$ tiene la forma establecida en (15.143).

15.105 ⋆⋆ Como $\mathcal{F}$ es un cuadritensor tiene que transformarse de acuerdo con la regla (15.145), $\mathcal{F}' = \Lambda\mathcal{F}\tilde{\Lambda}$. Usando la forma (15.143) para $\mathcal{F}$ y el empujón estándar de Lorentz para Λ, encontrar la matriz $\mathcal{F}'$ y verificar las ecuaciones de transformación (15.146) para campos electromagnéticos.

15.106 ⋆⋆ Deducir la ley de la fuerza de Lorentz a partir de la ley de Coulomb como sigue: si una carga q está en reposo en el sistema $\mathcal{S}'$, entonces la ley de Coulomb nos dice que la fuerza sobre q es $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'$. Usar la inversa de la transformación de fuerzas (15.155) para escribir la fuerza $\mathbf{F}$ vista en $\mathcal{S}$. (Responder en términos de $\mathbf{E}'$ por ahora). **(b)** Ahora usar la transformación de campos (15.146) para reescribir la respuesta en términos de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ y mostrar que $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$.

15.107 ⋆⋆ Es un resultado bien conocido en electromagnetismo clásico que uno puede introducir un potencial escalar ϕ y un potencial trivectorial $\mathbf{A}$ tales que los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ se pueden escribir como

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}. \tag{15.157}$$

En relatividad estos potenciales se combinan para formar un único cuadripotencial $A = (\mathbf{A}, \phi/c)$. Probar que

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \Box_\mu A_\nu - \Box_\nu A_\mu$$

donde $\Box$ es el operador gradiente tetradimensional definido en (15.156) del Problema 15.100. (Si aceptamos que A realmente es un cuadrivector, esto da una prueba alternativa de que $\mathcal{F}$ es un cuadritensor).

15.108 ⋆⋆ Considerar una distribución de carga eléctrica, con densidad de carga ϱ, que se desplaza con velocidad $\mathbf{v}$ relativa al sistema $\mathcal{S}$. **(a)** Mostrar que $\varrho = \gamma\varrho_0$, donde ϱ_0 es la densidad de carga en el sistema en reposo. (Advertir que $\mathbf{v}$ puede variar con la posición, de modo que partes

diferentes de la distribución tendrán diferentes sistemas en reposo, pero eso está bien). **(b)** La tridensidad de corriente se define como $\mathbf{J} = \varrho\mathbf{v}$. Mostrar que la cuadridensidad de corriente, definida como $J = (\mathbf{J}, c\varrho)$, es un cuadrivector. **(c)** Es un resultado bien conocido en electromagnetismo que la conservación de la carga implica la famosa ecuación de continuidad, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} + \partial\varrho/\partial t = 0$ (donde $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = \sum \partial J_i/\partial x_i$ es la famosa divergencia de $\mathbf{J}$). Mostrar que esta condición es equivalente a la condición manifiestamente invariante $\Box\cdot J = 0$, donde $\Box$ es el gradiente tetradimensional definido en (15.156) de Problema 15.100.

15.109 ⋆ ⋆ ⋆ Dos cargas iguales q se están desplazando una al lado de la otra en la dirección positiva del eje x en el sistema $\mathcal{S}$. La distancia entre ellas es r y su velocidad es v. Encontrar la fuerza sobre cada una de las cargas debida a la otra de dos maneras. **(a)** Hallar la fuerza en su sistema en reposo $\mathcal{S}'$ y transformar de nuevo a $\mathcal{S}$, usando la transformación de fuerzas (15.155) del Problema 15.83. Advertir que la fuerza en $\mathcal{S}$ es menor que en el sistema en reposo. **(b)** Hallar los campos eléctrico y magnético en $\mathcal{S}'$ y a partir de ahí en $\mathcal{S}$, usando la transformación de campos (15.146). Usar estos campos (en $\mathcal{S}$) para escribir la fuerza de Lorentz sobre ambas cargas en $\mathcal{S}$. Advertir que en $\mathcal{S}$ hay una fuerza eléctrica atractiva y una fuerza magnética repulsiva. Cuando $\beta \to 1$ se hacen casi iguales y su resultante tiende a cero.

15.110 ⋆ ⋆ ⋆ Una carga q se desplaza con velocidad constante v por el eje x del sistema $\mathcal{S}$ con posición $vt\hat{\mathbf{x}}$. **(a)** Escribir los campos eléctrico y magnético en el sistema en reposo de la carga $\mathcal{S}'$. **(b)** Usar la inversa de la transformación de campos (15.146) para escribir el campo eléctrico en el sistema original $\mathcal{S}$. [En primera instancia, se hallará $\mathbf{E}$ en términos de las variables con primas x', y', z', t', pero se puede usar la transformación estándar de Lorentz para eliminarlas en favor de x, y, z, t]. Mostrar que el campo en la posición $\mathbf{r}$ y el instante t es

$$\mathbf{E} = \frac{kq(1-\beta^2)}{(1-\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta)^{3/2}}\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \tag{15.158}$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - vt\hat{\mathbf{x}}$ es el vector que apunta desde la posición de la carga hasta el punto de observación $\mathbf{r}$, y θ es el ángulo entre $\mathbf{R}$ y el eje x. **(c)** Esbozar el comportamiento de la intensidad de campo como una función de θ para R fijos, y hacer un esquema de las líneas del campo eléctrico en un instante fijo t.

15.111 ⋆ ⋆ ⋆ Dos de las ecuaciones de Maxwell dicen

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0\mathbf{J} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\varrho \tag{15.159}$$

donde $\mathbf{J}$ y ϱ son las densidades de corriente y de carga que originaron a los campos. Mostrar que estas dos ecuaciones se pueden escribir como una única ecuación cuadrivectorial $\Box\cdot\mathcal{F} = \mu_0 J$, donde $\Box$ es la operador gradiente tetradimensional introducido en el Problema 15.100, J es la cuadricorriente $(\mathbf{J}, c\varrho)$, y el producto escalar $\Box\cdot\mathcal{F} = \eth G\mathcal{F}$.

CAPÍTULO 16

Mecánica de medios continuos

Podemos dividir la mecánica clásica en tres áreas principales, en orden al aumento de su complejidad. **(1)** La **mecánica de masas puntuales**. Ocasionalmente, estas masas puntuales son partículas elementales, tales como el electrón, cuya masa está (hasta donde sabemos de momento) concentrada en un punto; pero normalmente son objetos tridimensionales cuya masa no está ciertamente localizada en un punto pero que, para nuestros propósitos, se pueden considerar como si lo fueran. Por consiguiente al tratar del vuelo de pelotas de béisbol, o encontrar las órbitas de los planetas, es muchas veces una excelente aproximación tratarlos como masas puntuales. En este caso, la configuración de cualquier sistema está dada por un conjunto finito de coordenadas, tres para cada masa puntual. **(2)** La **mecánica de los cuerpos rígidos**. Aquí admitimos que la masa de interés está extendida a algún volumen distinto de cero, pero suponemos que las posiciones relativas de las distintas partes de cualquier cuerpo están fijas; esto es, todos los cuerpos son rígidos. Como vimos, tenemos que permitir el posible movimiento rotacional de tales cuerpos, pero la configuración de cualquier sistema sigue estando especificada por un conjunto finito y discreto de coordenadas; por ejemplo, para un único cuerpo rígido necesitamos sólo seis coordenadas, tres para la posición del CM y tres más para la orientación del cuerpo. La noción de cuerpo rígido es una idealización (todos los cuerpos reales se pueden deformar), pero para muchos sistemas es una aproximación razonable y extremadamente útil. **(3)** Finalmente, está la **mecánica de medios continuos**, en la que admitimos que la masa de un sistema se puede distribuir en alguna región *y* que las posiciones relativas de las distintas partes pueden cambiar de una manera continua, pero arbitraria. Claramente el movimiento de cualquier fluido (el flujo del aire tras el ala de un avión o el agua que corre por una tubería) es un problema de mecánica continua. Pero también lo es el movimiento de un sólido cuando los

movimientos independientes de sus partes son importantes, como por ejemplo en la flexión de una viga de acero muy cargada o la vibración de la corteza terrestre en respuesta a un terremoto. En mecánica de medios continuos, un sistema comprende un número infinito de partes, y la especificación de su configuración requiere un número infinito de coordenadas.

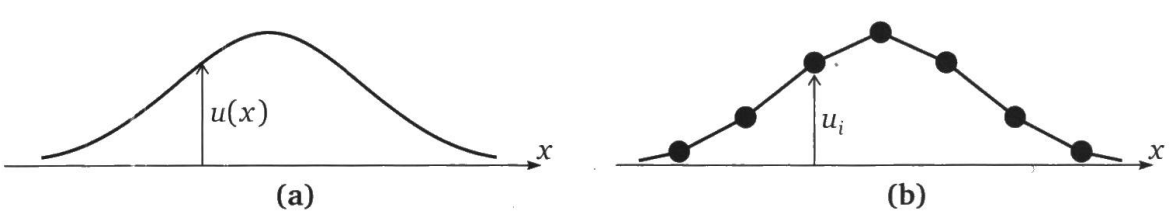
Hasta el momento en este libro hemos tratado solamente los primeros dos temas, la mecánica de masas puntuales y la de cuerpos rígidos (lo que podríamos llamar mecánica discreta) con un número discreto y finito de coordenadas. Este último capítulo está pensado como una de las más breves introducciones a la mecánica de medios continuos. Una introducción rigurosa requeriría otro libro, pero espero poder dar al menos el significado de las ideas centrales. Específicamente, veremos cómo el paso de mecánica discreta a medios continuos cambia las ecuaciones diferenciales ordinarias de la primera a *ecuaciones en derivadas parciales*. Veremos cómo estas ecuaciones en derivadas parciales conducen muchas veces a la *ecuación de ondas*, que gobierna el comportamiento de las ondas del sonido en líquidos y gases, de las ondas sísmicas en la corteza terrestre y de muchas otras ondas, entre las que destacan de modo muy notable las ondas electromagnéticas como la luz y las microondas. Las tres primeras secciones se ocupan de medios continuos unidimensionales, y después, en la Sección 16.4 llegaremos hasta las tres dimensiones. Quizá la mayor complicación en tres dimensiones es que las fuerzas y los desplazamientos incluyen dos tensores, los *tensores de esfuerzos y de tensiones* (en inglés, *stress* y *strain*, respectivamente). Uno de los principales objetivos de este capítulo es introducir estos dos importantes conceptos. La Sección 16.7 introduce el tensor de esfuerzos para fluidos y sólidos, y la Sección 16.8 el tensor de tensiones para sólidos. La Sección 16.9 da la relación entre los dos tensores, la ley generalizada de Hooke. En las Secciones 16.10 y 16.11 se deduce la ecuación del movimiento para un sólido elástico y se utiliza para analizar las ondas longitudinales y transversales. Las últimas dos secciones son una breve introducción a la mecánica de fluidos no viscosos. En la Sección 16.12, deduciremos la ecuación del movimiento y la denominada ecuación de continuidad, y en la Sección 16.13 las usaremos para analizar las posibles ondas en un fluido.

Antes de comenzar, debo enfatizar que la noción de distribución continua de materia es en sí misma una idealización. Las propiedades del aire que fluye en un túnel de viento ciertamente parecen variar continua y suavemente de un sitio a otro. Por ejemplo, estamos acostumbrados a suponer que el aire tiene una densidad $\varrho(\mathbf{r})$ que da la masa $\varrho(\mathbf{r})dV$ en un pequeño volumen dV, y, mientras que $\varrho(\mathbf{r})$ puede ciertamente variar con $\mathbf{r}$, aceptamos que lo hace de forma suave. Sin embargo, sabemos perfectamente que, cuando se ve a través de un supermicroscopio que pudiera distinguir fracciones de nanómetros, el aire se vería compuesto por moléculas individuales, y la densidad $\varrho(\mathbf{r})$ variaría enormemente entre valores grandes cerca de cada molécula y cero en los enormes espacios vacíos intermedios. Afortunadamente, la escala de estas variaciones abruptas es diminuta comparada con las escalas normales

de interés. Por ejemplo, incluso si estuviéramos interesados en regiones tan pequeñas como 1 mm^3, este volumen contiene unas 10^{16} moléculas. Por consiguiente la densidad $\varrho(\mathbf{r})$ con la que realmente trabajamos es la densidad *media de este enorme número de moléculas* y varía de hecho suavemente con $\mathbf{r}$. La idea de que, a la escala de milímetros o más, la materia puede ser tratada como continua, con parámetros tales como la densidad que son la media de muchas moléculas, se denomina **hipótesis de medio continuo**. El éxito de la mecánica de medios continuos se justifica ampliamente por esta hipótesis, que adoptaremos a lo largo de este capítulo.

16.1 Movimiento transversal de una cuerda tensada

Como primer ejemplo de un medio continuo, consideremos un cuerda tensa apoyada sobre el eje x. En equilibrio, admitimos que la cuerda se apoya exactamente sobre el eje x, pero supongamos ahora que está realizando un pequeño movimiento (quizá un movimiento oscilatorio) en la dirección y. Una forma simple de especificar la configuración de la cuerda en cualquier instante es dar su desplazamiento $u(x)$ desde el eje x, como se muestra en la Figura 16.1(a). Específicamente, en cualquier instante, un elemento pequeño de la cuerda cuya posición de equilibrio estaba en x sobre el eje está localizado ahora a una distancia $y = u(x)$ por encima de eje. Este esquema necesita poca explicación, pero vale la pena contrastarlo con un sistema discreto relacionado, a saber, un conjunto de n masas puntuales $m_1, \cdots, m_n$ unidas por una cuerda tensada sin masa, que se apoya en el equilibrio sobre el eje x. Si estas masas se pueden mover en la dirección y como en la Figura 16.1(b), su configuración se puede especificar por sus desplazamientos $u_1, \ldots, u_n$ desde el eje. Mientras que el sistema discreto está especificado por estas n variables u_i, con $i = 1, \ldots, n$, el sistema continuo está especificado por la *función continua* $u(x)$. El papel del índice discreto i de u_i lo juega ahora la variable continua x en $u(x)$. Donde el índice i especifica cuál de las n masas está en la posición $y = u_i$, la variable x especifica cuál de los infinitos trozos de la cuerda está en $y = u(x)$.



(a) (b)

Figura 16.1. **(a)** La posición de una cuerda continua, en cualquier instante, está especificada por la función $u(x)$ que da el desplazamiento de la cuerda desde su posición de equilibrio sobre el eje x. **(b)** Un conjunto de n masas puntuales unidas por cuerdas sin masa tiene su configuración especificada por el conjunto discreto de desplazamientos u_i con $i = 1, \ldots, n$.

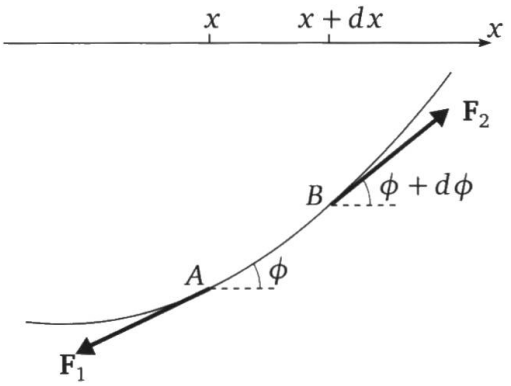


Figura 16.2. Las dos fuerzas sobre el elemento pequeño *AB* de cuerda son las fuerzas de la tensión $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ ejercidas por las secciones adyacentes de la cuerda.

Si los sistemas de la Figura 16.1 se están moviendo, los desplazamientos u dependen del tiempo t. En el caso discreto se convierten en $u_i(t)$ y en el caso continuo debemos escribir $u(x,t)$, una función de dos variables. En el caso discreto, la segunda ley de Newton se convierte en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias para las $u_i(t)$ (por ejemplo las ecuaciones diferenciales acopladas del Capítulo 11). En el caso continuo, la ley de Newton se convierte en una *ecuación en derivadas parciales* para $u(x,t)$, que implica derivadas parciales con respecto a x y t, como mostramos ahora.

Para analizar el movimiento de la cuerda, aplicaremos la segunda ley de Newton a un segmento pequeño *AB* de la cuerda, entre x y $x + dx$ como se muestra en la Figura 16.2. Para simplificar la discusión ignoraremos la gravedad, y supondremos que el desplazamiento $u(x,t)$ permanece tan pequeño para todo x y todo t, que la cuerda permanece casi paralela el eje x. Esto garantiza que la longitud de la cuerda no cambia esencialmente y por ello que la tensión T sigue siendo la misma para todo x y todo t. La fuerza neta sobre el segmento *AB* es entonces $\mathbf{F}^{\text{net}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, donde $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son las fuerzas de la tensión debidas a las secciones adyacentes de la cuerda, como se muestra en la Figura 16.2. Si ϕ denota el ángulo entre la cuerda y el eje x, la componente x de esta fuerza neta es

$$F_x^{\text{net}} = T\cos(\phi + d\phi) - T\cos\phi$$

pero, como ϕ y $\phi + d\phi$ son ambos pequeños, ambos cosenos están muy cerca de 1 y F_x^{net} es despreciable, lo que es congruente con nuestra suposición de que el movimiento es sólo en la dirección y. Por otro lado, la componente y es ciertamente no despreciable:

$$F_y^{\text{net}} = T\,\text{sen}(\phi + d\phi) - T\,\text{sen}\,\phi = T\cos\phi\, d\phi. \tag{16.1}$$

Como ϕ es pequeño, podemos sustituir $\cos\phi$ por 1, y podemos escribir $d\phi = (\partial\phi/\partial x)dx$. [La derivada es una derivada parcial porque $\phi = \phi(x,t)$ depende de

x y t]. Finalmente, de nuevo como ϕ es pequeño, $\phi = \partial u/\partial x$, la inclinación de la cuerda. Por tanto,

$$F_y^{\text{net}} = T\frac{\partial \phi}{\partial x}dx = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx. \tag{16.2}$$

Por la segunda ley de Newton, $F_y^{\text{net}} = ma_y$, donde a_y es la aceleración $a_y = \partial^2 u/\partial t^2$ y m es la masa del segmento AB, igual a $\mu\, dx$ si usamos μ para denotar la densidad lineal de masa de la cuerda. Por tanto,

$$F_y^{\text{net}} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx. \tag{16.3}$$

Igualando las dos expresiones (16.2) y (16.3), llegamos a la ecuación del movimiento de la cuerda tensa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{16.4}$$

Aquí he introducido la importante constante

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \tag{16.5}$$

donde T es la tensión en la cuerda y μ es su densidad lineal de masa (masa/longitud).

La ecuación del movimiento (16.4) se denomina **ecuación de ondas unidimensional** porque sus soluciones son ondas que viajan por la cuerda, como veremos. Como se anticipaba, es una ecuación en derivadas parciales, que incluye derivadas con respecto a x y t. La constante c tiene dimensiones de velocidad (como se debería comprobar) y es la velocidad a la que viajan las ondas. La ecuación de ondas (16.4) gobierna el movimiento de muchas ondas diferentes (ondas en una cuerda, ondas de sonido o luz, ondas sísmicas, y muchas más). Por ello, le dedicaré una nueva sección.

16.2 La ecuación de ondas

Vamos a mostrar que existen sólo tres tipos de soluciones de la ecuación de ondas (16.4): **(1)** una perturbación $u(x, t)$ que viaja rígidamente por la cuerda de izquierda a derecha; **(2)** una perturbación $u(x, t)$ que viaja rígidamente por la cuerda de derecha a izquierda; y **(3)** cualquier combinación de estas dos. La prueba de esta

afirmación es sorprendentemente simple, aunque depende de un truco en el que probablemente no se piensa inmediatamente. Cambiamos variables de x y t a

$$\xi = x - ct \qquad \text{y} \qquad \eta = x + ct. \tag{16.6}$$

Es un ejercicio directo (Problema 16.4) mostrar que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4c^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \tag{16.7}$$

así que, escrita en términos de las nuevas variables, la ecuación de ondas (16.4) se convierte simplemente en

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \tag{16.8}$$

Para resolver esta ecuación, escribamos temporalmente $\partial u/\partial \eta = h$, de modo que (16.8) se convierte en $\partial h/\partial \xi = 0$. Esto nos dice simplemente que h no depende de ξ, aunque puede, por supuesto, depender de η. Por tanto, podemos escribir $h = h(\eta)$, y tenemos ahora

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = h(\eta)$$

Para cualquier valor dado de ξ podemos integrar esta ecuación para obtener $u = \int h(\eta)\, d\eta$ + «constante», donde la «constante» puede ser diferente para valores diferentes de ξ. Si llamamos a esta «constante» $f(\xi)$ y hacemos la integral $\int h(\eta)\, d\eta = g(\eta)$, entonces hemos demostrado que toda solución de (16.8) debe tener la forma

$$u = f(\xi) + g(\eta). \tag{16.9}$$

Sustituyendo en el primer miembro de (16.8), se puede ver que una función de esta forma es una solución de (16.8) para cualquier elección de las dos funciones $f(\xi)$ y $g(\eta)$. Por consiguiente, (16.9) es la solución general de (16.8).

Cambiando otra vez a las variables originales x y t, hemos demostrado que la solución general de la ecuación de ondas (16.4) tiene la forma

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{16.10}$$

donde f y g son dos funciones cualesquiera. Para ver lo que estas funciones representan, consideremos primero el caso en que la función $g = 0$, así que la solución es simplemente

$$u(x,t) = f(x - ct). \tag{16.11}$$

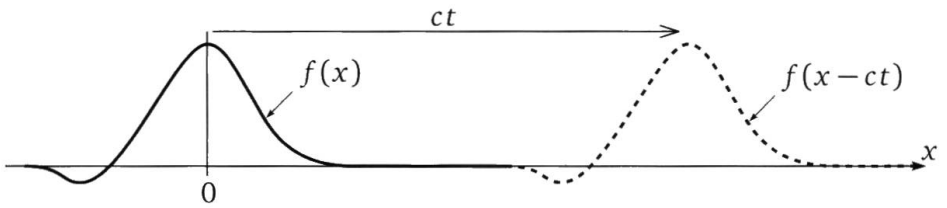


Figura 16.3. Movimiento de la onda (16.11). En el instante 0, la perturbación está dada por $u = f(x)$. En un instante posterior t, está dada por $u = f(x-ct)$, que tiene la misma forma pero se ha desplazado rígidamente hacia la derecha una distancia ct.

¿Qué aspecto tiene esta solución? Advierta primero que en el instante $t = 0$, la solución es $u(x,0) = f(x)$; esto es, la función $f(x)$ es sólo la perturbación en el instante $t = 0$. La Figura 16.3 muestra una función posible. La curva continua, con un máximo grande en $x = 0$ y una pequeña depresión a la izquierda, muestra la función $f(x)$, la forma de la perturbación en $t = 0$. En un instante posterior t, la perturbación está dada por $f(x-ct)$. Como $f(x)$ tiene su máximo en $x = 0$, se deduce que $f(x-ct)$ tiene su máximo cuando $x - ct = 0$. Por tanto, el máximo que estaba en $x = 0$ está ahora en $x = ct$. Como un argumento similar se aplica a cualquier punto de la curva (por ejemplo, el mínimo de la izquierda), concluimos que la perturbación completa se ha movido en conjunto hacia la derecha una distancia ct. Esto es, la perturbación es una onda que viaja rígidamente hacia la derecha con velocidad c.

Un argumento similar muestra que una solución de la forma $u(x,t) = g(x+ct)$ representa una onda que viaja rígidamente hacia la *izquierda* con velocidad c, y la solución general (16.10) es una superposición de dos ondas, una que viaja hacia la derecha y otra que viaja hacia la izquierda. Las funciones f y g que aparecen en la solución general (16.10) están determinadas por las condiciones iniciales de cualquier problema particular. Como se puede adivinar, para determinar una solución particular necesitamos especificar la posición u y la velocidad inicial $\dot{u} = \partial u/\partial t$ en un instante inicial, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16.1 *Evolución de una onda triangular*

Se tira de un segmento corto de una cuerda larga tensada y se libera desde el reposo en $t = 0$, así que su desplazamiento inicial es

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{16.12}$$

donde $u_0(x)$ es la función triangular mostrada en la Figura 16.4(a). Encontrar la perturbación $u(x,t)$ para cualquier instante posterior t.

La solución debe tener la forma (16.10), donde las dos funciones f y g se determinarán utilizando las condiciones iniciales. El desplazamiento inicial dado (16.12) implica que

$$f(x) + g(x) = u_0(x). \tag{16.13}$$

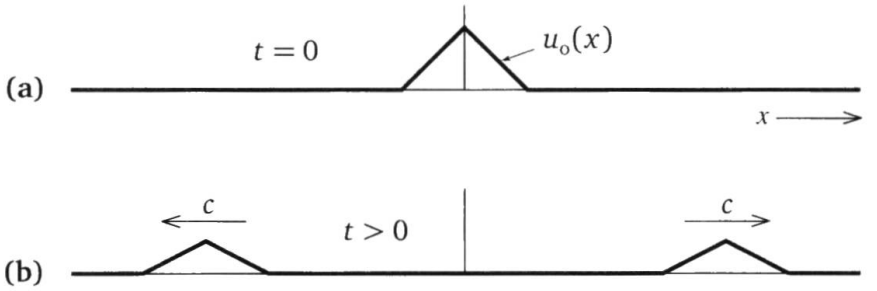


Figura 16.4. **(a)** El desplazamiento inicial de una cuerda en $t = 0$ está dado por la función triangular $u_0(x)$. **(b)** En cualquier instante posterior, la onda consiste en dos triángulos, cada uno de ellos tan alto como la mitad del original, uno que viaja hacia la derecha y el otro hacia la izquierda.

Esto por sí mismo no determina f y g separadamente, y debemos también mirar la velocidad inicial. Derivando (16.10) con respecto a t, vemos que la velocidad inicial de la cuerda (en la dirección y, por supuesto) es

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0} = -cf'(x) + cg'(x)$$

donde la prima quiere decir derivada de una función con respecto a su argumento. En nuestro caso, la cuerda se libera desde el reposo, así que $f'(x) - g'(x) = 0$. Integrando con respecto a x, concluimos que[1]

$$f(x) - g(x) = 0. \tag{16.14}$$

Resolviendo (16.13) y (16.14), concluimos que

$$f(x) = g(x) = \tfrac{1}{2}u_0(x)$$

y la perturbación real (16.10), en cualquier instante t es

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) = \tfrac{1}{2}u_0(x-ct) + \tfrac{1}{2}u_0(x+ct). \tag{16.15}$$

Nuestro triángulo original se ha separado en dos triángulos, la mitad de altos, que viajan hacia fuera en direcciones opuestas con velocidad c, como se muestra en la Figura 16.4(b).

Es interesante permitir que la solución (16.15) evolucione hacia atrás a tiempos pasados $t < 0$. En esos tiempos representa dos triángulos que se aproximan al origen desde lados opuestos. Cuando t está cerca de 0, los dos triángulos se encuentran y comienzan a interferir. En $t = 0$ se solapan exactamente e interfieren para producir

[1] Estrictamente hablando debería haber una constante de integración en (16.14), pero como se puede comprobar fácilmente, se cancela de $u = f + g$, así que también podemos elegir que sea cero.

una onda triangular de altura doble que sus alturas individuales, y después, cuando t aumenta más allá de 0, se separan otra vez y se alejan como en la Figura 16.4(b).

Un caso especial importante de la solución (16.10) es el caso en que las funciones f y g son sinusoidales. Si $g = 0$, entonces la perturbación adopta la forma

$$u(x,t) = A\text{sen}[k(x-ct)] = A\text{sen}(kx-\omega t) \tag{16.16}$$

donde A y k son constantes arbitrarias, y $\omega = kc$. Ésta es una onda sinusoidal que viaja hacia la derecha con amplitud A, número de onda k (o longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$) y frecuencia angular ω (o período $\tau = 2\pi/\omega$). Si sustituimos $x-ct$ por $x+ct$, obtenemos una onda sinusoidal similar

$$u(x,t) = A\text{sen}[k(x+ct)] = A\text{sen}(kx+\omega t) \tag{16.17}$$

que viaja hacia la izquierda. La suma de estas dos soluciones es por sí misma una solución,

$$u(x,t) = A\text{sen}(kx-\omega t) + A\text{sen}(kx+\omega t) = 2A\text{sen}(kx)\cos(\omega t). \tag{16.18}$$

(Use las importantes identidades trigonométricas para comprobar esto). Esta solución tiene la destacable propiedad de que no está viajando en absoluto (ni hacia la derecha ni hacia la izquierda). En lugar de ello, simplemente oscila arriba y abajo como $\cos(\omega t)$, con amplitud (en cualquier punto x) igual a $2A\text{sen}(kx)$. En particular, en aquellos puntos (los **nodos**) en los que kx es un múltiplo entero de π ($kx = n\pi$), la cuerda no se mueve en absoluto, como se muestra en la Figura 16.5. Vemos que superponiendo dos ondas viajeras cuidadosamente elegidas hemos formado una **onda estacionaria**. Como veremos en la próxima sección, las ondas estacionarias juegan un papel importante en las oscilaciones de una longitud finita de cuerda y son, de hecho, el análogo continuo de los modos normales de un sistema de osciladores acoplados.

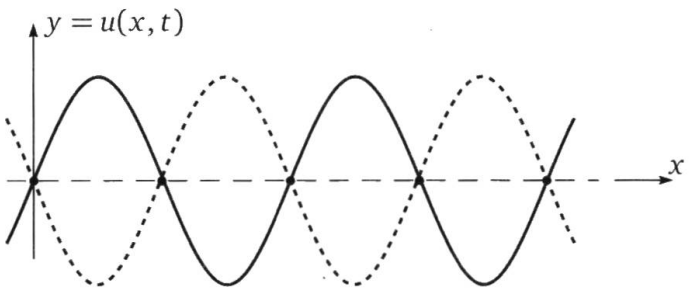


Figura 16.5. La onda estacionaria (16.18) en tres instantes sucesivos, $t = 0$ (curva continua), $t = \tau/4$ (trazos largos), y $t = \tau/2$ (trazos cortos), donde τ es el período. Los puntos pequeños sobre el eje x son los nodos, en los que $kx = n\pi$ y la cuerda no se mueve en absoluto. A medio camino entre dos nodos sucesivos cualesquiera hay un antinodo, en el que la cuerda oscila arriba y abajo con amplitud máxima $2A$.

16.3 Condiciones de contorno; ondas en una cuerda finita*

* *Como siempre, las secciones marcadas con un asterisco se pueden omitir en una primera lectura*

Hasta el momento hemos estado suponiendo, implícitamente, que la cuerda es infinitamente larga, o al menos que es tan larga que podemos ignorar cualquier efecto de los extremos. Las cuerdas reales son, por supuesto, de longitud finita y además tienen extremos. El propio movimiento de la cuerda está gobernado por la misma ecuación de ondas (16.4) que antes, pero la existencia de los extremos impone **condiciones de contorno** adicionales sobre sus soluciones. Estas condiciones de contorno varían con la naturaleza de los extremos de la cuerda; por ejemplo, la cuerda puede estar sujeta en un extremo, o puede simplemente ondear libremente, y las condiciones de contorno para estas dos situaciones son bastante diferentes. Aquí sólo consideraré un tipo de condición de contorno y un solo método de resolución para él. Concretamente, consideraremos una cuerda que está sujeta por los dos extremos (en $x = 0$ y $x = L$), y resolveremos este problema por un método análogo a la discusión de los modos normales en el Capítulo 11.

Modos normales

El problema que tenemos que resolver es el siguiente: para $0 < x < L$, el desplazamiento $u(x, t)$ de la cuerda debe cumplir la ecuación de ondas (16.4)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{16.19}$$

con condiciones iniciales que fijen la posición u y la velocidad $\dot{u}$ en $t = 0$; además, debe cumplir las condiciones de contorno en $x = 0$ y $x = L$ de que

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \tag{16.20}$$

para todo t. De las múltiples maneras de resolver este problema, seguiremos el método del Capítulo 11; es decir, comenzaremos buscando soluciones que varíen sinusoidalmente con el tiempo, con la forma

$$u(x, t) = X(x)\cos(\omega t - \delta), \tag{16.21}$$

donde la función $X(x)$ y las constantes ω y δ están por determinar. Como siempre, no hay nada que nos impida buscar soluciones con esta forma, y, como antes, veremos que tales soluciones sí existen y que *cualquier* solución del problema se puede escribir en términos de ellas.

La sustitución de la forma mencionada (16.21) en la ecuación de ondas (16.19) reduce la última a la forma

$$-\omega^2 X(x)\cos(\omega t-\delta)=c^2\frac{d^2X(x)}{dx^2}\cos(\omega t-\delta)$$

o

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}=-k^2X(x) \tag{16.22}$$

donde

$$k=\frac{\omega}{c}. \tag{16.23}$$

Vemos que la suposición de dependencia sinusoidal temporal (16.21) ha reducido la ecuación en derivadas parciales (16.19) a la ecuación diferencial ordinaria[2] (16.22) (una ecuación, sobre todo, cuyas soluciones podemos escribir fácilmente).

La solución general de (16.22) es

$$X(x)=a\cos(kx)+b\,\mathrm{sen}(kx) \tag{16.24}$$

y esto proporciona una solución de la ecuación de ondas (16.19) para cualquier elección de las constantes a y b. Sin embargo, tenemos todavía que imponer las condiciones de contorno (16.20), que requieren que

$$X(0)=X(L)=0. \tag{16.25}$$

La condición de que $X(0)=0$ requiere simplemente que el coeficiente a en (16.24) sea cero, así que $X(x)=b\,\mathrm{sen}(kx)$. De este modo, la condición de que $X(L)=0$ requiere que o bien $b=0$, o bien que $\mathrm{sen}(kL)=0$. En el primer caso, la solución es idénticamente cero, y la cuerda no se mueve (una solución, pero una solución trivial). Si $\mathrm{sen}(kL)=0$, entonces kL debe ser un múltiplo entero de π, y obtenemos una solución no trivial,

$$u(x,t)=\mathrm{sen}(kx)A\cos(\omega t-\delta), \tag{16.26}$$

en la que las condiciones de contorno han forzado a k a tener uno de los valores

$$k=k_n=n\frac{\pi}{L}\qquad[n=1,2,3,\cdots]. \tag{16.27}$$

Por (16.23), $\omega=ck$, así que la frecuencia correspondiente ω debe tener la forma

$$\omega=\omega_n=n\frac{\pi c}{L}\qquad[n=1,2,3,\cdots]. \tag{16.28}$$

Concluimos que de hecho existen soluciones en las que la cuerda oscila sinusoidalmente con una única frecuencia ω, siempre que ω tenga uno de los valores

[2] El método de resolución aquí está estrechamente relacionado con el método de *separación de variables*. Vea el Problema 16.9.

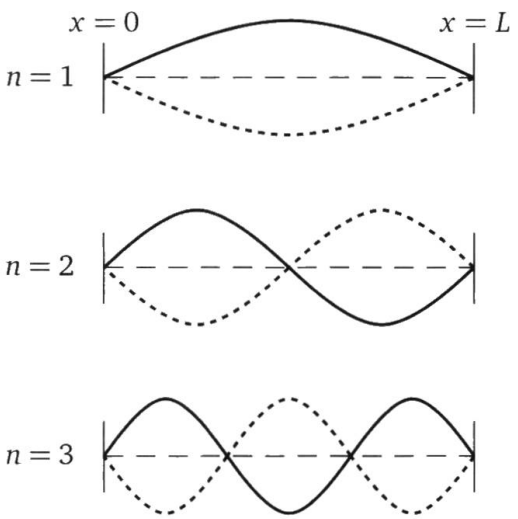


Figura 16.6. Los tres modos normales de más baja frecuencia (16.26) de una cuerda de longitud L fija en ambos extremos. En cada imagen la curva continua, la de trazos largos y la de trazos cortos muestran la cuerda en tres instantes sucesivos, separados por un cuarto de ciclo. El modo $n = 1$ se denomina el fundamental.

(16.28). Este resultado recuerda al Capítulo 11, donde encontramos que un sistema de n osciladores acoplados podía oscilar en uno cualquiera de los múltiples *modos normales* sinusoidales con frecuencias $\omega_1, \ldots, \omega_n$. La principal diferencia es que los sistemas del Capítulo 11 tenían un número finito de grados de libertad y un número igual de frecuencias normales. Aquí, nuestra cuerda tiene un número infinito de grados de libertad y un número infinito de frecuencias normales como en (16.28). La Figura 16.5 muestra los tres modos normales de más baja frecuencia para la cuerda: el **fundamental** y los dos primeros **sobretonos**. Si se comparan estas imágenes con la Figura 16.5, se verá que cada uno de los modos normales de la cuerda finita es justo una sección de una onda estacionaria sobre una cuerda infinita. Que la cuerda finita esté fija en sus dos extremos significa que los puntos $x = 0$ y $x = L$ deben ser nodos, lo que requiere que la longitud L debe ser igual a un número entero de longitudes de onda, $L = n\lambda/2$. Como $\lambda = 2\pi/k$, esto explica la condición (16.27) de que $k = n\pi/L$.

Las frecuencias permitidas (16.28) de la cuerda son todas múltiplos enteros de la frecuencia más baja, $\omega_n = n\omega_1$. Son, entre otras muchas cosas, las frecuencias a las cuales cualquier instrumento musical de cuerda, tal como un piano o una guitarra, pueden vibrar. Los modos correspondientes, incluido el fundamental, se denominan **armónicos** de la cuerda, porque «armonizan» bien (es decir, producen un sonido agradable al oído) cuando se tocan juntos.

La solución general

Los modos normales (16.26) determinan *todos* los posibles movimientos de la cuerda finita, en el mismo sentido que cualquier posible movimiento se puede desarrollar

en términos de las soluciones de los modos normales. Para ver este hecho necesitaremos usar algunas de las propiedades de las series de Fourier descritas en la Sección 5.7. Primero, tenga presente que cualquier movimiento de la cuerda está descrito por una función $u(x,t)$ que cumple la ecuación de ondas (16.19) y las condiciones de contorno (16.20), y está determinado por su posición inicial $u(x,0) = u_0(x)$ y su velocidad $\dot{u}(x,0) = \dot{u}_0(x)$. Para ver que cualquier solución se puede desarrollar en términos de los modos normales, primero reescribimos la solución de los modos normales (16.26) en la forma «seno más coseno» como

$$u(x,t) = \operatorname{sen} k_n x(B_n \cos \omega_n t + C_n \operatorname{sen} \omega_n t). \tag{16.29}$$

Nuestra afirmación es que cualquier posible movimiento se puede escribir como una combinación lineal de estas soluciones de modos normales:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} k_n x(B_n \cos \omega_n t + C_n \operatorname{sen} \omega_n t). \tag{16.30}$$

Para probarlo, primero vemos que esta combinación lineal cumple ciertamente la ecuación de ondas y las condiciones de contorno de que u desaparece en $x = 0$ y $x = L$. En el instante $t = 0$, la solución mencionada es

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} k_n x. \tag{16.31}$$

Esta es una serie seno de Fourier, y los coeficientes B_n se pueden elegir de manera que $u(x,0)$ iguale cualquier valor inicial dado $u_0(x)$.[3] Análogamente, la velocidad de la solución propuesta (16.30) es

$$\dot{u}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n C_n \operatorname{sen} k_n x \tag{16.32}$$

y podemos elegir los coeficientes C_n de modo que ésta es igual a cualquier velocidad inicial dada $\dot{u}_0(x)$. Concluimos que la solución propuesta cumple la ecuación del movimiento y las condiciones de contorno, y que eligiendo los coeficientes B_n y C_n puede servir para cualesquiera condiciones iniciales dadas. Por tanto, cualquier movimiento posible de la cuerda se puede desarrollar en términos de los modos normales como en (16.30).

---

[3] Existe una pequeña complicación que estoy ignorando aquí. La serie (16.31) no es la serie de Fourier habitual porque le faltan todos los términos en coseno. No obstante, contiene dos veces tantos términos en seno como la serie de Fourier habitual porque $k_n = n\pi/L$ (en oposición al habitual $2n\pi/L$), y se puede demostrar que esta serie se puede utilizar para desarrollar cualquier función (razonable) en el intervalo $0 \leq x \leq L$. Vea el Problema 16.13.

Como todas las frecuencias en (16.30) son múltiplos enteros de la frecuencia más baja ($\omega_n = n\omega_1$), todos los términos en (16.30) son periódicos con período $\tau = 2\pi/\omega_1$. Por tanto, todo movimiento posible de la cuerda finita es periódico con este período. [Por supuesto, si ciertos coeficientes en (16.30) con cero, el movimiento puede ser periódico con un período más corto también, pero *toda* solución tiene el período del modo fundamental].

Ejemplo 16.2 *Una onda triangular en una cuerda finita*

Una cuerda de longitud $L = 8$ está fija en ambos extremos. Se le transmite un pequeño desplazamiento triangular, como en la Figura 16.7 y se libera del reposo en $t = 0$. Encontrar los coeficientes de Fourier B_n y C_n en el desarrollo (16.30) y, utilizando algún número finito de términos para aproximar la serie infinita, representar la posición de la cuerda para cinco instantes de tiempo igualmente espaciados desde $t = 0$ hasta $t = \tau/2$, donde τ es el período del movimiento.

Como la cuerda está inicialmente en reposo, todos los coeficientes C_n son cero. Los coeficientes N_n están dados por la integral

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx. \tag{16.33}$$

[Esto es muy parecido, aunque no del todo, a la fórmula estándar (5.84); para más detalles, vea el Problema 16.13]. Es fácil ver que esto es cero cuando n es par. Cuando n es impar, podemos escribir $n = 2m + 1$ y se puede comprobar (Problema 16.10) que

$$B_{2m+1} = (-1)^m \frac{32}{(2m+1)^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{(2m+1)\pi}{8}\right) \tag{16.34}$$

Poniendo estos coeficientes en el desarrollo (16.30) y escogiendo algún número finito razonable de términos, obtenemos una buena aproximación para el desplazamiento $u(x,t)$ para todos los tiempos t. Usando justo los primeros cinco términos o así, obtenemos una aproximación moderada, pero como (para un ordenador) no es ningún problema utilizar más términos, opté por utilizar la suma de los primeros veinte. Los resultados se muestran en la Figura 16.8. Cada una de estas cinco representaciones merece una atención especial. La primera muestra el desplazamiento inicial de la Figura 16.7, aproximado por los primeros 20 términos de su serie de Fou-

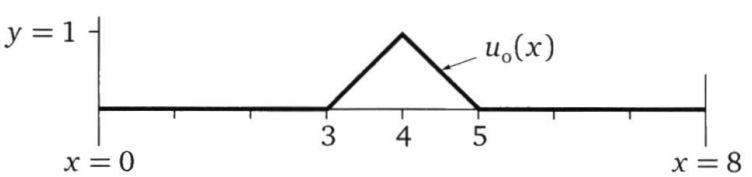


Figura 16.7. Una cuerda se libera del reposo en $t = 0$ en la posición triangular mostrada.

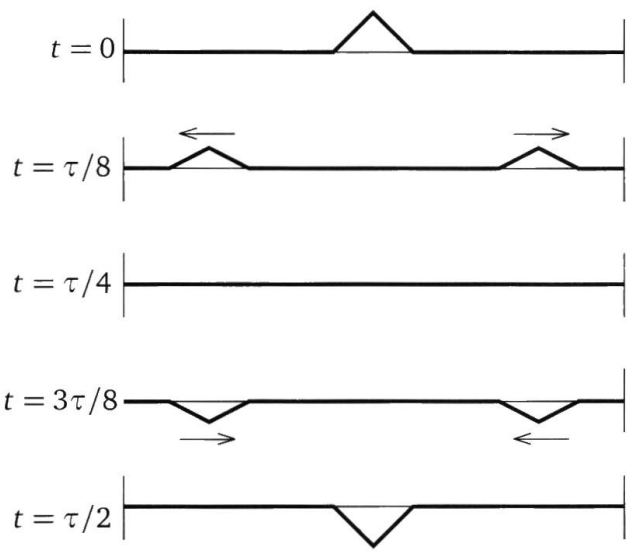


Figura 16.8. Cinco instantáneas sucesivas de una cuerda que fue liberada desde la posición inicial de la Figura 16.7, calculadas usando los primeros veinte términos distintos de cero de la serie de Fourier (16.30). La primera imagen muestra la posición inicial (aproximada por 20 términos de su serie de Fourier). Las cuatro imágenes siguientes muestran la posición a intervalos de $\tau/8$, donde τ es el período del fundamental.

rier. La aproximación es muy buena, aunque falla al reproducir el giro cerrado en el vértice. (Obviamente, ninguna suma finita de senos o cosenos puede realmente tener un cambio instantáneo de inclinación). En la segunda imagen, el triángulo inicial se ha dividido en dos triángulos separados, que viajan en direcciones opuestas. Este es exactamente el comportamiento que vimos en el Ejemplo 16.1 (Figura 16.4); porque ninguna de las ondas ha alcanzado los bordes en $x = 0$ y L, el movimiento no se ve afectado hasta el momento por la presencia de bordes. Saltándose por un momento la tercera imagen, uno puede ver en la cuarta que cada triángulo ha sido reflejado por las paredes, y está ahora volviendo hacia el centro, aunque están ahora invertidos. En la tercera imagen, las ondas original y reflejada están ambas presentes e interfiriendo destructivamente para producir un desplazamiento neto nulo. Finalmente, en la última imagen, las dos ondas reflejadas se fusionan momentáneamente en un único triángulo reflejado. Si fuéramos a seguir el movimiento durante más tiempo, veríamos las dos ondas reflejadas continuar hasta rebotar en las paredes opuestas y reflejarse de nuevo. (Vea el Problema 16.11).

16.4 La ecuación de ondas tridimensional

Vivimos en un mundo tridimensional, y es necesario generalizar la ecuación de ondas (16.4)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{16.35}$$

a tres dimensiones. No es difícil suponer cuál es la generalización apropiada. Si $p = p(x, y, z, t) = p(\mathbf{r}, t)$ denota algún tipo de alteración en un sistema tridimensional (por ejemplo, la presión en una onda de sonido que viaja a través del aire), entonces seguramente supondríamos que la generalización apropiada de (16.35) debería ser

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right). \tag{16.36}$$

Veremos un par de ejemplos de perturbaciones que cumplen de hecho esta *ecuación de ondas tridimensional* más tarde en este capítulo. En particular, demostraré en la Sección 16.13 que la presión[4] en cualquier fluido no viscoso (el aire es un ejemplo), para el cual la velocidad de la onda c está dada por

$$c = \sqrt{\frac{\mathrm{MCo}}{\varrho_0}}, \tag{16.37}$$

donde MCo denota el *módulo de compresibilidad* del fluido, y ϱ_0 es la densidad en equilibrio. (Definiré el módulo de compresibilidad en breve. Por el momento considérelo sencillamente como un parámetro que caracteriza la resistencia del fluido a la compresión).

Es habitual racionalizar la notación en la ecuación de ondas (16.36): si, como es habitual, adoptamos la visión de que ∇ es el «vector» con componentes

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

entonces el producto escalar de ∇ consigo mismo es obviamente

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2. \tag{16.38}$$

Puede que se haya visto este operador diferencial antes, quizá en estudios sobre electromagnetismo. Juega un papel importantísimo en muchas ramas (electromagnetismo, mecánica cuántica, mecánica de fluidos, elasticidad, termodinámica, y más) y se denomina **laplaciano** por su papel en la ecuación de Laplace de electrostática. Con esta notación, podemos reescribir la **ecuación de ondas tridimensional** (16.36) como

[4] Estrictamente hablando, la presión p discutida a lo largo de esta sección es la presión *diferencial*, la diferencia entre la presión total y la presión atmosférica en equilibrio.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p. \tag{16.39}$$

Ondas planas

La ecuación (16.39) tiene muchas, muchas soluciones, de las cuales las más simples son las famosas ondas planas. Un ejemplo sencillo de onda plana es una solución de (16.39) [o (16.36)] que es independiente de y y z,

$$p(\mathbf{r}, t) = p(x, t)$$

Obviamente, una perturbación con esta forma tiene el mismo valor en todos los puntos en cualquier plano $x =$ constante. Si sustituimos esta forma en (16.36), las derivadas con respecto a y y z desaparecen, y nos quedamos con una ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

cuya solución más general ya sabemos que es $p = f(x-ct)+g(x+ct)$. En particular, una solución $p = f(x-ct)$ es una perturbación plana (p constante un cualquier plano perpendicular al eje x) que está viajando en la dirección x con velocidad c (por eso el nombre de «onda plana»).

Análogamente, una solución de la forma $p = f(y-ct)$ o $f(z-ct)$ es una onda plana que viaja en la dirección y o en la z. De modo más general, si $\mathbf{n}$ denota un vector unitario arbitrario, entonces una perturbación de la forma

$$p = f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct) \tag{16.40}$$

cumple la ecuación de ondas (16.39), es constante en cualquier plano perpendicular a $\mathbf{n}$, y viaja en la dirección $\mathbf{n}$ con velocidad c. (Vea el Problema 16.15). Si la función f es una función sinusoidal, $f(\xi) = \cos k\xi$, digamos, la onda (16.40) es la onda plana sinusoidal

$$p = \cos[k(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct)], \tag{16.41}$$

cuyas crestas están en planos perpendiculares a $\mathbf{n}$ y viajan con velocidad c en la dirección de $\mathbf{n}$, como se muestra en la Figura 16.9. Este tipo de onda es más fácil de visualizar en dos dimensiones. Se podría pensar, por ejemplo, en ondas planas sobre la superficie de un estanque.

Una onda plana es una generalización matemática que nunca sucede en la práctica, porque ninguna perturbación real puede ser constante sobre un plano infinito. Sin embargo, es frecuentemente una aproximación muy útil. La luz que viene del

sol y brilla sobre nosotros se aproxima bien mediante una onda plana, y también el sonido de una explosión lejana.

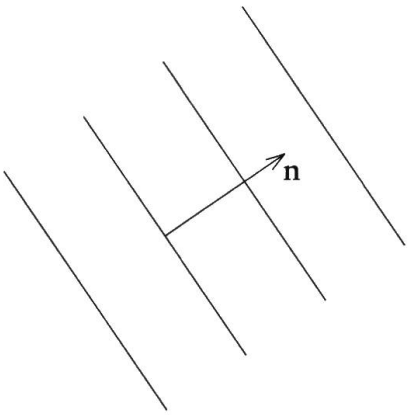


Figura 16.9. La onda plana sinusoidal (16.41). Las crestas de la onda (o frentes de onda) son planos perpendiculares al vector unitario **n** y viajan con velocidad c en la dirección de **n**.

Ondas esféricas

Otra solución importante de la ecuación de ondas tridimensional es la onda esférica, por ejemplo una onda de sonido que viaja radialmente hacia fuera de un altavoz pequeño multidireccional. Si suponemos que tal onda tiene simetría esférica, entonces debe tener la forma $p = p(r, t)$. (Esto es, en coordenadas polares esféricas, p es independiente de θ y ϕ). No es difícil demostrar que para una función de esta forma

$$\nabla^2 p = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rp). \tag{16.42}$$

[La manera obvia de probarlo es evaluar el primer miembro usando la definición (16.38) de ∇^2; lo más simple es buscar la expresión para ∇^2 en coordenadas polares en la contracubierta trasera. Vea el Problema 16.16]. Por tanto, la ecuación de ondas se convierte en

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rp)$$

o, multiplicando ambos miembros por r,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rp) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rp). \tag{16.43}$$

Vemos que para una onda esférica la función $rp(r, t)$ cumple la ecuación de ondas unidimensional con respecto a r y t. Por tanto, la solución general tiene la forma

$$rp(r, t) = f(r - ct) + g(r + ct).$$

En particular, si la función g es cero, la perturbación tiene la forma

$$p(r,t) = \frac{1}{r} f(r - ct). \tag{16.44}$$

El factor $f(r-ct)$ representa una perturbación que viaja rígidamente hacia fuera. Como esto es lo que se habría adivinado para una onda que se propaga radialmente, la cuestión es, ¿«por qué el factor de $1/r$?» Para contestar a esta pregunta necesitamos un resultado que quizá se recuerde de alguna clase de introducción a la física. La **intensidad** de cualquier onda en tres dimensiones se define como la potencia transferida por la onda a un área unitaria perpendicular a la dirección de propagación, y la intensidad de una onda de sonido es proporcional a p^2. (Para una guía sobre cómo probar esto, vea el Problema 16.37). De este modo el factor $1/r$ en (16.44) implica que la intensidad es proporcional a $1/r^2$, que es exactamente lo que se requiere para la conservación de la energía: a una distancia r de la fuente, la energía de la onda se extiende por un área $4\pi r^2$. Por tanto, cuando la onda se desplaza radialmente hacia fuera, la intensidad *tiene* que decrecer como $1/r^2$ para mantener la potencia total constante.

Si la función f en (16.44) es sinusoidal, $f(\xi) = \cos k\xi$, digamos, entonces (16.44) representa una onda sinusoidal cuyas crestas están viajando radialmente hacia fuera desde el origen con velocidad c, como se ilustra en la Figura 16.10.

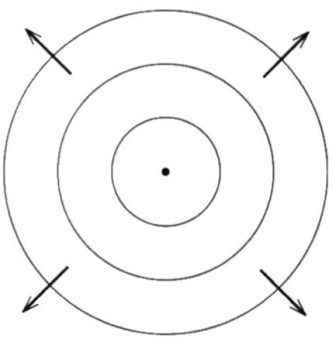


Figura 16.10. Onda esférica. Las crestas de la onda son esferas que se mueven hacia fuera desde el origen. Para ayudar a visualizar lo que esto muestra, puede ayudar pensar en ella como en una onda bidimensional, tal como las ondulaciones creadas en un estanque por un palo que se mueve dentro y fuera del agua en el origen.

16.5 Fuerzas de volumen y superficie

Nuestro siguiente objetivo es ver cómo encontrar la ecuación del movimiento de un medio continuo tridimensional. En general, este es un problema muy complicado, y los detalles dependen fuertemente de la naturaleza concreta del medio. Por ejemplo,

las ecuaciones de movimiento de un fluido son muy diferentes de las de un sólido elástico. Sin embargo, hay algunos principios generales razonablemente simples que se aplican a muchos medios continuos diferentes, y éstos son lo que describiré ahora.

Como probablemente se pueda adivinar, encontramos la ecuación del movimiento de un medio continuo aplicando la segunda ley de Newton a un elemento pequeño arbitrario dV del cuerpo. (Uso la palabra «cuerpo» aquí para designar cualquier porción de materia, sólida, líquida o gas). Esto es exactamente análogo a lo que hicimos en la Sección 16.1, donde aplicamos la segunda ley de Newton a una longitud dx de la cuerda unidimensional, pero el caso tridimensional es naturalmente más complicado. Necesitamos primero discutir la geometría del elemento de volumen dV y después especificar las fuerzas que actúan sobre dV y el movimiento resultante del mismo.

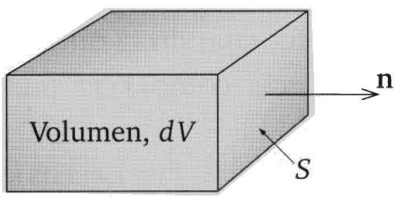
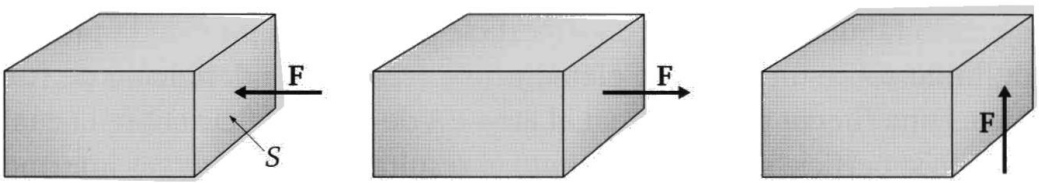


Figura 16.11. Un pequeño elemento de volumen dV de un medio continuo puede tener cualquier forma, pero una elección conveniente es la forma rectangular mostrada aquí. La orientación de cualquier parte S de la superficie (el extremo derecho aquí) está especificada por un vector unitario $\mathbf{n}$ que apunta hacia fuera desde dV.

Elementos de volumen

La forma del elemento de volumen sobre el cual nos fijamos es arbitraria. Podría ser esférica, o rectangular (en la forma de un ladrillo), o cualquier otra cosa que nos imaginemos. Por simplicidad, se puede tener en mente un volumen rectangular sencillo, como en la Figura 16.11. El volumen sobre el cual nos fijamos será normalmente un volumen infinitesimal, como intenta sugerir el nombre dV. La superficie que rodea a dV podría ser la frontera real del medio continuo (por ejemplo, las paredes de un cilindro que contiene un gas), pero normalmente será una superficie «imaginaria», es decir, una superficie arbitraria interior a todo el cuerpo. La superficie exterior envolvente es naturalmente una *superficie cerrada* que divide todo el espacio exactamente en dos partes, el «interior» (a saber, dV) y el «exterior» (todo lo demás). Esto significa que podemos especificar cualquier parte de la superficie, tal como la cara S en la Figura 16.11, mediante el vector unitario $\mathbf{n}$, normal a la superficie y que apunta hacia fuera desde dV.[5]

[5] Cuando se está interesado en una superficie no cerrada, la orientación de una pequeña parte S todavía se puede especificar por un vector unitario $\mathbf{n}$ que es normal a S, pero esto deja un signo



(a) Presión (b) Tensión (c) Cizalladura

Figura 16.12. Tres fuerzas de superficie diferentes sobre la cara S de un volumen rectangular. **(a)** La presión hidrostática actúa normalmente a la superficie y hacia dentro, así que $\mathbf{F} = -p\mathbf{n}\,dA$, con el signo menos como $\mathbf{F}$ es hacia dentro mientras que $\mathbf{n}$ es hacia fuera. **(b)** Una simple tensión en la dirección normal a S. **(c)** Por definición, una fuerza de cizalladura actúa tangencialmente a S.

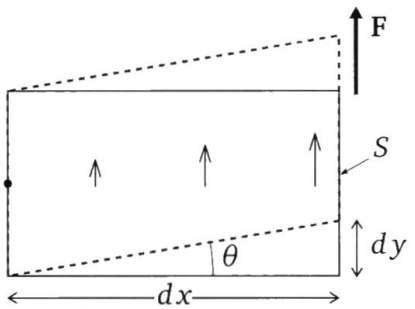


Figura 16.13. Fuerza de cizalladura $\mathbf{F}$ aplicada a la cara S del sólido rectangular de la Figura 16.12 (visto aquí de frente directamente). Si la cara opuesta se sujeta fija, el corte produce el movimiento mostrado, en el que los planos paralelos S se mueven todos en la dirección de $\mathbf{F}$, cambiando la sección de paso rectangular original en un paralelogramo. Las distancias dx y dy se usan para definir la tensión de cizalladura en la ecuación (16.54) próxima.

Fuerzas sobre el elemento de volumen

Las dos clases de fuerza más importantes sobre un elemento de volumen dV de un medio continuo se denominan *fuerzas de volumen* y *fuerzas de superficie*. Un ejemplo de fuerza de volumen es la fuerza de la gravedad, $\mathbf{F} = \varrho\mathbf{g}dV$, donde ϱ es la densidad de masa del material y $\mathbf{g}$ es la aceleración de la gravedad. Un segundo ejemplo es la fuerza electrostática $\mathbf{F} = \varrho\mathbf{E}\,dV$ de un campo eléctrico $\mathbf{E}$ sobre un material con densidad de carga ϱ. La definición de una **fuerza de volumen** es simplemente que es una fuerza proporcional al volumen dV. Las fuerzas de volumen son generalmente el resultado de un campo externo (tal como la gravedad), y para concretar supondré habitualmente que la única fuerza de volumen es la de la gravedad. En cualquier suceso, las fuerzas del cuerpo son casi siempre conocidas y bien entendidas. Por tanto, nuestro principal interés estará en las fuerzas de superficie.

---

ambiguo (porque $\mathbf{n}$ y $-\mathbf{n}$ ambos encajan en la definición). Afortunadamente, en este capítulo S será siempre una parte de una superficie cerrada, así que podemos insistir, simplemente y sin ambigüedad, en que $\mathbf{n}$ apunta *hacia fuera*.

Un ejemplo familiar de fuerza de superficie es la fuerza $p\,dA$ de la presión p que ejerce un fluido sobre un pequeño elemento de área dA. La definición de **fuerza de superficie** es una fuerza proporcional al área dA de la superficie sobre la cual actúa. Las fuerzas de superficie son generalmente el resultado de las fuerzas intermoleculares de las moléculas que están justo en la superficie y que actúan sobre las moléculas que están en el interior. La Figura 16.12 muestra tres casos especiales importantes de fuerzas de superficie, una fuerza de presión, una simple tensión y una fuerza de cizalladura. Advierta que tanto la fuerza de presión como la tensión actúan normalmente a la superficie S, mientras que la de cizalladura, por definición, actúa tangencialmente a S. La tendencia de una fuerza de cizalladura es producir el movimiento mostrado en la Figura 16.13.

¿Cuándo es isotrópica la presión?

Para concluir esta sección, probaré un resultado que probablemente se aprendió en una clase introductoria de física: que la presión que ejerce cualquier fluido estático actúa igualmente en todas direcciones, o, más brevemente, que la presión es isotrópica. Realmente, el resultado es un poco más general que esto, y lo demostraré con toda generalidad. Una propiedad característica de cualquier fluido es que no puede soportar fuerzas de cizalladura en equilibrio, y la ausencia de fuerzas de cizalladura es de hecho la característica esencial que conduce a la isotropía de la presión. Probaré en un momento que en cualquier sustancia en la que no hay fuerzas de cizalladura la presión es isotrópica. Claramente el resultado se aplica a cualquier fluido estático, pero también se aplica a un fluido en movimiento, siempre que no haya fuerzas de cizalladura. Como la causa de las fuerzas de cizalladura en los fluidos es la viscosidad, podemos decir que la presión es isotrópica incluso en fluidos en movimiento, *siempre que la viscosidad sea cero*. Por supuesto, existen muy pocos fluidos cuya viscosidad sea exactamente cero, pero hay multitud de situaciones en las que la viscosidad es lo suficientemente pequeña como para despreciarse, siendo el ejemplo más claro cualquier fluido en el que todas las velocidades son muy bajas. Nuestro resultado es obviamente muy útil, pero, más importante, el método de demostración tiene otras aplicaciones, como veremos.

Consideremos, entonces, cualquier medio en el que no haya fuerzas de cizalladura, y sean $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ dos direcciones cualesquiera. En cualquier punto particular del medio, construyamos dos superficies pequeñas rectangulares iguales, S_1 normal a $\mathbf{n}_1$ y S_2 normal a $\mathbf{n}_2$, de tal manera que formen un prisma triangular pequeño, como en la Figura 16.14. Las fuerzas de superficie son normales a las tres caras mostradas y pueden escribirse como $\mathbf{F}_1 = -p_1\mathbf{n}_1\,dA_1$ y así sucesivamente, donde escribimos las presiones sobre las tres caras como p_1, p_2 y p_3 para permitir la posibilidad de que puedan ser diferentes. (Nuestro objetivo es demostrar que, de hecho, $p_1 = p_2 = p_3$). Estas presiones pueden, por supuesto, variar de un punto a otro en el

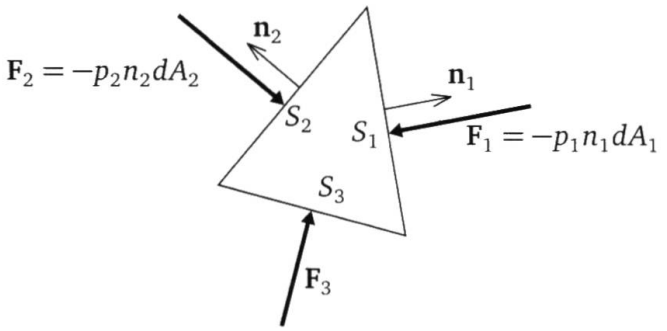


Figura 16.14. Las superficies S_1 y S_2 (vistas de perfil) son normales a los dos vectores unitarios $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$. Son rectángulos idénticos y, junto con S_3, forman un prisma isósceles (vista de perfil). Las tres fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ son las fuerzas de superficie sobre las tres caras y son normales a las superficies porque, por hipótesis, no existen fuerzas de cizalladura.

fluido, pero considerando un elemento de volumen suficientemente pequeño podemos asegurarnos de que varían en una cantidad despreciable dentro del volumen. Estamos ahora preparados para aplicar la segunda ley de Newton a nuestro pequeño prisma. La masa del prisma es $m = \varrho dV$. La fuerza neta sobre el prisma es $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{\text{vol}}$ donde $\mathbf{F}_{\text{vol}}$ denota la fuerza de volumen total (por ejemplo, el peso $\mathbf{F}_{\text{vol}} = \varrho \mathbf{g} dV$). Por consiguiente la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ se convierte en[6]

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{\text{vol}} = m\mathbf{a}$$

que podemos reescribir como

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = m\mathbf{a} - \mathbf{F}_{\text{vol}}. \tag{16.45}$$

Ahora viene un acto supremo de astucia. La ecuación (16.45) se aplica al pequeño prisma de la Figura 16.14, pero ciertamente también se aplicaría a un prisma más pequeño. Hagamos encoger, pues, nuestro prisma un factor λ en las tres direcciones. Los tres términos de superficie a la izquierda de (16.45) son proporcionales al área, así que decrecerán un factor λ^2. Ambas fuerzas, de masa y de volumen, a la derecha son proporcionales a dV y deben disminuir un factor λ^3. De este modo el homólogo de (16.45) para el prisma más pequeño es

$$\lambda^2(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) = \lambda^3(m\mathbf{a} - \mathbf{F}_{\text{vol}})$$

o, dividiendo ambos miembros por λ^2,

$$(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) = \lambda(m\mathbf{a} - \mathbf{F}_{\text{vol}}). \tag{16.46}$$

[6] Estrictamente hablando deberíamos incluir las dos fuerzas de presión sobre los dos extremos del prisma, pero estaremos interesados sólo en las componentes de esta ecuación en el plano de la imagen en la Figura 16.14, así que podemos ignorarlas.

Esta ecuación se cumple para cualquier valor de λ (menor que 1). En particular, podemos hacer que λ tienda a cero, y llegamos a la sorprendente conclusión de que los tres términos de superficie deben sumar cero por sí mismos,

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0. \tag{16.47}$$

Es fácil comprobar que, como el triángulo de la Figura 16.14 es isósceles, esto requiere que $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ deban tener magnitudes iguales, $F_1 = F_2$. (Tome sólo componentes perpendiculares a $\mathbf{F}_3$ para comprobarlo). Como $F_1 = p_1 dA_1$ y $F_2 = p_1 dA_2$, y $dA_1 = dA_2$, concluimos que

$$p_1 = p_2. \tag{16.48}$$

Como las direcciones $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ eran arbitrarias, hemos probado que la presión es independiente de la dirección en cualquier medio en el que no haya fuerzas de cizalladura. En particular, la presión es isotrópica en cualquier fluido estático y también en cualquier fluido en movimiento que tenga viscosidad despreciable.

16.6 Esfuerzo y tensión: el módulo de elasticidad

Como veremos en la siguiente sección, las fuerzas de superficie dentro de un medio continuo (sólido, líquido o gas) se pueden expresar en términos de un tensor tridimensional denominado el tensor de esfuerzos. En la Sección 16.8, veremos que los desplazamientos resultantes del cuerpo se pueden expresar en términos de un segundo tensor denominado tensor de tensiones. Finalmente, antes de poder escribir la ecuación del movimiento necesitamos establecer la relación entre los dos tensores. [Este último enunciado es el análogo continuo del requisito familiar de que para escribir la ecuación del movimiento de una masa sujeta a un muelle, necesitamos saber la ley de Hooke ($F = kx$), que relaciona la tensión en el muelle (F) con el alargamiento (x)]. La teoría general de los tensores de esfuerzo y de tensión es bastante complicada, así que en esta sección mencionaré unos pocos casos especiales antes de sumergirnos en el caso general.

Esfuerzo

Como cualquier fuerza de superficie F es proporcional al área A de la superficie sobre la que actúa, es natural considerar la razón F/A, y esta razón se denomina **esfuerzo**. Como veremos en la siguiente sección, en general necesitamos discutir un *tensor de esfuerzos*, pero un ejemplo sencillo que no presenta esta complicación es la fuerza de presión en un fluido estático, para el cual el esfuerzo es exactamente la presión:

$$\text{esfuerzo} = \frac{F}{A} = \text{presión}, p \qquad \text{[en un fluido estático]}. \tag{16.49}$$

Análogamente, se puede recordar que el esfuerzo en un cable o barra sometido a una tensión simple se define como

$$\text{fuerza} = \frac{\text{tensión}}{\text{área}} \qquad \text{[para un cable en tensión]} \tag{16.50}$$

donde el área es la sección transversal del cable. Para una fuerza de cizalladura simple, como la de la Figura 16.13, el esfuerzo de cizalladura se define como

$$\text{esfuerzo} = \frac{\text{fuerza de cizalladura}}{\text{área}} \qquad \text{[para una cizalladura]}. \tag{16.51}$$

No importa lo complicada que sea la situación, veremos que el esfuerzo (o cualquier componente del tensor de esfuerzos) se puede definir como la razón entre una fuerza de superficie (o una de sus componentes) y el área de la superficie sobre la cual actúa. En particular, el esfuerzo siempre tiene dimensiones de [fuerza/área].

Tensión

El resultado del esfuerzo es casi siempre una deformación, o cambio en las dimensiones, del cuerpo sobre el que actuó el esfuerzo (un cambio en el volumen de un líquido o la longitud de un cable, por ejemplo). Cuando este cambio está expresado como un *cambio infinitesimal* se denomina **tensión**. Por ejemplo, en un fluido estático, la tensión sería el cambio infinitesimal en volumen,

$$\text{tensión} = \frac{dV}{V} \qquad \text{[en un fluido estático]}. \tag{16.52}$$

Para un cable bajo tensión, la tensión sería el cambio infinitesimal en longitud,

$$\text{tensión} = \frac{dl}{l} \qquad \text{[para un cable en tensión]}. \tag{16.53}$$

Para la fuerza de cizalladura simple de la Figura 16.13, la tensión se define como

$$\text{tensión} = \frac{dy}{dx} \qquad \text{[para una cizalladura]} \tag{16.54}$$

donde dy es el desplazamiento en la dirección de cizalladura y dx es la distancia perpendicular a través de la cual ocurre la cizalladura (vea la Figura 16.13).

Relación entre esfuerzo y tensión: módulo de elasticidad

Cuando los esfuerzos en un medio no son demasiado grandes, esperaríamos que la tensión resultante fuera lineal en el esfuerzo. En el caso del cable estirado, esta relación se escribe como

$$\text{esfuerzo} = (\text{módulo de Young}) \times \text{tensión} \qquad \text{o} \qquad \frac{dF}{A} = \text{MY} \cdot \frac{dl}{l} \tag{16.55}$$

donde MY es el **módulo de Young** para el material del cable.[7] [Si se reescribe esta ecuación como $F = (A\text{MY}/l)dl$, se reconocerá como la ley de Hooke, con la constante de fuerza $k = (A\text{MY}/l)$. La ventaja de escribirla en términos del módulo de Young es que MY, al contrario que k, es característico del material e independiente de las dimensiones A y l]. En la ecuación (16.55), dl es la extensión causada por un incremento dF en la tensión.

Para cualquier material sometido a presión hidrostática solamente, un pequeño incremento dp en la presión causará un cambio en volumen dado por

$$\text{esfuerzo} = (\text{módulo de compresibilidad} \times \text{tensión} \qquad \text{o} \qquad dp = -\text{MCo} \cdot \frac{dV}{V} \tag{16.56}$$

donde MCo es el **módulo de compresibilidad** para el material, y el signo menos es porque un aumento en la presión ocasiona una disminución en el volumen. Para un esfuerzo de cizalladura,

$$\text{esfuerzo} = (\text{módulo de cizalladura}) \times \text{tensión} \qquad \text{o} \qquad \frac{F}{A} = \text{MCi} \cdot \frac{dy}{dx} \tag{16.57}$$

donde MCi es el **módulo de cizalladura** para el material.

Para resumir esta sección, el *esfuerzo* caracteriza las fuerzas de superficie en un medio continuo,

$$\text{esfuerzo} = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} \tag{16.58}$$

mientras que la *tensión* caracteriza la deformación resultante,

$$\text{tensión} = \text{deformación infinitesimal.} \tag{16.59}$$

[7] Existen casi tantas notaciones para los diferentes módulos de elasticidad como libros sobre el tema. Las notaciones utilizadas aquí no son convencionales, pero se será capaz, espero, de recordar cuál es cuál.

Mientras que el esfuerzo siempre tiene unidades de presión (fuerza/área), la tensión siempre es adimensional.[8] Los diferentes módulos de elasticidad (el de Young, el de compresibilidad y el de cizalladura) son las razones del esfuerzo con la tensión correspondiente,

$$\text{módulo de elasticidad} = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{tensión correspondiente}}. \tag{16.60}$$

16.7 El tensor de esfuerzos

En esta sección deduciré la expresión general para la fuerza de superficie sobre un área pequeña dA de una superficie cerrada S en un medio continuo. Como siempre, utilizaremos $\mathbf{n}$ para denotar al vector unitario exterior a S en la posición de dA. Para justificar la notación, definiré un vector $d\mathbf{A}$ en la dirección de $\mathbf{n}$, con magnitud dA. Esto es,

$$d\mathbf{A} = \mathbf{n}\, dA. \tag{16.61}$$

Este vector nos dice la orientación y el tamaño de la pequeña porción de superficie bajo consideración. Nuestra primera tarea es mostrar que la fuerza de superficie $\mathbf{F}(d\mathbf{A})$ sobre el elemento de superficie especificado por $d\mathbf{A}$ es de hecho un función lineal de $d\mathbf{A}$, es decir, que

$$\mathbf{F}(\lambda_1\, d\mathbf{A}_1 + \lambda_2\, d\mathbf{A}_2) = \lambda_1 \mathbf{F}(d\mathbf{A}_1) + \lambda_2 \mathbf{F}(d\mathbf{A}_2) \tag{16.62}$$

donde λ_1 y λ_2 son dos números reales cualesquiera y $d\mathbf{A}_1$ y $d\mathbf{A}_2$ son dos vectores cualesquiera.

La fuerza $\mathbf{F}(d\mathbf{A})$ es independiente de la forma precisa del elemento de superficie. Por otro lado, es proporcional al área dA, así que

$$\mathbf{F}(\lambda\, d\mathbf{A}) = \lambda \mathbf{F}(d\mathbf{A}) \tag{16.63}$$

para cualquier número positivo λ (no demasiado grande). Si sustituyéramos $d\mathbf{A}$ por $-d\mathbf{A}$, esto intercambiaría el interior y el exterior de nuestra superficie, y por la tercera ley de Newton esto cambiaría el signo de la fuerza de superficie; esto es,

[8] No existe una única manera fácil de recordar cuál es el esfuerzo y cuál es la tensión. Una posibilidad es esta: en el lenguaje cotidiano decimos «el esfuerzo causa tensión» y también «la fuerza causa deformación». Por consiguiente «esfuerzo» va con «fuerza» y «tensión» va con «deformación».

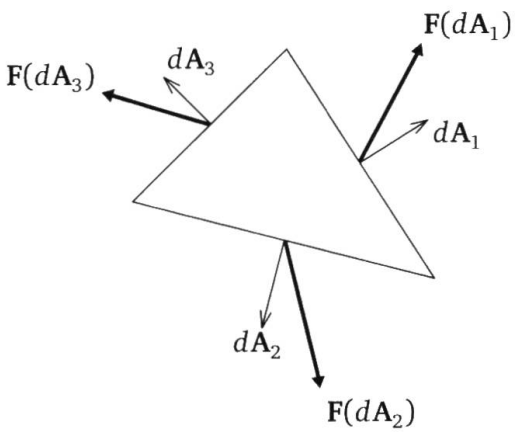


Figura 16.15. Los vectores pequeños arbitrarios $d\mathbf{A}_1$ y $d\mathbf{A}_2$ definen dos superficies rectangulares (vistas de perfil) que se encuentran en un borde común (abajo derecha). Estos dos rectángulos definen un prisma triangular (visto de perfil) cuya tercera cara rectangular está representada por el vector $d\mathbf{A}_3$. Las fuerzas de superficie sobre las tres caras rectangulares se muestran como $\mathbf{F}(d\mathbf{A}_1)$ y así sucesivamente.

$\mathbf{F}(-d\mathbf{A}) = -\mathbf{F}(d\mathbf{A})$. Por tanto, la ecuación (16.63) realmente se cumple tanto para valores negativos como para valores positivos de λ.

Consideremos ahora dos vectores pequeños cualesquiera $d\mathbf{A}_1$ y $d\mathbf{A}_2$. En cualquier punto de nuestro medio continuo, imaginemos dos superficies rectangulares pequeñas que se tocan en un borde común, con orientaciones y áreas dadas por $d\mathbf{A}_1$ y $d\mathbf{A}_2$, como se muestra en la Figura 16.15. Consideremos ahora el prisma triangular definido por estos dos rectángulos y el tercer rectángulo denotado por $d\mathbf{A}_3$ en la figura. Este prisma tiene dos propiedades reseñables. Primero, debido a que los tres bordes mostrados forman un triángulo rectángulo, lo mismo es cierto de los tres vectores $d\mathbf{A}_1$, $d\mathbf{A}_2$ y $d\mathbf{A}_3$. Por tanto

$$d\mathbf{A}_1 + d\mathbf{A}_2 + d\mathbf{A}_3 = 0.$$

Segundo, por el mismo argumento que usamos para probar la isotropía de la presión en un fluido no viscoso [ecuación (16.47)], podemos probar que [9]

$$\mathbf{F}(d\mathbf{A}_1) + \mathbf{F}(d\mathbf{A}_2) + \mathbf{F}(d\mathbf{A}_3) = 0.$$

Aprovechando estas dos ecuaciones otra vez, encontramos que

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(d\mathbf{A}_1 + d\mathbf{A}_2) = \mathbf{F}(-d\mathbf{A}_3) &= -\mathbf{F}(d\mathbf{A}_3) \\ &= \mathbf{F}(d\mathbf{A}_1) + \mathbf{F}(d\mathbf{A}_2).\end{aligned} \tag{16.64}$$

[9] Estoy de nuevo ignorando las fuerzas sobre los dos extremos triangulares. Si denotamos los dos extremos por $d\mathbf{A}_4$ y $d\mathbf{A}_5$, entonces $d\mathbf{A}_4 = -d\mathbf{A}_5$, así que, por (16.63), $\mathbf{F}(d\mathbf{A}_4) = -\mathbf{F}(d\mathbf{A}_5)$ y estas dos fuerzas se cancelan entre sí.

Finalmente, combinando (16.63) y (16.64), podemos inmediatamente verificar (16.62), y hemos probado que la fuerza $\mathbf{F}(d\mathbf{A})$ es lineal en $d\mathbf{A}$.

Es un resultado fundamental de álgebra lineal que si un vector ($\mathbf{F}$ en este caso) es una función lineal de un segundo vector ($d\mathbf{A}$), entonces las componentes del primero están relacionadas con aquéllas del segundo por una relación lineal de la forma[10]

$$F_i(d\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} dA_j \tag{16.65}$$

o, en forma matricial,

$$\mathbf{F}(d\mathbf{A}) = \boldsymbol{\Sigma}\, d\mathbf{A}. \tag{16.66}$$

En esta segunda relación (16.66), $\boldsymbol{\Sigma}$ denota una matriz (3×3),[11] formada por los nueve números σ_{ij} de (16.65). La matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ define un tensor tridimensional de segundo orden denominado **tensor de esfuerzos**. El tensor de esfuerzos puede, por supuesto, variar de un punto a otro en el medio, pero su significado en cada punto $\mathbf{r}$ es este: para todo punto $\mathbf{r}$ en el medio (y en cada instante dado t), existe una única matriz (3×3) $\boldsymbol{\Sigma}$ que da la fuerza sobre cualquier elemento de superficie $d\mathbf{A}$ en $\mathbf{r}$ mediante la relación (16.66).

Los elementos del tensor de esfuerzos

El significado matemático del tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\Sigma}$ y sus elementos σ_{ij} no se puede expresar más sutilmente que en las relaciones (16.66) y (16.65), pero para obtener un sentido sobre su significado físico ayuda observar algunos casos especiales. Por ejemplo, consideremos un área pequeña dA normal al eje x, para la que $d\mathbf{A} = \mathbf{e}_1 dA$. Como sólo una de las componentes de $d\mathbf{A}$ es distinta de cero (a saber, la primera componente), la suma en (16.65) se reduce a un único término. Por ejemplo, la componente x de (16.65) se lee

$$F_1(\text{sobre el área } dA \text{ normal a } \mathbf{e}_1) = \sigma_{11}\, dA.$$

Dándole la vuelta a esto, podemos decir que σ_{11} es la primera componente de la fuerza por área sobre una superficie perpendicular al primer eje (x). De la misma

---

[10] La prueba es bastante fácil: supongamos que $\mathbf{u}$ es una función lineal de $\mathbf{v}$. Como $u_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}$ y $\mathbf{v} = \sum_j \mathbf{e}_j v_j$, se sigue que $u_i(\mathbf{v}) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}(\sum_j \mathbf{e}_j v_j) = \sum_j [\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}(\mathbf{e}_j)] v_j$, que tiene la forma anunciada (16.65) con $\sigma_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}(\mathbf{e}_j)$.

[11] No hay que confundir la letra griega mayúscula en negrita «sigma», $\boldsymbol{\Sigma}$, en (16.66) con el símbolo de suma en (16.65).

manera, concluimos que σ_{ii} es la componente i-ésima de la fuerza por área sobre un superficie perpendicular el eje i-ésimo. Para poner esto de otra manera, un elemento diagonal σ_{ii} del tensor de esfuerzos, $\boldsymbol{\Sigma}$, da la componente normal a la fuerza por área sobre un superficie perpendicular al eje i-ésimo.

Los elementos de fuera de la diagonal σ_{ij} $(i \neq j)$ se pueden interpretar de manera análoga. Consideremos de nuevo el caso de una pequeña área dA normal al eje x, para la cual la segunda componente de (16.65) se lee

$$F_2(\text{sobre el área } dA \text{ normal a } \mathbf{e}_1) = \sigma_{21}\, dA.$$

Evidentemente σ_{21} es la segunda componente (y) de la fuerza por área sobre una superficie perpendicular al primer eje (x). Un argumento similar aplica a σ_{31}, y podemos decir que σ_{21} y σ_{31} son las dos componentes de la fuerza tangencial o de cizalladrura por área sobre una superficie perpendicular al primer eje. De modo más general los seis elementos de fuera de la diagonal σ_{ij} $(i \neq j)$ nos dicen las seis fuerzas de cizalladura sobre los tres planos coordenados a través el punto de consideración.

El tensor de esfuerzos es simétrico

Los seis elementos de fuera de la diagonal σ_{ij} no son realmente independientes, porque son iguales por pares. Específicamente, el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\Sigma}$ es simétrico, de modo que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, como podemos probar ahora usando, una vez más, el argumento introducido al final de la Sección 16.5 para probar la isotropía de la presión en un fluido no viscoso. Esta vez consideraremos un pequeño prisma, cuyo eje está en la dirección z y cuya sección de paso es un cuadrado, paralelo al plano xy, como se muestra en la Figura 16.16. El momento angular del prisma alrededor de su eje cumple

$$\frac{dL_3}{dt} = \Gamma_3, \tag{16.67}$$

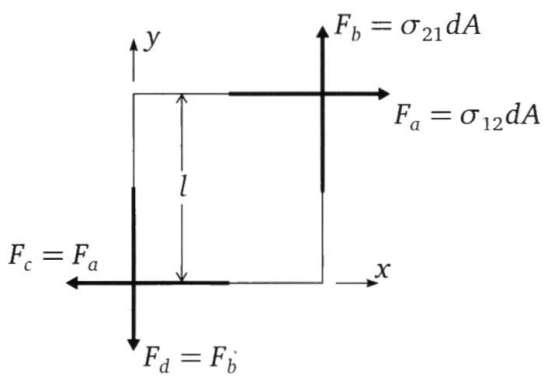


Figura 16.16. Vista de un prisma cuadrado con su eje paralelo al eje z. Las cuatro fuerzas que contribuyen a la rotación del prisma alrededor de su eje se muestran como F_a, F_b, F_c y F_d. Los finales del cuadrado tienen lado l y las cuatro caras que se ven aquí tienen área dA.

donde Γ_3 es la componente z del momento neto sobre el prisma. Las cuatro fuerzas (realmente componentes de fuerzas) que contribuyen a Γ_3 son las fuerzas de cizalladura mostradas en la figura como F_a, F_b, F_c y F_d. De (16.65), vemos que $F_a = \sigma_{12}\, dA$, mientras que $F_b = \sigma_{21}\, dA$. Las fuerzas F_c y F_d son iguales en magnitud a F_a y F_b, respectivamente, pero en las direcciones opuestas. Por consiguiente, el momento total Γ_3 es

$$\Gamma_3 = F_b l - F_a l = (\sigma_{21} - \sigma_{12}) l\, dA. \tag{16.68}$$

Usando el truco ya familiar, lo siguiente es reducir el prisma un factor λ en las tres direcciones. En (16.67) esta reducción multiplica Γ_3 por un factor de λ^3, pero L_3 por un factor de λ^4. Si dividimos por λ^3 y hacemos $\lambda \to 0$, vemos que Γ_3 debe ser de hecho cero. De acuerdo con (16.68), esto implica que $\sigma_{21} = \sigma_{12}$. Argumentos similares tienen en cuenta los demás elementos de fuera de la diagonal, y concluimos que

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{16.69}$$

para todos los i y j. Esto es, el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\Sigma}$ es simétrico.

Ejemplo 16.3 *El tensor de esfuerzos en un fluido estático*

Escribir el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\Sigma}$ para un fluido estático en un punto en el que la presión es p.

Sabemos que en un fluido estático no hay fuerzas de cizalladura y que, en cualquier punto dado, la presión es la misma en todas las direcciones. Por consiguiente, la fuerza de superficie sobre un elemento pequeño de superficie denotada por $d\mathbf{A}$ es justo

$$\mathbf{F}(d\mathbf{A}) = -p\, d\mathbf{A}$$

donde p es una constante (en un punto cualquiera del fluido), independiente de $d\mathbf{A}$. (El signo menos es porque $d\mathbf{A}$ apunta hacia arriba, mientras que la fuerza de presión es hacia dentro). Comparando esto con la definición (16.66) del tensor de esfuerzos, vemos que

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1} \tag{16.70}$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz unitaria (3×3). Este resultado maravillosamente simple expresa sutilmente que en un fluido estático (y también en un fluido en movimiento, siempre que la viscosidad sea despreciable) la única fuerza de superficie es la fuerza de la presión, que es normal a la superficie e independiente de la orientación de la superficie.[12]

[12] Este ejemplo sugiere una prueba alternativa elegante de la isotropía de la fuerza de presión. La ausencia de cualquier fuerza de cizalladura significa que $\boldsymbol{\Sigma}$ debe ser diagonal (todos los

Ejemplo 16.4 *Un ejemplo numérico de esfuerzos*

En un cierto punto P en un medio continuo el tensor de esfuerzos tienen el valor

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{16.71}$$

Un pequeño elemento de superficie en P tiene área dA y es paralelo al plano $x + y + z = 0$. ¿Cuál es la fuerza sobre este elemento de superficie y cuál es el ángulo entre esta fuerza y la normal al elemento de superficie? Para concretar, tomar P de modo que esté en el octante positivo (x, y, z todos positivos), y suponer que el exterior de la superficie es el lado que está lejos del origen.

Advertir primero que no he especificado las unidades de las componentes de $\boldsymbol{\Sigma}$, pero podrían por supuesto estar en las unidades de presión (fuerza/área). Si el medio fuera el agua en el fondo de un río podrían ser kilopascales; para una roca en la corteza terrestre, podrían ser megapascales.

La fuerza sobre el elemento de superficie está dada por (16.66) con $d\mathbf{A} = \mathbf{n}\, dA$, donde $\mathbf{n}$ es la unidad normal a la superficie. Nos dicen que la superficie es paralela al plano $x + y + z = 0$, así que[13]

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{16.72}$$

Por tanto la fuerza sobre el elemento de superficie es

$$\mathbf{F}(d\mathbf{A}) = dA\, \boldsymbol{\Sigma}\, \mathbf{n} = \frac{dA}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{16.73}$$

El ángulo θ entre la fuerza y la normal está dado por

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{F}|\cdot|\mathbf{n}|} = \frac{2/3}{\sqrt{2/3}\times 1} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Así que $\theta = \arccos(\sqrt{2/3}) = 35{,}3$. Ésta última ilustra el hecho obvio de que, en presencia de fuerzas de cizalladura, la fuerza sobre un elemento de superficie no es necesariamente normal a la superficie.

---

elementos de fuera de la diagonal iguales a cero) *con respecto a cualquier elección de ejes*. Es fácil mostrar que el único tensor con esta propiedad es un múltiplo de la matriz unitaria.

[13] Hay varias maneras de ver esto. Una sencilla es advertir que el plano está dado en la forma

16.8 El tensor de tensiones para un sólido

En la última sección vimos cómo el tensor de esfuerzos expresa las fuerzas de superficie dentro de un medio continuo, sólido, líquido o gas. Esta sección presenta una discusión correspondiente al tensor de tensiones como una descripción de los desplazamientos dentro del medio. Desafortunadamente, en este caso, el análisis de sólidos es bastante diferente del de fluidos, y por simplicidad me centraré en la discusión de sólidos.[14]

Para especificar la configuración de un sólido continuo debemos dar la posición de cada uno de sus muchos trozos constituyentes. Una manera conveniente de hacerlo es especificar que el volumen pequeño particular dV que estaba «originalmente» en la posición $\mathbf{r}$ está ahora en la posición $\mathbf{r}+\mathbf{u}(\mathbf{r})$. La posición «original» podría ser su posición de equilibrio o simplemente la posición en algún instante inicial conveniente t_0. De una manera o de otra, el vector $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ es el desplazamiento necesario para mover el trozo de su posición de referencia $\mathbf{r}$ hasta su posición actual.

A primera vista, se puede pensar que $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ sería una buena medida de la tensión del cuerpo, pero no es difícil ver que esto no es así. Considere por ejemplo, la posibilidad de que $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_0$ sea sólo una constante (independiente de $\mathbf{r}$). Tal desplazamiento simplemente mueve el cuerpo completo rígidamente a través del vector $\mathbf{u}_0$ y no requiere esfuerzos internos en absoluto. Los esfuerzos aparecen no tanto por desplazamiento del sólido como por *distorsión*, y las distorsiones requieren que partes diferentes del cuerpo sean desplazadas cantidades diferentes, como se ilustra en la Figura 16.17(b). La Figura 16.17(a) muestra una traslación rígida, con $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ el mismo para todo $\mathbf{r}$, así que la separación, $d\mathbf{r}$, de dos puntos vecinos cualesquiera permanece igual. En la parte (b), $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{u}(\mathbf{r}+d\mathbf{r})$ son distintos, y la separación de los dos puntos vecinos cambia de $d\mathbf{r}$ a $d\mathbf{r}+d\mathbf{u}$. El cambio $d\mathbf{u}$ en su separación se puede expresar en términos de las derivadas de $\mathbf{u}$ con respecto a $\mathbf{r}$:

$$du_i = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial r_j} dr_j \tag{16.74}$$

o, en notación matricial,

$$d\mathbf{u} = \mathbf{D}\, d\mathbf{r} \tag{16.75}$$

$f(x,y,z) =$ constante, y es un resultado estándar de cálculo vectorial que el vector ∇f es normal a una superficie de esta forma (vea el Problema 4.18). Por tanto, $\mathbf{n} = \pm\nabla f/|\nabla f|$. Como $\mathbf{n}$ debe apuntar lejos del origen, el signo más aplica, y es fácil comprobar que esto da el resultado (16.72).

[14] Es fácil ver que debe haber una gran diferencia entre sólidos y fluidos. Por ejemplo, un cambio en la forma de un sólido ciertamente constituye una tensión y normalmente entraña esfuerzos apreciables; pero un cambio de forma de un fluido (transferir leche desde una botella a un cuenco, por ejemplo) no constituye normalmente una tensión porque no requiere esfuerzos.

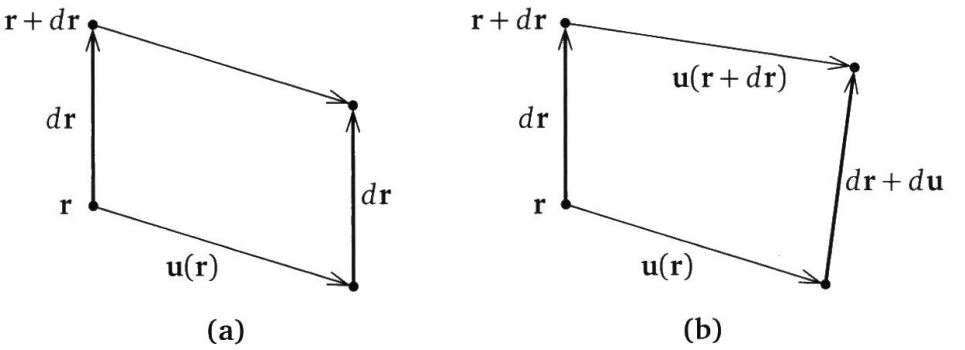


Figura 16.17. **(a)** En una traslación rígida, todos los puntos en el cuerpo son desplazados la misma cantidad. Es decir, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ es el mismo para todo $\mathbf{r}$, y la separación $d\mathbf{r}$ de dos puntos vecinos cualesquiera no cambia. **(b)** Cualquier deformación del cuerpo requiere que $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ varíe de punto a punto. Aquí los puntos $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ se desplazan cantidades distintas, y su separación cambia de $d\mathbf{r}$ a $d\mathbf{r}+d\mathbf{u}$.

donde $\mathbf{D}$ es la **matriz de derivadas** (o tensor de derivadas) formada por las derivadas parciales $\partial u_i/\partial r_j$:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial r_1 & \partial u_1/\partial r_2 & \partial u_1/\partial r_3 \\ \partial u_2/\partial r_1 & \partial u_2/\partial r_2 & \partial u_2/\partial r_3 \\ \partial u_3/\partial r_1 & \partial u_3/\partial r_2 & \partial u_3/\partial r_3 \end{bmatrix}. \tag{16.76}$$

Los elementos de la matriz de derivadas $\mathbf{D}$ nos dicen cómo de rápido varía el desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ a medida que nos movemos por el interior del sólido, y se puede suponer razonablemente que $\mathbf{D}$ sería una buena medida de la tensión. Lamentablemente hay una complicación más que discutir. Ya hemos advertido que una traslación rígida del sólido no debería contar como una tensión, y lo mismo es cierto de cualquier rotación rígida. Por consiguiente, debemos examinar qué forma tomaría $\mathbf{D}$ para una rotación rígida y entonces, para un desplazamiento arbitrario dado por $\mathbf{D}$, extraer de algún modo fuera de $\mathbf{D}$ esa parte que corresponde a una rotación rígida, para dejar algo que represente de verdad lo que queremos significar por tensión.

En lo que sigue estaremos interesados sólo en tensiones pequeñas (lo que significa que todas las derivadas en $\mathbf{D}$ son mucho menores que 1). Así que consideremos una rotación pequeña rígida que podemos denotar por un vector $\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{u}$, donde el vector unitario $\mathbf{u}$ identifica el eje de rotación y θ es el ángulo (pequeño) de rotación. No es difícil calcular el desplazamiento resultante de cualquier punto $\mathbf{r}$ comenzando desde el principio, pero podemos evitar algunos problemas recordando la ecuación (9.22), $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, para la velocidad de un punto $\mathbf{r}$ en un cuerpo rígido que rota con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Multiplicando ambos miembros por un tiempo pequeño dt, encontramos

que el desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ es[15]

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}\,dt = \boldsymbol{\omega}\,dt \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \tag{16.77}$$

porque $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}\,dt$. Si se escriben las componentes de esta ecuación y se diferencia, se puede comprobar fácilmente que $d\mathbf{u} = \mathbf{D}\,d\mathbf{r}$ como en (16.75) donde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{[cualquier rotación pequeña]}. \tag{16.78}$$

Es decir, para cualquier rotación pequeña dada por el vector $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ la matriz de derivadas está dada por la matriz antisimétrica (16.78). (Una matriz $\mathbf{M}$ es antisimétrica si $\tilde{\mathbf{M}} = -\mathbf{M}$). Recíprocamente, cualquier matriz antisimétrica tiene la forma (16.78), así que cualquier matriz antisimétrica (con todos sus elementos pequeños) es la matriz de derivadas para una rotación pequeña. Por tanto, si la matriz de derivadas (16.76) resulta ser antisimétrica, corresponde a una rotación y no se debería considerar una tensión. Para aprovechar el resultado del último párrafo, necesitamos usar un teorema elemental de la teoría de matrices, que cualquier matriz cuadrada $\mathbf{M}$ se puede escribir como la suma de dos matrices, una de las cuales es antisimétrica y la otra simétrica, como podemos verificar fácilmente de la siguiente obvia identidad:

$$\mathbf{M} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{M} - \tilde{\mathbf{M}}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{M} + \tilde{\mathbf{M}}). \tag{16.79}$$

Como la primera de ellas es claramente antisimétrica y la segunda simétrica, esto prueba el teorema mencionado. La matriz de derivadas, $\mathbf{D}$, de cualquier desplazamiento se puede descomponer de esta manera como

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{E}. \tag{16.80}$$

Aquí $\mathbf{A}$ es la parte antisimétrica de $\mathbf{D}$; representa una rotación rígida y no contribuye a la tensión. El segundo término $\mathbf{E}$ se denomina **tensor de tensiones**;[16] es la parte simétrica de $\mathbf{D}$,

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{D} + \tilde{\mathbf{D}}) \tag{16.81}$$

[15] Es importante que dt, y por tanto θ, sean pequeños. De otro modo, $\mathbf{v}$ cambiará apreciablemente durante la rotación.

[16] La terminología aquí es desesperadamente no uniforme. El «tensor de tensión» tiene muchas definiciones ligeramente diferentes y se denota por muchos símbolos diferentes. Casi lo mejor que se puede decir de la notación utilizada aquí es que al menos *algunos* otros autores también la utilizan.

donde **D** es la matriz de derivadas, como está definida en (16.76). El tensor de tensiones definido de esta manera es una buena medida de la tensión, tal como ilustran los dos siguientes ejemplos.

Ejemplo 16.5 *Dilatación*

El tensor de tensiones **E** en cierto punto P en un sólido es un múltiplo de la matriz unitaria,

$$\mathbf{E} = e\mathbf{1} \tag{16.82}$$

donde e es un número pequeño, positivo o negativo. Describir el desplazamiento de puntos en el entorno de P (que, por conveniencia, podemos tomar que sea el origen).

Como no estamos interesados en abarcar todos los desplazamientos rígidos o las rotaciones, podemos suponer también que el punto P no se mueve y que el entorno inmediato de P no está rotado. En este caso, la parte antisimétrica **A** de **D** en (16.80) es cero y $\mathbf{D} = \mathbf{E}$. De este modo un punto en la posición $d\mathbf{r}$ (relativa a P) se desplaza hasta $d\mathbf{r} + d\mathbf{u}$, como se ilustra en la Figura 16.18, donde $d\mathbf{u} = \mathbf{E}\,d\mathbf{r} = e\,d\mathbf{r}$. Es decir, el punto $d\mathbf{r}$ se desplaza hasta $(1 + e)d\mathbf{r}$. Como esta afirmación es independiente de la dirección de $d\mathbf{r}$, concluimos que la esfera completa de cualquier radio pequeño dr se amplía o dilata en todas las direcciones en un factor $1 + e$, y nos referimos a la tensión (16.82) como una **tensión esférica** o una **dilatación**. Si e es positivo, la esfera realmente se amplía; si e es negativo, se reduce.

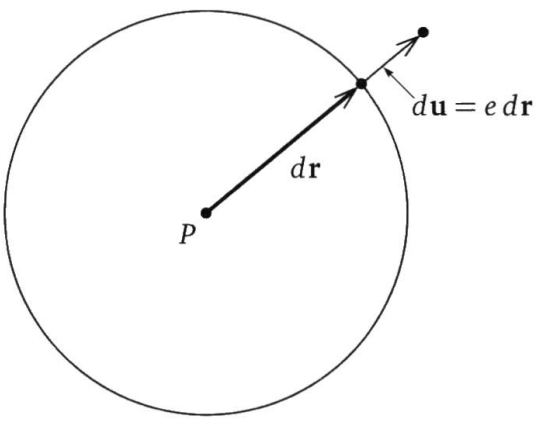


Figura 16.18. La tensión (16.82) desplaza el punto en $d\mathbf{r}$ radialmente hacia $(1 + e)d\mathbf{r}$. De este modo cualquier esfera centrada en P se *dilata* precisamente en un factor $1 + e$ en todas las direcciones.

Para que sirva de referencia, advierta que como cualquier volumen se estira en un factor $(1 + e)$ en las tres direcciones, los volúmenes se ven incrementados en un factor $(1 + e)^3 \approx 1 + 3e$. (Recuerde que $e \ll 1$). En otras palabras, la dilatación

$\mathbf{E} = e\mathbf{1}$ resulta en un aumento infinitesimal de $3e$ en cualquier volumen pequeño; esto es,

$$\frac{dV}{V} = 3e. \tag{16.83}$$

Ejemplo 16.6 *Una tensión de cizalladura*

El tensor de tensiones $\mathbf{E}$ en cierto punto P de un sólido tiene la forma

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16.84}$$

o, si denotamos los elementos de $\mathbf{E}$ por ϵ_{ij}, entonces $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \gamma$ mientras todos los demás ϵ_{ij} son cero. Describir el desplazamiento de puntos en el entorno de P (que de nuevo podemos tomar como el origen).

Como antes supondremos que no hay traslación total o rotación, así que $\mathbf{E}$ es la misma matriz de derivadas $\mathbf{D}$, cuyos únicos elementos distintos de cero son

$$\frac{\partial u_1}{\partial r_2} = \frac{\partial u_2}{\partial r_1} = \gamma.$$

Esto implica que si nos desplazamos a lo largo del eje r_2, la única componente de $\mathbf{u}$ que cambia es u_1. Por tanto, cualquier punto que esté sobre el eje r_2 es desplazado lateralmente, en la dirección r_1, como se muestra en la Figura 16.19. Análogamente, un punto que esté sobre el eje r_1 es desplazado hacia arriba en la dirección r_2. El efecto neto es una cizalladura en la cual los dos ejes están inclinados el uno al otro como se muestra en la figura. (Esto es si γ es positivo; si γ es negativo, se inclinan al revés). El ángulo que se inclinan ambos ejes es igual al parámetro γ, siempre que γ sea pequeño.

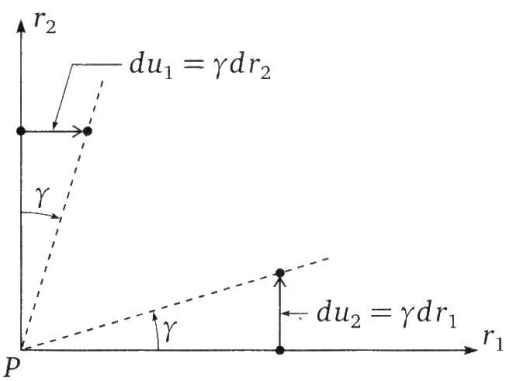


Figura 16.19. Bajo la tensión (16.84), los puntos que están sobre el eje r_2 se desplazan en la dirección r_1 y viceversa. El resultado es una cizalladura en la cual los dos ejes se inclinan como se muestra.

Vemos de este último ejemplo que los elementos de fuera de la diagonal ϵ_{ij} del tensor de tensiones están asociados con tensiones de cizalladura. De la misma manera, los elementos de la diagonal están asociados a estiramientos a lo largo de los ejes. Por ejemplo si ϵ_{11} es distinto de cero, entonces los puntos que están sobre el eje r_1 son desplazados por el eje (además de algún desplazamiento lateral), y el eje completo es estirado en un factor $1 + \epsilon_{11}$. Por esta razón, los tres elementos de la diagonal $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}$ y ϵ_{33} se pueden llamar **elementos de estiramiento** de **E**.

Descomposición del tensor general de tensiones

Los dos últimos ejemplos nos conducen a nuestra maniobra final con el tensor de tensiones. Hemos visto que si **E** es diagonal y sus elementos de la diagonal son iguales, $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = e$, de modo que $\mathbf{E} = e\mathbf{1}$, entonces la deformación correspondiente es la dilatación simple del Ejemplo 16.5. Incluso si un tensor de tensiones dado E no cumple estas condiciones, se puede adivinar que podríamos definir e como su estiramiento promedio, esto es, el promedio de los tres elementos de la diagonal,

$$e = \tfrac{1}{3}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \tag{16.85}$$

y que la dilatación simple $e\mathbf{1}$ tendría alguna relación útil con el tensor original **E**. Antes de mostrar que este es el caso, debería mencionar que, en la teoría de matrices, la suma de los elementos de la diagonal es un concepto importante denominado **traza** de la matriz. Es decir, para cualquier matriz $(n \times n)$ **M** con elementos m_{ij}, definimos su traza, tr **M**, como la suma

$$\operatorname{tr}\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} = m_{11} + \cdots + m_{nn}. \tag{16.86}$$

Por consiguiente, otra manera de enunciar la definición (16.85) del estiramiento promedio e de cualquier tensor de tensiones **E** es como 1/3 de la traza:

$$e = \tfrac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{E}. \tag{16.87}$$

La matriz $e\mathbf{1}$ es una dilatación pura, que naturalmente cambia el volumen de cualquier región pequeña alrededor del punto de interés, y se puede mostrar (Problema 16.24) que cambia el volumen la misma cantidad que la tensión original **E**. Por tanto, si escribimos

$$\mathbf{E} = e\mathbf{1} + \mathbf{E}' \tag{16.88}$$

hemos expresado **E** como la suma de dos tensiones separadas, la primera de las cuales es una dilatación pura que cambia volúmenes la misma cantidad que **E** y la segunda de las cuales da las mismas tensiones de cizalladura que **E** pero no ocasiona cambio de volúmenes. Podemos llamar al primer término, $e\mathbf{1}$, la **parte esférica** de

E. El segundo término, $\mathbf{E}' = \mathbf{E} - e\mathbf{1}$, se denomina a veces **desviador de tensión** o **parte desviadora** de **E**, presumiblemente porque es la cantidad que **E** se desvía de la dilatación pura correspondiente. Matemáticamente podemos caracterizar la descomposición (16.88) diciendo que el primer término es un múltiplo de la matriz unitaria con la misma traza que **E** y la segunda tiene traza cero. Veremos en la siguiente sección que esta descomposición de **E** juega un papel esencial en la relación entre tensión y esfuerzo.

Ejemplo 16.7 *Un ejemplo numérico de tensión*

El tensor de tensiones en cierto punto de un sólido se sabe que es

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}05 \\ 0{,}02 & 0{,}03 & 0{,}04 \\ 0{,}05 & 0{,}04 & 0{,}04 \end{bmatrix}. \tag{16.89}$$

Descomponer esta tensión como en (16.88) en sus partes esférica y desviadora.

El estiramiento promedio se averigua fácilmente, siendo $e = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\mathbf{E} = 0{,}02$ y $\mathbf{E}'$ se encuentra restando, como $\mathbf{E}' = \mathbf{E} - e\mathbf{1}$. Así que

$$e\,\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 0{,}02 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}02 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}02 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{E}' = \begin{bmatrix} -0{,}03 & 0{,}02 & 0{,}05 \\ 0{,}02 & 0{,}01 & 0{,}04 \\ 0{,}05 & 0{,}04 & 0{,}02 \end{bmatrix}. \tag{16.90}$$

Es fácil comprobar que el tensor de tensiones original **E** es de hecho igual a $e\mathbf{1} + \mathbf{E}'$. Advierta que la traza de $e\mathbf{1}$ es la misma que la de **E**, como debería ser, mientras que la traza de $\mathbf{E}'$ es cero.

16.9 Relación entre esfuerzo y tensión: la ley de Hooke

El paso final para escribir la ecuación del movimiento para un sólido continuo es hallar la relación entre los tensores de esfuerzo y de tensión, $\boldsymbol{\Sigma}$ y **E**. Esta relación, a veces denominada **ecuación constitutiva**, corresponde a la ley de Hooke para una masa sujeta a un muelle, que expresa la fuerza (o esfuerzo) en términos de la extensión (la tensión). Es razonable suponer que, al menos para pequeñas perturbaciones, la relación entre esfuerzo y tensión debería ser lineal, y esto es lo que supondré aquí. Existen ciertamente multitud de ejemplos de materiales que cumplen esta condición razonablemente bien (un trozo de goma o metal, o incluso una roca de la corteza terrestre). Cuando la relación requerida es lineal, se denomina *ley de Hooke generalizada*. Para simplificar la discusión todavía más (y esta es una enorme simplificación),

supondré que el sólido es isotrópico, lo cual implica que la relación entre $\boldsymbol{\Sigma}$ y $\mathbf{E}$ es independiente de nuestra elección de ejes, o rotacionalmente invariante.

Deseamos expresar el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\Sigma}$ como una función $\boldsymbol{\Sigma} = f(\mathbf{E})$ del tensor de tensiones $\mathbf{E}$. La función f debe ser lineal, y debe tener invariancia rotacional. La linealidad es una propiedad familiar. Tener invariancia rotacional significa lo siguiente: si R denota cualquier rotación de los ejes coordenados y $\mathbf{M}_R$ el resultado de rotar una matriz $\mathbf{M}$ por la rotación R, entonces debe ser cierto que

$$f(\mathbf{E}_R) = [f(\mathbf{E})]_R \tag{16.91}$$

para cualquier tensión $\mathbf{E}$ y cualquier rotación R. Esto es, el esfuerzo correspondiente a la tensión rotada $\mathbf{E}_R$ (primer miembro de la ecuación) debe ser el mismo que el resultado de rotar el esfuerzo correspondiente a $\mathbf{E}$ (segundo miembro de la ecuación). Ahora bien, hemos visto que cualquier tensor de tensiones se puede descomponer como la suma de sus partes esférica y desviadora:

$$\mathbf{E} = e\mathbf{1} + \mathbf{E}'. \tag{16.92}$$

Esta descomposición tiene dos propiedades importantes. Primera, tiene invariancia rotacional; esto es, cuando rotamos los ejes, cada parte rota separadamente en la parte correspondiente del tensor rotado. (La parte esférica de $\mathbf{E}$ rota en la parte esférica de $\mathbf{E}_R$, y asimismo la parte desviadora). Segunda, es imposible descomponer $\mathbf{E}$ más y retener esta propiedad.[17]

El resultado crucial, cuya demostración está desafortunadamente más allá del alcance de las matemáticas que estoy suponiendo aquí, es este: si $\boldsymbol{\Sigma} = f(\mathbf{E})$ donde la función f es lineal y tiene invariancia rotacional, y si $\mathbf{E}$ se descompone como en (16.92), entonces la forma más general posible de la función f es esta:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \alpha e\mathbf{1} + \beta\mathbf{E}' \tag{16.93}$$

donde α y β son dos constantes (que dependen del material del que esté hecho el sólido) y $e = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{E}$ como siempre.[18] La relación (16.93) se denomina **ley generali-**

[17] En lenguaje de teoría de grupos, las dos partes de (16.92) son irreducibles. Para una discusión de la teoría de grupos necesaria vea el Capítulo 10 de *Mathematics for Scientistsand Engineers* por Harold Cohen, Prentice Hall (1992) o el Capítulo 16 de *Mathematical Methods of Physics* por Jon Mathews y R. L. Walker, W. A. Benjamin (1970).

[18] En el marco de las representaciones de grupo, la prueba es asombrosamente simple: la función lineal f debe conmutar con todas las rotaciones. La descomposición (16.92) divide el espacio de todas las matrices simétricas en dos subespacios *irreducibles* (de dimensiones 1 y 5 respectivamente). Por el lema de Schur, la restricción de f a cualquiera de estos subespacios irreducibles

zada de Hooke, o simplemente **ley de Hooke**, y cualquier sólido que la cumpla se denomina **sólido elástico**. Muchas veces es conveniente reescribir la ley de Hooke (16.93) en términos de $\mathbf{E}$ (mejor que $\mathbf{E}' = \mathbf{E} - e\mathbf{1}$), para dar[19]

$$\boldsymbol{\Sigma} = (\alpha - \beta)e\mathbf{1} + \beta\mathbf{E} \tag{16.94}$$

Podemos resolver esto para $\mathbf{E}$ en términos de $\boldsymbol{\Sigma}$ en dos pasos. Tomando la traza de (16.93) vemos que $\operatorname{tr}\boldsymbol{\Sigma} = 3\alpha e$, de manera que $e = \operatorname{tr}\Sigma/3\alpha$. Sustituyendo en (16.94) encontramos que

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3\alpha\beta}[3\alpha\boldsymbol{\Sigma}(\alpha - \beta)({}^{\mathrm{T}}\Sigma)\mathbf{1}]. \tag{16.95}$$

Como se podría adivinar, las constantes α y β están relacionadas con el módulo de elasticidad introducido al final de la Sección 16.6 [Ecuaciones (16.55) hasta (16.57)]. Comencemos con el módulo de compresibilidad.

Módulo de compresibilidad

Imaginemos un sólido sometido sólo a una presión isotrópica, p (no esfuerzos de cizalladura). En este caso sabemos que el tensor de esfuerzos tiene la forma sencilla $\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1}$. Sustituyendo esto en la ley de Hooke (16.95) encontramos que

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\alpha\beta}[-\alpha + (\alpha - \beta)]p\mathbf{1} = -\frac{p}{\alpha}\mathbf{1}. \tag{16.96}$$

Esto es, el tensor de esfuerzos $\mathbf{E}$ es también un múltiplo de la matriz unitaria, que podríamos reescribir como $\mathbf{E} = e\mathbf{1}$, con $e = -p/\alpha$. Pero sabemos de (16.83) que $e = \frac{1}{3}dV/V$. Comparando estas dos expresiones para e, concluimos que $p = -\frac{1}{3}\alpha\, dV/V$, y comparando ésta con la definición (16.56) del módulo de compresibilidad, vemos que

$$\alpha = 3\,\mathrm{MCo}. \tag{16.97}$$

---

puede ser como mucho la multiplicación por un escalar (que podemos llamar α o β) y hemos probado (16.93).

[19] Esta ecuación se escribe a menudo como $\boldsymbol{\Sigma} = 3\lambda e\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{E}$, en cuyo caso λ y μ se denominan **constantes de Lamé**.

Módulo de cizalladura

Consideremos ahora la tensión de cizalladura simple **E** dada en(16.84) del Ejemplo 16.6 e ilustrada en la Figura 16.19. Como tiene traza cero, $e = 0$, y la ley de Hooke (16.94) se reduce a la forma simple

$$\mathbf{\Sigma} = \beta \mathbf{E}.$$

En particular, la tensión responsable de la cizalladura es

$$\frac{F}{A} = \sigma_{12} = \beta \epsilon_{12} = \beta \gamma. \tag{16.98}$$

Necesitamos compararla con la definición (16.57) del módulo de cizalladura. Lamentablemente, (16.57) se refiere a la tensión de la Figura 16.13, que no es del todo la misma que la de la Figura 16.19. Específicamente, en la Figura 16.19 ambos ejes se inclinan hacia dentro un ángulo γ, mientras que en la Figura 16.13 el eje x gira un ángulo θ mientras que el eje y permanece inalterado. Una pequeña reflexión nos debería convencer de que el desplazamiento de la Figura 16.13 es una combinación de una cizalladura simple, como en la Figura 16.19, seguida de una rotación para traer el eje y de nuevo a su dirección original. Esto significa que el ángulo θ de la Figura 16.13 es igual a dos veces el ángulo γ de la Figura 16.19, $\theta = 2\gamma$. Poniendo esto en la definición (16.57) del módulo de cizalladura, encontramos que

$$\frac{F}{A} = \mathrm{MCi}\,\frac{dy}{dx} = \mathrm{MCi}\,\theta = 2\,\mathrm{MCi}\,\gamma,$$

y comparando con (16.98), concluimos que la constante β es justo dos veces el módulo de cizalladura,

$$\beta = 2\,\mathrm{MCi}. \tag{16.99}$$

Módulo de Young

Podemos análogamente identificar el módulo de Young en términos de las constantes α y β, pero dejaré esto como ejercicio (Problema 16.27). El resultado es que

$$\mathrm{MY} = \frac{3\alpha\beta}{2\alpha + \beta} = \frac{9\,\mathrm{MCo}\cdot\mathrm{MCi}}{3\,\mathrm{MCo} + \mathrm{MCi}} \tag{16.100}$$

donde la última expresión resulta de sustituir (16.97) por α y (16.99) por β. Una característica interesante de este resultado es que muestra que sólo dos de los tres módulos elásticos son independientes. Por ejemplo, si conocemos MCo y MCi podemos calcular MY. (Vea el Problema 16.26).

16.10 La ecuación del movimiento para un sólido elástico

Consideremos un volumen infinitesimal dV de un sólido elástico. Su masa es $\varrho\, dV$, donde ϱ es su densidad, y su posición es $\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, donde $\mathbf{r}$ es su posición de equilibrio y $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ es su desplazamiento desde el equilibrio. [El desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ depende de $\mathbf{r}$ y t, pero la posición de equilibrio $\mathbf{r}$ de cualquier trozo dado del sólido es fija e independiente de t]. La segunda ley de Newton aplicada a este volumen establece que

$$\varrho\, dV \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{F}_{\text{vol}} + \mathbf{F}_{\text{sup}} \tag{16.101}$$

donde $\mathbf{F}_{\text{vol}}$ denota la fuerza de volumen y $\mathbf{F}_{\text{sup}}$ la fuerza de superficie neta sobre dV. La fuerza de volumen es proporcional a dV, y para concretar, supondré que es sólo la fuerza de gravedad, así que

$$\mathbf{F}_{\text{vol}} = \varrho\, g\, dV. \tag{16.102}$$

Sabemos que la fuerza de superficie sobre un elemento pequeño cualquiera de la superficie o el volumen es $\boldsymbol{\Sigma} d\mathbf{A}$, donde como siempre $\boldsymbol{\Sigma}$ es el tensor de tensiones 3×3 y $d\mathbf{A}$ es el vector que denota el elemento de superficie (considerado como un vector columna 3×1 en el producto matricial). Por consiguiente, la fuerza de superficie neta es

$$\mathbf{F}_{\text{sup}} = \int \boldsymbol{\Sigma}\, d\mathbf{A} \tag{16.103}$$

donde la integral se evalúa sobre la superficie cerrada del volumen bajo consideración. Para realizar esta integral de una forma más conveniente necesitamos usar el teorema de la divergencia. Este teorema fue introducido en el Capítulo 13 sobre mecánica hamiltoniana, pero en caso de no haber leído aquel capítulo repasaré las ideas principales aquí. (Para más detalles, vea la Sección 13.7 y los Problemas 13.31 a 13.34). El teorema de la divergencia afirma que cualquier integral de superficie de la forma $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$ sobre una superficie cerrada S es igual a cierta integral de volumen, a saber

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}\, dV. \tag{16.104}$$

Aquí $\mathbf{v}$ es cualquier vector, V es el volumen encerrado por la superficie S, y $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}$ es la **divergencia** de $\mathbf{v}$,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \sum_{j=1}^{3} \partial_j v_j \tag{16.105}$$

donde he introducido la abreviación conveniente

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial r_j}.$$

Reescrito en términos de componentes, el teorema de la divergencia (16.104) dice

$$\int \sum_j v_j dA_j = \int \sum_j \partial_j v_j \, dV, \tag{16.106}$$

y la componente i-ésima de la fuerza de superficie (16.103) es

$$(\mathbf{F}_{\text{sup}})_i = \int \sum_j \sigma_{ij} \, dA_j. \tag{16.107}$$

Para cada valor fijo de i (1, 2 o 3), esto tiene la forma del primer miembro de (16.106), así que puede sustituirse por un término con la forma del segundo miembro,

$$(\mathbf{F}_{\text{sup}})_i = \int \sum_j \partial_j \sigma_{ij} \, dV. \tag{16.108}$$

Podemos escribir esta expresión en una forma vectorial más compacta si introducimos un vector $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Sigma}$ definido de modo que su componente i-ésima sea[20]

$$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Sigma})_i = \sum_{j=1}^{3} \partial_j \sigma_{ji}. \tag{16.109}$$

Observe bien que como $\boldsymbol{\nabla}$ es un operador vectorial mientras que $\boldsymbol{\Sigma}$ es un tensor, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Sigma}$ es un vector. Armados con esta notación podemos escribir (16.108) como

$$\mathbf{F}_{\text{sup}} = \int \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Sigma} \, dV. \tag{16.110}$$

Este resultado es válido para la fuerza de superficie sobre cualquier volumen, pequeño o grande. Sin embargo, nuestro interés es en un volumen infinitesimal dV. Para un volumen suficientemente pequeño, el integrando es constante y el resultado se convierte justo en

$$\mathbf{F}_{\text{sup}} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Sigma} \, dV \tag{16.111}$$

para cualquier volumen pequeño dV.

---

[20] Para un tensor arbitrario $\mathbf{M}$, los elementos m_{ij} y m_{ji} no son necesariamente los mismos, y debemos tener cuidado con el orden de los índices i y j. Por suerte $\boldsymbol{\Sigma}$ es simétrica, así que no importa en qué orden los escribamos dentro.

Volvamos ahora a la ecuación del movimiento (16.101) y sustituyamos (16.102) para $\mathbf{F}_{\text{vol}}$ y (16.111) para $\mathbf{F}_{\text{sup}}$. Cuando hacemos esto, cada término adquiere un factor de dV, que podemos cancelar para obtener

$$\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \varrho \mathbf{g} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Sigma}. \tag{16.112}$$

Esta importante ecuación es fácil de entender. El primer miembro representa el $m\mathbf{a}$ de $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. En el segundo miembro, el primer término representa la fuerza de la gravedad (o más generalmente la fuerza del cuerpo), y el segundo la fuerza de superficie.

Antes de que podamos usar esta ecuación del movimiento, debemos utilizar la ley de Hooke para sustituir el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\Sigma}$ por el tensor de tensiones $\mathbf{E}$. En la forma (16.94), la ley de Hooke establece que

$$\boldsymbol{\Sigma} = (\alpha - \beta)e\mathbf{1} + \beta\mathbf{E} \tag{16.113}$$

o, en términos de sus componentes,

$$\sigma_{ji} = (\alpha - \beta)e\delta_{ji} + \beta\epsilon_{ji} \tag{16.114}$$

donde δ_{ji} denota el **símbolo de la delta de Kronecker**

$$\delta_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \tag{16.115}$$

Como $\epsilon_{ji} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$, el estiramiento promedio e es

$$e = \tfrac{1}{3}\sum_i \epsilon_{ii} = \tfrac{1}{3}\sum_i \partial_i u_i = \tfrac{1}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}.$$

Poniendo estos resultados en (16.114), encontramos que

$$\sigma_{ji} = \tfrac{1}{3}(\alpha - \beta)\delta_{ji}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + \tfrac{1}{2}\beta(\partial_i u_j + \partial_j u_i).$$

Esto nos permite evaluar $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Sigma}$ para usarla en (16.112):

$$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Sigma})_i = \sum_j \partial_j \sigma_{ji} = \tfrac{1}{3}(\alpha - \beta)\sum_j \delta_{ji}\partial_j(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + \tfrac{1}{2}\beta\sum_j \partial_j\partial_i u_j + \tfrac{1}{2}\beta\sum_j \partial_j\partial_j u_i.$$

Cada uno de los términos en este feo resultado se simplifica. En el primer término, advierta que $\sum_j \delta_{ji}\partial_j = \partial_i$. En el segundo término, $\sum_j \partial_j\partial_i u_j = \partial_i \sum_j \partial_j u_j = \partial_i \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}$, y en el tercero, $\sum_j \partial_j\partial_j = \boldsymbol{\nabla}^2$. Por tanto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Sigma} &= \tfrac{1}{3}(\alpha - \beta)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + \tfrac{1}{2}\beta\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + \tfrac{1}{2}\beta\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} \\ &= (\tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{1}{6}\beta)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + \tfrac{1}{2}\beta\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} \\ &= (\mathrm{MCo} + \tfrac{1}{3}\mathrm{MCi})\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + \mathrm{MCi}\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} \end{aligned} \tag{16.116}$$

donde en la última línea he usado (16.97) y (16.99) para reescribir α y β en términos de los módulos de compresibilidad y de cizalladura, MCo y MCi.

Finalmente estamos preparados para escribir la ecuación del movimiento de un sólido elástico de una forma utilizable. Sustituyendo (16.116) en (16.112), vemos que

$$\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \varrho \mathbf{g} + (\mathrm{MCo} + \tfrac{1}{3}\mathrm{MCi})\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + \mathrm{MCi}\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u}. \tag{16.117}$$

En la siguiente sección usaremos esta ecuación, a menudo denominada **ecuación de Navier** (por el ingeniero francés Claude Navier, 1785–1836), para deducir los dos tipos de onda en un sólido elástico.

16.11 Ondas longitudinales y transversales en un sólido

Es bien conocido que existen dos tipos principales de onda en un sólido elástico (longitudinales y transversales). Para mostrarlo, examinaremos la ecuación de Navier (16.117). Supondremos que la gravedad no es importante y haremos $\mathbf{g} = 0$. (Esta es normalmente una excelente aproximación, excepto para el caso de oscilaciones libres muy lentas —$\tau \gtrsim 200$ s— de la Tierra, para las que la gravedad es importante). Sin perder generalidad, buscaremos una onda plana que se propaga en la dirección x (esto es, r_1), de modo que $\mathbf{u}$ dependa sólo de x y t.

Examinemos primero la posibilidad de una perturbación longitudinal, para la cual el desplazamiento $\mathbf{u}$ tendría la dirección de la propagación,

$$\mathbf{u} = [u_x(x,t), 0, 0].$$

En este caso, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = \partial u_x/\partial x$ y la única componente distinta de cero de $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u})$ es su componente x, que es $\partial^2 u_x/\partial x^2$. La única componente distinta de cero de $\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u}$ es también la componente x, que también es igual a $\partial^2 u_x/\partial x^2$. Poniendo todo esto junto en la ecuación del movimiento (16.117), obtenemos

$$\varrho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (\mathrm{MCo} + \tfrac{4}{3}\mathrm{MCi})\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}. \tag{16.118}$$

Esta es la ecuación de ondas, con velocidad de onda

$$c_{\mathrm{long}} = \sqrt{\frac{\mathrm{MCo} + \frac{4}{3}\mathrm{MCi}}{\varrho}}. \tag{16.119}$$

Concluimos que las ondas longitudinales son de hecho posibles, con velocidad c_{long} dada por (16.119).

Si en vez de ello buscamos una onda transversal (o de corte o cizalladura), que viaja en la dirección x pero con el desplazamiento en la dirección y, entonces $\mathbf{u}$ tendría la forma

$$\mathbf{u} = [0, u_y(x,t), 0].$$

En ese caso $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, mientras que $\nabla^2 \mathbf{u}$ tiene sólo una componente y igual a $\partial^2 u_y / \partial x^2$, así que (16.117) se convierte en

$$\varrho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \text{MCi} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}.$$

Esta es la ecuación de ondas, con velocidad de onda

$$c_{\text{tran}} = \sqrt{\frac{\text{MCi}}{\varrho}} \tag{16.120}$$

y concluimos que las ondas transversales son posibles, con velocidad c_{tran} dada por (16.120).

Advierta que $c_{\text{long}} > c_{\text{tran}}$. Por tanto, si de alguna fuente salen simultáneamente señales longitudinales y transversales, las primeras llegarán primero a un detector lejano. Por ejemplo, es bien sabido en ciencias de la Tierra que las ondas longitudinales de un terremoto lejano llegan antes que las transversales, y esto proporciona a los sismólogos una manera de medir lo lejos que está un terremoto o una explosión. Por esta razón, las ondas longitudinales también se llaman **primarias** u **ondas P** y las transversales **secundarias** u **ondas S**.

Ejemplo 16.8 *Ondas en una roca*

El módulo de elasticidad del material de la corteza terrestre varía, pero los valores representativos serían MCo $\approx$ 40 GPa y MCi $\approx$ 25 GPa. (Éstos son dos valores aproximados para el granito, cuya densidad está en torno a $2{,}7 \times 10^3$ kg/m^3. 1 GPa = 10^9 Pa = 10^9N/m^2). ¿Cuál sería la velocidad de las ondas sísmicas longitudinales y transversales en una roca con estos valores?

De acuerdo con (16.119), la velocidad longitudinal es

$$c_{\text{long}} = \sqrt{\frac{(40 + \frac{4}{3} \times 25) \times 10^9 \text{ N/m}^2}{2{,}7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}} \approx 5{,}25 \text{ km/s}.$$

Análogamente, de (16.120) encontramos que la velocidad transversal es

$$c_{\text{tran}} = \sqrt{\frac{25 \times 10^9 \text{ N/m}^2}{2{,}7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}} \approx 3{,}0 \text{ km/s}.$$

Una característica llamativa de la fórmula (16.120) para la velocidad de ondas transversales es que si el módulo de cizalladura MCi es cero (como sucede en los fluidos) entonces c_{tran} es cero. Esto sugiere (correctamente) que los fluidos no pueden soportar ondas transversales.[21] Una aplicación bonita de este resultado es que las ondas sísmicas transversales (al contrario que las longitudinales) no se propagan a través del centro de la Tierra, lo que demuestra que alguna región cerca del centro de la Tierra (a saber, el núcleo exterior) está constituida por un líquido.

16.12 Fluidos: descripción del movimiento*

* *Como siempre, las secciones marcadas con un asterisco pueden ser omitidas en una primera lectura*

En las últimas cuatro secciones nos hemos centrado principalmente en el movimiento de medios continuos *sólidos*. En las dos secciones finales de este capítulo me gustaría dar una breve introducción al movimiento de fluidos. Desafortunadamente, el análisis de un fluido general (particularmente un fluido viscoso) es complicado, y, para evitar que este capítulo se haga excesivamente largo, me restringiré principalmente a fluidos **no viscosos** o **ideales**, es decir, fluidos cuya viscosidad es despreciable. Uno puede argumentar que despreciar la viscosidad es como «tirar al bebé junto con el agua del baño», pero lo cierto es que existen muchos problemas de movimiento de fluidos en los que *es* razonable despreciar la viscosidad, y, más importante, todas las herramientas necesarias para discutir fluidos no viscosos se necesitan para el análisis de fluidos viscosos, así que la discusión aquí es realmente una versión preliminar esencial para cualquier estudio posterior de fluidos viscosos. Aún más, varias ideas discutidas aquí (la derivada convectiva y la ecuación de continuidad, en particular) son igualmente aplicables a cualquiera de los dos casos.

Descripción material frente a la espacial

Hasta ahora hemos analizado lo que sucede en un medio continuo especificando que el trozo de material que estaba originariamente en la posición $\mathbf{r}$ está ahora en la posición $\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Este enfoque se denomina a veces **descripción material**, porque se centra en un trozo particular del material. Resulta que al analizar los fluidos es muchas veces más conveniente *no* seguir los trozos individuales del fluido, sino más bien

[21] Por supuesto este argumento no es del todo correcto porque nuestra deducción de (16.120) suponía un medio sólido. Sin embargo, la conclusión sugerida es correcta, y correcta esencialmente por una buena razón: las ondas transversales requieren una fuerza restauradora transversal (corte), que un fluido no puede aportar.

especificar qué está pasando en cada punto fijo del espacio. Por consiguiente podríamos dar la velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, la densidad $\varrho(\mathbf{r}, t)$, y así, del fluido en cada punto fijo $\mathbf{r}$ (y el tiempo t). Este enfoque se denomina frecuentemente **descripción espacial.**[22]

Algunas ventajas del punto de vista espacial al discutir un fluido son razonablemente obvias: con un sólido, cada trozo material del sólido normalmente tiene una posición de equilibrio bien definida $\mathbf{r}$, y ésta es la que usamos para etiquetar a cada trozo [dando el desplazamiento del trozo $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ de $\mathbf{r}$]. En un fluido, los trozos del mismo no tienen generalmente una única posición de equilibrio. Podríamos, por supuesto usar la posición inicial del trozo como referencia, pero en un problema de flujo de fluido, los trozos normalmente se desplazan muy lejos de sus posiciones iniciales. Por consiguiente, al discutir un fluido, habitualmente es más conveniente centrarse simplemente en lo que está pasando en cada punto fijo en el espacio (la descripción espacial).

La derivada material

La principal desventaja de la descripción espacial aparece más claramente cuando intentamos usar la segunda ley de Newton. La aceleración $\mathbf{a}$ en $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ es, por supuesto, la aceleración de cualquier porción pequeña de fluido. Desafortunadamente, si $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ es la velocidad del fluido en un punto $\mathbf{r}$, entonces $\mathbf{a}$ no es exactamente $\partial\mathbf{v}/\partial t$. La derivada parcial $\partial\mathbf{v}/\partial t$ es la tasa de variación de la velocidad del fluido *en el punto fijo* $\mathbf{r}$, mientras que la aceleración que queremos es la tasa de variación de $\mathbf{v}$ *de una porción dada de fluido a medida que se mueve*. Esta misma distinción se aplica a cualquier otro parámetro y es, quizá, más fácil de visualizar en el caso de un escalar, tal como la densidad o la temperatura. Consideremos, por ejemplo, la densidad de un pequeño elemento del fluido. Si en un instante t el elemento está en la posición $\mathbf{r}$, entonces la densidad requerida es $\varrho(\mathbf{r}, t)$. Pero un instante inmediatamente después dt, el elemento se habrá movido a una nueva posición $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, donde $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,d\mathbf{t}$, así que la densidad es ahora $\varrho(\mathbf{r}+d\mathbf{r}, t+dt)$. (Observe con atención cómo, si deseamos seguir el elemento material, debemos evaluar la nueva densidad en el nuevo tiempo $t + dt$ y *también* la nueva posición $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$). Por tanto, la variación en la densidad del volumen es

$$d\varrho = \varrho(\mathbf{r}+d\mathbf{r}, t+dt) - \varrho(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial\varrho}{\partial t}dt + d\mathbf{r}\cdot\nabla\varrho$$
$$= \frac{\partial\varrho}{\partial t}dt + (\mathbf{v}dt)\cdot\nabla\varrho.$$

[22] Las descripciones material y espacial se denominan con frecuencia descripciones *lagrangiana* y *euleriana*, respectivamente; nombres que no son ni históricamente precisos (ambas se deben a Euler) ni especialmente fáciles de recordar.

Dividiendo ambos miembros por dt encontramos para la derivada temporal de ϱ

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varrho. \tag{16.121}$$

Esta derivada se denomina **derivada material** porque da la tasa de variación de ϱ cuando seguimos el movimiento de una porción material del fluido.[23]

Podemos aplicar un argumento similar para otros parámetros del fluido. Por ejemplo, dp/dt (definidos exactamente de la misma manera) sería la tasa de variación de la presión a medida que seguimos el movimiento de un elemento material de fluido. En particular, podemos examinar cada componente de la velocidad del fluido y poniendo las tres componentes juntas llegar a

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}. \tag{16.122}$$

Esta derivada es, por supuesto, la aceleración del elemento de volumen del fluido. Armados con este resultado, estamos preparados para escribir la ecuación del movimiento para un fluido no viscoso.

Ecuación del movimiento para un fluido no viscoso

Consideremos ahora un pequeño elemento de volumen dV de fluido con masa $\varrho\, dV$ y aceleración dada por (16.122). La segunda ley de Newton implica que

$$\varrho\, dV \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{vol}} + \mathbf{F}_{\text{sup}}. \tag{16.123}$$

Supondré que la única fuerza de volumen es la gravedad, de modo que $\mathbf{F}_{\text{vol}} = \varrho\, dV\mathbf{g}$, donde $\mathbf{g}$ es la aceleración de la gravedad. Sabemos de (16.111) que la fuerza de superficie es $\mathbf{F}_{\text{sup}} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Sigma} dV$ Y de (16.70) que $\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1}$. (Esta última fue descrita para un fluido estático, pero el argumento sólo necesitaba que la viscosidad fuera despreciable). Para evaluar $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Sigma}$, tomaremos las componentes:

$$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Sigma})_i = \sum_j \partial_j \sigma_{ji} = -\sum_j \partial_j (p\delta_{ji}) = -\partial_i p.$$

Por tanto, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Sigma} = -\boldsymbol{\nabla}p$. Poniendo todos estos resultados juntos en (16.123), vemos que cada término contiene un factor de dV, y, cancelando este factor, llegamos a la

[23] Otros nombres para la derivada material son *total* o *derivada convectiva*. Algunos autores usan el símbolo D/Dt (en lugar de d/dt) para enfatizar el carácter especial de esta derivada.

ecuación del movimiento para un fluido no viscoso,

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varrho \mathbf{g} - \nabla p. \tag{16.124}$$

El teorema de Bernoulli

Como una primera aplicación sencilla de la ecuación del movimiento (16.124), deduzcamos un resultado familiar de la mayoría de los cursos de introducción a la física, el teorema de Bernoulli. Este teorema se suele enunciar para el caso del flujo regular de un fluido incompresible no viscoso, y este es el caso que consideraré aquí. Que el flujo sea regular significa que los parámetros $p, \mathbf{v}$ y ϱ en cualquier punto fijo $\mathbf{r}$ son constantes; esto es, las derivadas parciales $\partial p/\partial t$ y siguientes son todas cero. Que el fluido sea incompresible significa que la densidad no cambia, $d\varrho/dt = 0$. (Advierta que en el caso de la densidad, tanto $\partial\varrho/\partial t$ como $d\varrho/dt$ son cero). Consideraré el caso en que $\mathbf{g}$ es uniforme y en la dirección z negativa, así que podemos escribir $\mathbf{g} = -\nabla(gz)$.[24] Hagamos esta sustitución en (16.124), y después multipliquemos escalarmente la ecuación completa por $\mathbf{v}$. Esto da

$$\varrho \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \varrho \mathbf{v} \cdot \nabla(gz) + \mathbf{v} \cdot \nabla p = 0. \tag{16.125}$$

Podemos simplificar los tres términos de esta ecuación. Para el primer término, advierta que $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/dt = \frac{1}{2} d(v^2)/dt$. Para el segundo y el tercer términos, advierta que $\mathbf{v} \cdot \nabla f = df/dt - \partial f/\partial t$, para cualquier función f. Para las funciones de interés aquí, $\partial f/\partial t = 0$, así que $\mathbf{v} \cdot \nabla f = df/dt$. Con estas sustituciones, (16.125) se convierte en

$$\frac{1}{2}\varrho \frac{dv^2}{dt} + \varrho \frac{d(gz)}{dt} + \frac{dp}{dt} = 0. \tag{16.126}$$

Finalmente, como $d\varrho/dt = 0$, podemos introducir los factores de ϱ dentro de las derivadas y encontramos que

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g z + p\right) = 0. \tag{16.127}$$

Esto afirma que la cantidad $\Psi = \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g z + p$ es constante cuando nos movemos con cualquier elemento material del fluido. En otras palabras, Ψ es constante

[24] Incluso si $\mathbf{g}$ no es uniforme, es ciertamente conservativa, así que siempre podemos introducir una función Φ (denominada potencial gravitatorio) tal que $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$. Para evitar introducir símbolos desconocidos, he decidido tratar el caso común en que $\Phi = gz$.

a lo largo de cualquier línea de flujo, que es precisamente el contenido del teorema de Bernoulli para cualquier flujo estable, incompresible y no viscoso. Puesto que el término $\frac{1}{2}\varrho v^2$ aparece con la presión p en el teorema de Bernoulli Ψ y se asocia al movimiento, $\frac{1}{2}\varrho v^2$ a veces se le llama *presión dinámica*.

La ecuación de continuidad

La conservación de la masa implica una relación importante, denominada ecuación de continuidad, entre la densidad y la velocidad de cualquier fluido, viscoso o no viscoso. Si se ha realizado algún curso de electromagnetismo, se puede haber estudiado la relación correspondiente que refleja la conservación de la carga. Para probar esta relación, consideremos un pequeño volumen dV de fluido. A medida que este volumen se desplaza, su masa ϱdV no puede cambiar. Por tanto,

$$\frac{d}{dt}(\varrho\, dV) = dV\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\frac{d}{dt}(dV) = 0. \tag{16.128}$$

La tasa de variación de un volumen en movimiento fue evaluado en la ecuación (13.59) de la Sección 13.7. (Si no se leyó el Capítulo 13, se podría leer sólo la demostración de este resultado, comenzando en la subsección «Volúmenes cambiantes» en la página 602). Para cualquier volumen V (pequeño o grande) el resultado es

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\, dV.$$

Para un volumen infinitesimal dV, esto se reduce a

$$\frac{d}{dt}(dV) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\, dV.$$

Insertando esto en (16.128) y cancelando el factor común de dV, llegamos a la **ecuación de continuidad**,

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{16.129}$$

o de forma equivalente (vea el Problema 16.34)

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varrho\mathbf{v}) = 0. \tag{16.130}$$

Esta relación juega un papel crucial en la dinámica de fluidos, así como la relación correspondiente (con ϱ reemplazado por la densidad de carga) en electrodinámica.

Lo utilizaremos en la siguiente sección para deducir la velocidad del sonido en un fluido.

16.13 Ondas en un fluido*

* *Como siempre, las secciones marcadas con un asterisco pueden ser omitidas en una primera lectura*

Armados con las ecuaciones de movimiento y continuidad, podemos discutir ahora la posibilidad de ondas en un fluido no viscoso. Imaginamos un fluido que sufre una pequeña perturbación desde el equilibrio, de modo que adquiere una pequeña velocidad (presumiblemente oscilatoria) $\mathbf{v}$ y su presión y densidad se hacen

$$p = p_0 + p' \tag{16.131}$$

y

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho'. \tag{16.132}$$

Aquí p_0 y ϱ_0 son los valores de equilibrio, y p' y ϱ' son pequeños incrementos. Advierta primero que en equilibrio, la ecuación del movimiento (16.124) implica simplemente que

$$\varrho_0 g - \nabla p_0 = 0. \tag{16.133}$$

Para la situación real, insertamos (16.131) y (16.132) en la ecuación del movimiento para obtener

$$(\varrho_0 + \varrho')\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = (\varrho_0 + \varrho')\mathbf{g} - \nabla(p_0 + p').$$

Esta horrible ecuación se simplifica. Primero, por la condición de equilibrio (16.133), el primer y el tercer términos se cancelan mutuamente. Segundo, por la suposición de que la perturbación es pequeña, podemos quitar cualquier término que sea de segundo orden o mayor en las pequeñas cantidades v, ϱ' o p', o sus derivadas. Por consiguiente podemos ignorar el término $\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$, y de la misma manera los términos del primer miembro que incluyen ϱ'. Y nos quedamos al final con

$$\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \varrho'\mathbf{g} - \nabla p'. \tag{16.134}$$

Finalmente, no es difícil de mostrar (Problema 16.38) dando valores realistas que el término $\varrho'\mathbf{g}$ del segundo miembro es despreciable comparado con $\nabla p'$. De modo que la ecuación del movimiento para la pequeña perturbación es simplemente

$$\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p'. \tag{16.135}$$

Podemos tratar la ecuación de continuidad (16.130) de una manera similar. Insertando (16.131) y (16.132), obtenemos (como el lector debería comprobar)

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} = -\varrho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \varrho_0. \tag{16.136}$$

Esencialmente por las mismas razones que el primer término del segundo miembro de (16.134) era despreciable, el último término aquí se puede despreciar (vea el Problema 16.38 de nuevo), así que la ecuación de continuidad se convierte en

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} = -\varrho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}. \tag{16.137}$$

Las ecuaciones del movimiento (16.135) y continuidad (16.137) proporcionan dos ecuaciones para las tres variables $\mathbf{v}, p'$ y ϱ'. Obtenemos una tercera ecuación si miramos la definición (16.56) del módulo de compresibilidad, $p = \text{MCo}(-dV/V)$. Como ya se ha dicho, esta expresión relaciona la presión con la correspondiente variación de volumen, pero también se aplica igualmente a la *variación* de la presión, en cuyo caso se leería $dp = \text{MCo}(-dV/V)$. (Por un momento, denominaremos V al volumen que nos interesa, de manera que dV pueda ser su incremento). Ahora bien, la masa de un elemento de fluido dado no puede cambiar, de manera que la cantidad ϱV debe ser constante. Por tanto $\varrho\, dV + V d\varrho = 0$, o $dV/V = -d\varrho/\varrho$. Combinando estos dos resultados vemos que

$$dp = \text{MCo}\frac{d\varrho}{\varrho}. \tag{16.138}$$

Ahora, en nuestro caso, la variación de presión dp es lo que hemos estado llamando p'. De la misma manera, $d\varrho$ es lo que hemos estado llamando ϱ', y la densidad original es ϱ_0. Por tanto, en nuestra formulación actual

$$p' = \text{MCo}\frac{\varrho'}{\varrho_0}. \tag{16.139}$$

Podemos usar este mismo resultado para eliminar ϱ' de la ecuación de continuidad (16.137) para obtener

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -\text{MCo}\,\nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Si la derivamos con respecto a t e invocamos la ecuación del movimiento (16.135), obtenemos

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\mathrm{MCo}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mathrm{MCo}}{\varrho_0}\boldsymbol{\nabla}^2 p'$$

donde en la segunda expresión he intercambiado el orden de las derivadas espaciales y temporales, y en la tercera he usado la ecuación del movimiento (16.135). Este resultado es la ecuación de ondas tridimensional con velocidad de onda

$$c = \sqrt{\frac{\mathrm{MCo}}{\varrho_0}}. \tag{16.140}$$

Enseguida demostraré que las ondas en un fluido son necesariamente longitudinales. Ya que las ondas longitudinales de un medio continuo son lo que generalmente llamamos ondas de sonido, acabamos de demostrar que la velocidad del sonido en un fluido es $c = \sqrt{\mathrm{MCo}/\varrho_0}$.

Ejemplo 16.9 *La velocidad del sonido en el agua*

Dado que el módulo de compresibilidad del agua es 2,2 GPa, ¿cuál es la velocidad del sonido en el agua?

La densidad del agua es, por supuesto, 1000 kg/m^3, de manera que la velocidad del sonido de (16.140) es

$$c = \sqrt{\frac{\mathrm{MCo}}{\varrho_0}} = \sqrt{\frac{2{,}2\times 10^9\ \mathrm{N/m^2}}{10^3\ \mathrm{kg/m^3}}} = 1{,}5\ \mathrm{km/s}.$$

Para demostrar que las ondas en un fluido son longitudinales, imaginemos una onda que viaja en la dirección de un vector unitario $\mathbf{n}$, de manera que

$$p' = f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct). \tag{16.141}$$

Según la ecuación del movimiento (16.135), esto implica que

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0}\boldsymbol{\nabla} p' = -\frac{1}{\varrho_0}\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct) = -\frac{\mathbf{n}}{\varrho_0} f'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct)$$

donde f' denota la derivada de f respecto a su argumento. Esta relación puede integrarse, de manera inmediata, para dar la velocidad del fluido:[25]

[25] En la tercera expresión, he omitido una constante de integración. Esta «constante» podría depender de $\mathbf{r}$ (aunque desde luego no de t) y podría, de hecho, ser distinta de cero. Por ejemplo, podríamos imaginar una perturbación que incluyese una velocidad uniforme constante superpues-

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{n}}{\varrho_0}\int f'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct)\,dt = \frac{\mathbf{n}}{c\varrho_0} f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct) = \frac{p'\mathbf{n}}{c\varrho_0}. \tag{16.142}$$

(Si no comprende la integración, intente el cambio de variables $\xi = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct$). Este resultado tiene dos características importantes. En primer lugar, podemos observar que la velocidad del fluido es proporcional a la presión p'. En concreto, en una onda sinusoidal, la velocidad oscilará en fase con p'. En segundo lugar, la velocidad del fluido va en la dirección de la propagación; esto es, la onda es longitudinal. Como ya anticipamos en la Sección 16.11, un fluido no puede soportar ondas transversales.

Principales definiciones y ecuaciones del Capítulo 16

La ecuación de la onda unidimensional

La **ecuación de una onda unidimensional** es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad \text{[Ec. (16.4)]}$$

La solución general es

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \qquad \text{[Ec. (16.10)]}$$

cuyo primer término representa una perturbación que viaja hacia la derecha y el segundo una que viaja hacia la izquierda.

La ecuación de una onda tridimensional

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p. \qquad \text{[Ec. (16.39)]}$$

Esfuerzo, tensión y módulo de elasticidad

$$\text{esfuerzo} = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}}, \quad \text{tensión} = \text{deformación infinitesimal.} \qquad \text{[Ec. (16.58) y (16.59)]}$$

$$\text{módulo de elasticidad (MY, MCo, MCi)} = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{tensión correspondiente}}. \qquad \text{[Ec. (16.60)]}$$

Tensor de esfuerzos

El **tensor de esfuerzos** es una matriz 3×3 simétrica $\boldsymbol{\Sigma}$ definida de tal manera que la fuerza de superficie sobre una pequeña parte del área $d\mathbf{A}$ es

$$\mathbf{F}(d\mathbf{A}) = \boldsymbol{\Sigma}\, d\mathbf{A}. \qquad \text{[Ec. (16. 66)]}$$

---

ta en el movimiento de una onda oscilatoria. Sin embargo, una velocidad tan independiente del tiempo no forma parte de lo que describiríamos como la onda, así que podemos considerar que es cero en nuestra discusión sobre el movimiento de una onda.

Tensor de esfuerzos para un sólido

Si $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ denota el desplazamiento de un elemento de sólido desde su posición original $\mathbf{r}$, el **tensor de fuerza** es una matriz simétrica 3×3 $\mathbf{E}$ con elementos

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right) \qquad \text{[Ec. (16.81)]}$$

que pueden descomponerse en la suma de dos términos:

$$\mathbf{E} = e\mathbf{1} + \mathbf{E}' \qquad \text{[Ec. (16.88)]}$$

donde $e = \frac{1}{3}\text{tr}\mathbf{E}$.

Ley de Hooke generalizada

Para un sólido isotrópico, la relación más general entre los tensores de esfuerzo y tensiones

$$\boldsymbol{\Sigma} = \alpha e\mathbf{1} + \beta\mathbf{E}' \qquad \text{[Ec. (16.93)]}$$

donde las constantes α y β pueden relacionarse con el módulo de elasticidad.

Ec. (16.97), (16.99) y (16.100)

Ecuación del movimiento para un sólido elástico

La ecuación del movimiento para un sólido elástico isotrópico es la **ecuación de Navier**:

$$\varrho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = \varrho\mathbf{g} + (\text{MCo} + \frac{1}{3}\text{MCi})\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + \text{MCi}\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u}. \qquad \text{[Ec. (16.117)]}$$

Ondas en un sólido

Las velocidades de las ondas **longitudinales** (**primarias** o **P**) y de las ondas **transversales** (**de cizalladura**, **secundarias** o **S**) son

$$c_{\text{long}} = \sqrt{\frac{\text{MCo} + \frac{4}{3}\text{MCi}}{\varrho}} \quad \text{y} \quad c_{\text{tran}} = \sqrt{\frac{\text{MCi}}{\varrho}}. \qquad \text{[Ecs. (16.119) y (16.120)]}$$

Derivada material en un fluido

La tasa temporal de variación de un parámetro ξ (la densidad, temperatura o velocidad) a medida que seguimos un elemento material de un fluido en movimiento es la **derivada material**

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\xi. \qquad \text{[Ec. (16.121)]}$$

Ecuación del movimiento para un fluido no viscoso

$$\varrho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varrho\mathbf{g} - \boldsymbol{\nabla}p. \qquad \text{[Ec. (16.124)]}$$

Ecuación de continuidad

La conservación de la masa implica la **ecuación de continuidad**:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla\cdot(\varrho \mathbf{v}) = 0. \qquad \text{[Ec. (16.130)]}$$

Ondas en un fluido

La velocidad de las ondas longitudinales en un fluido es

$$c = \sqrt{\frac{\mathrm{MCo}}{\varrho_o}} \qquad \text{[Ec. (16.140)]}$$

pero un fluido no puede soportar ondas transversales.

Problemas para el Capítulo 16

Los asteriscos indican el nivel aproximado de dificultad, desde los más fáciles (⋆) hasta los más difíciles (⋆ ⋆ ⋆).

Sección 16.1 Movimiento de una cuerda tensada

16.1 ⋆ Verificar que la cantidad $c = \sqrt{T/\mu}$ que aparece en la ecuación de ondas para una cuerda tiene de hecho unidades de velocidad.

16.2 ⋆ ⋆ La ecuación de ondas (16.4) es la ecuación del movimiento para una cuerda continua, como se ilustra en la Figura 16.1(a). Se puede obtener esta ecuación como el límite cuando $n \to \infty$ de las ecuaciones para las n masas discretas de la Figura 16.1(b). Es necesario tener cuidado con el proceso de pasar al límite. Cuando $n \to \infty$, el espaciado b entre las masas (vea la Figura 16.20), y las masas individuales m deben tender ambos a cero, de tal manera que la densidad lineal de masa m/b se aproxima a μ, la densidad de la cuerda continua. Se puede garantizar esto tomando $m = \mu b$. Escribir la segunda ley de Newton para la posición u_i de la masa i-ésima y mostrar que se convierte en la ecuación de ondas cuando $b \to 0$.

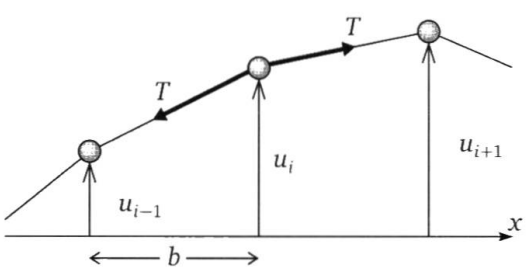


Figura 16.20. Problema 16.2

Sección 16.2 La ecuación de ondas

16.3 ⋆ Sea $f(\xi)$ una función arbitraria (dos veces diferenciable). Mostrar por sustitución directa que $f(x-ct)$ es una solución de la ecuación de ondas (16.4).

16.4 ⋆ Mostrar que si hacemos el cambio de variables $\xi = x - ct$ y $\eta = x + ct$, entonces, como en (16.7),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4c^2 \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

16.5 ⋆ **(a)** Mostrar que $u = g(x+ct)$ es una solución de la ecuación de ondas (16.4) para cualquier función dos veces diferenciable $g(\xi)$. **(b)** Argumentar claramente que esta solución representa una perturbación que viaja sin distorsionarse hacia la izquierda.

16.6 ⋆ Hay un pequeño defecto en el Ejemplo 16.1 (página 757). En la ecuación (16.14) omití una constante de integración, así que la ecuación realmente debería haberse escrito $f(x) - g(x) = k$. Mostrar que ésta proporciona la misma respuesta final (16.15).

16.7 ⋆⋆ [Ordenador] Hacer gráficas de las dos ondas triangulares del Ejemplo 16.1 (página 757) para varios instantes de tiempo espaciados a intervalos cortos y después animar estas imágenes. Describir el movimiento. Para los propósitos de la representación se puede también tomar la velocidad c, la altura del triángulo en el instante 0, y la media anchura de la base todas iguales a 1. Hacer gráficas para muchos tiempos en el intervalo desde $t = -4$ hasta 4.

16.8 ⋆⋆ [Ordenador] Hacer gráficas similares a la Figura 16.5 de la onda estacionaria (16.18) para varios instantes igualmente espaciados desde $t = 0$ hasta τ, el período. Tomar $2A = 1$ y $k = \omega = 2\pi$. Animar las imágenes y describir el movimiento.

Sección 16.3 Condiciones de contorno; ondas en una cuerda finita

16.9 ⋆⋆ El movimiento de una cuerda finita, fija en ambos extremos, estaba determinado por la ecuación de ondas (16.19) y las condiciones de contorno (16.20). Resolvimos estas ecuaciones buscando una solución que fuera sinusoidal en el tiempo. Una aproximación distinta, y bastante más general, a problemas de este tipo se denomina **separación de variables**. En este enfoque, buscamos soluciones de (16.20) de la forma *separada* $u(x,t) = X(x)T(t)$, esto es, soluciones que son un producto simple de una función de x y una segunda de t. [Como siempre, no hay nada que nos impida intentar encontrar una solución de esta forma. De hecho, hay un gran conjunto de problemas (incluido este mismo) en los que se sabe que este método produce soluciones, y suficientes soluciones como para permitir el desarrollo de *cualquier* solución]. **(a)** Sustituir esta forma en (16.19) y mostrar que se puede reescribir la ecuación en la forma $T''(t)/T(t) = X''(x)/X(x)$. **(b)** Argumentar que esta última ecuación requiere que ambos miembros de esta ecuación sean separadamente iguales a una misma constante (llamarla K). Se puede demostrar que K tiene que ser negativa.[26] Usar esto para mostrar que la función $T(t)$ tiene que ser sinusoidal (lo que establece que (16.21) y volvemos a la solución de la Sección 16.3. El método de separación de variables juega un papel importante en varias áreas, notablemente en mecánica cuántica y electromagnetismo.

16.10 ⋆⋆ Usando la integral (16.33), mostrar que los coeficientes de Fourier de la onda triangular de la Figura 16.7 con cero para n par y están dados por (16.34) para n impar.

16.11 ⋆⋆ [Ordenador] Hacer gráficas similares a la Figura 16.8 de la onda del Ejemplo 16.2 pero desde $t = 0$ hasta τ, el período, y para instantes menos espaciados. Animar las imágenes y describir el movimiento.

16.12 ⋆⋆ Considerar una cuerda semiinfinita, fija en el origen $x = 0$ y que se extiende lejos hacia la derecha. Sea $f(\xi)$ una función que está localizada alrededor del origen, tal como la función de la Figura 16.4(a). **(a)** Describir la onda dada por la función $f(x + ct)$ para un tiempo negativo grande t_0. **(b)** Una manera de resolver para el movimiento posterior de esta onda en la cuerda semiinfinita se denomina **método de las imágenes** y es como sigue. Considerar la función $u = f(x + ct) - f(-x + ct)$. (El segundo término aquí se denomina la «imagen». ¿Puede el lector explicar por qué?) Obviamente esto cumple la ecuación de ondas para todos los x y t. Mostrar que coincide con la onda dada de la parte (a) en el instante inicial t_0 y en todas partes en la cuerda semiinfinita. Mostrar también que cumple la condición de contorno de que $u = 0$ en $x = 0$. **(c)** Es un hecho que hay una única onda que cumple la ecuación de ondas y cualesquiera condiciones

[26] Realmente esto no es difícil de demostrar. Observar la ecuación $X''(x)/X(x) = K$. Se puede mostrar que si $K > 0$ no hay soluciones que cumplan las condiciones de contorno $X(0) = X(L) = 0$.

iniciales y de contorno. Por tanto la onda de la parte (b) es *la* solución para todos los instantes (en la cuerda semiinfinita). Describir el movimiento de la cuerda semiinfinita para todos los instantes.

16.13 ⋆⋆ En relación con la ecuación (16.31), afirmé que *cualquier* función en el intervalo $0 \leq x \leq L$ se puede desarrollar en una serie de Fourier que contiene sólo funciones seno. Esto es a primera vista muy sorprendente porque uno está acostumbrado a la afirmación de que la serie de Fourier general requiere senos *y* cosenos. En este problema se demostrará esta sorprendente afirmación. Sea $f(x)$ cualquier función definida para $0 \leq x \leq L$. Podemos definir una función $f(x)$ para *todo* x haciéndola igual a la función dada en el intervalo original e imponiendo que

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{y} \qquad f(x+2L) = f(x), \tag{16.143}$$

para todo x. Probar que esto define una función que es (1) periódica con período $2L$, (2) impar, y (3) la misma que la original $f(x)$ en el intervalo original. Escribir el desarrollo de Fourier ordinario para esta nueva $f(x)$ y mostrar que los coeficientes de los términos en coseno son todos cero. Esto establece la posibilidad de desarrollar la función original en términos de solamente senos.[27] Teniendo esto en mente, que el período de la nueva función es $2L$, escribir la fórmula estándar (5.84) para los coeficientes del desarrollo y mostrar que la respuesta concuerda con (16.33). La serie de Fourier en senos es especialmente conveniente para discutir funciones que son cero en los puntos finales $x = 0$ y L.

16.14 ⋆⋆⋆ [Ordenador] Una cuerda tensada de longitud $L = 1$ se libera desde el reposo en $t = 0$, con posición inicial

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x & [0 \leq x \leq \frac{1}{2}] \\ 2(1-x) & [\frac{1}{2} \leq x \leq 1]. \end{cases} \tag{16.144}$$

Tomar la velocidad de onda de la cuerda como $c = 1$. **(a)** Esbozar esta forma inicial y encontrar los coeficientes B_n de su serie de Fourier de senos (16.31). **(b)** Hacer gráficas de la suma de varios de los primeros términos para algunos instantes espaciados a intervalos cortos de tiempo entre $t = 0$ y τ, el período. Animar las gráficas y describir el movimiento.

Sección 16.4 La ecuación de ondas tridimensional

16.15 ⋆⋆ Sea $f(\xi)$ cualquier función con primeras dos derviadas $f'(\xi)$ y $f''(\xi)$, y sea $\mathbf{n}$ un vector unitario arbitrario. **(a)** Mostrar que $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct) = \mathbf{n} f'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct)$. **(b)** Con ello mostrar que $f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct)$ cumple la ecuación de ondas tridimensional (16.38). **(c)** Argumentar que $f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct)$ representa una señal que es constante en cualquier plano perpendicular a $\mathbf{n}$ (en un instante fijo cualquiera t) y se propaga rígidamente con velocidad c en la dirección de $\mathbf{n}$.

16.16 ⋆⋆ Sea $f(\mathbf{r})$ una función esférica simétrica cualquiera: esto es, cuando se expresa en coordenadas polares esféricas, (r, θ, ϕ), tiene la forma $f(\mathbf{r}) = f(r)$, independiente de θ y ϕ. **(a)** Comenzando desde la definición (16.38) de $\boldsymbol{\nabla}^2$, probar que

$$\boldsymbol{\nabla}^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf).$$

(b) Probar el mismo resultado usando la fórmula que aparece en la contracubierta trasera para $\boldsymbol{\nabla}^2$ en coordenadas polares esféricas. (Obviamente, esta segunda prueba es mucho más simple, pero el trabajo duro está escondido en la deducción de la fórmula para $\boldsymbol{\nabla}^2$).

---

[27] Pero advertir que tiene la forma $\sum B_n \operatorname{sen}(n\pi x/L)$. La serie de Fourier típica tiene senos y cosenos, pero su argumento es $2n\pi x/L$. Por consiguiente la nueva serie de Fourier tiene que estar formada, en un sentido, por muchos términos para poder tener sólo senos.

Sección 16.6 Esfuerzo y tensión: el módulo de elasticidad

16.17 ⋆⋆ En la Sección 16.1 deducimos la ecuación de ondas para ondas transversales en una cuerda tensa. Aquí se examinará la posibilidad de ondas longitudinales en la misma cuerda. Suponer que un elemento de cuerda cuya posición de equilibrio es x se desplazada una corta distancia en la dirección x hasta $x + u(x,t)$. **(a)** Considerar un trozo pequeño de cuerda de longitud l y después usar la definición (16.55) del módulo de Young MY para mostrar que la tensión es $F = A\text{MY}\,\partial u/\partial x$, donde A es el área de paso de la cuerda. [Si la cuerda está ya tensa en su posición de equilibrio, esta F es la tensión *adicional*, es decir, $F =$ (real − equilibrio)]. **(b)** Ahora considerar las fuerzas sobre una sección corta de cuerda dx y mostrar que u cumplen la ecuación de ondas con velocidad de onda $c = \sqrt{\text{MY}/\varrho}$ donde ϱ es la densidad (masa/volumen) de la cuerda.

Sección 16.7 El tensor de esfuerzos

16.18 ⋆ La Figura 16.15 es una vista de un prisma triangular, cuyas tres caras están etiquetadas por los vectores $d\mathbf{A}_1$, etc. (La magnitud de $d\mathbf{A}_1$ es el área de la superficie correspondiente y la dirección es normal a ella. Hay otras dos caras más paralelas al plano del papel, pero éstas no nos interesan). Los finales de las tres caras forman un triángulo cerrado. Explicar claramente por qué esto implica que $d\mathbf{A}_1 + d\mathbf{A}_2 + d\mathbf{A}_3 = 0$.

16.19 ⋆ Sean $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ dos vectores unitarios cualesquiera y P un punto en un medio continuo. $\mathbf{F}(\mathbf{n}_1\,dA)$ es la fuerza de superficie sobre un área pequeña dA en P con normal unitaria hacia fuera $\mathbf{n}_1$, así que $\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{F}(\mathbf{n}_1\,dA)$ es la componente de esta fuerza en la dirección de $\mathbf{n}_2$. Probar el *teorema recíproco de Cauchy*, que dice que $\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{F}(\mathbf{n}_1\,dA) = \mathbf{n}_1\cdot\mathbf{F}(\mathbf{n}_2\,dA)$.

16.20 ⋆⋆ Se halla que el tensor de esfuerzos en cualquier punto (x,y,z) en cierto medio continuo tiene la forma (con una elección de unidades conveniente no especificada)

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} xz & z^2 & 0 \\ z^2 & 0 & -y \\ 0 & -y & 0 \end{bmatrix}. \tag{16.145}$$

Encontrar la fuerza de superficie sobre un área pequeña dA de la superficie $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ en el punto $(1,1,1)$.

16.21 ⋆⋆ En cualquier punto dado P de un medio continuo, las fuerzas están dadas por el tensor de esfuerzos, que es una matriz real simétrica $\boldsymbol{\Sigma}$. Es un teorema bien conocido del álgebra lineal (vea el Apéndice) que cualquier matriz como la mencionada se puede llevar a una forma diagonal mediante una rotación adecuada de los ejes de coordenadas cartesianas. Usar este hecho para probar que en cualquier punto P hay tres direcciones ortogonales (los **ejes principales de esfuerzo** en P) con la propiedad de que la fuerza de superficie sobre cualquier superficie normal a una de esas direcciones es exactamente normal a la superficie.

16.22 ⋆⋆⋆ Mostrar que si el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\Sigma}$ es diagonal (todos los elementos de fuera de la diagonal son cero) con respecto a *cualquier* elección de ejes ortogonales, entonces es de hecho un múltiplo de la matriz unitaria. Esto da una prueba alternativa y elegante de que si no hay esfuerzos de cizalladura (en cualquier sistema de coordenadas) entonces las fuerzas de presión son independientes de la dirección. Para hacer este problema se necesita saber cómo se transforman los elementos de un tensor cuando rotamos los ejes coordenados, como se describe en la Sección 15.17. Suponer que con respecto a un conjunto de ejes $\boldsymbol{\Sigma}$ es diagonal pero que no todos los tres elementos diagonales son iguales. (Por ejemplo, $\sigma_{11} \neq \sigma_{33}$). No es difícil dar con una rotación (la de la ecuación (15.37) servirá) tal que en el sistema rotado $\sigma'_{13} \neq 0$.

Sección 16.8 El tensor de tensiones para un sólido

16.23 ⋆ Una importante herramienta en el desarrollo del tensor de tensiones fue la descomposición (16.79) de una matriz $\mathbf{M}$ en sus partes simétrica y antisimétrica. Probar que esta descom-

posición es única. Esto es, mostrar que si $\mathbf{M} = \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_S$ donde $\mathbf{M}_A$ y $\mathbf{M}_S$ son respectivamente antisimétrica y simétrica, entonces $\mathbf{M}_A = \frac{1}{2}(\mathbf{M} - \tilde{\mathbf{M}})$ y $\mathbf{M}_S = \frac{1}{2}(\mathbf{M} + \tilde{\mathbf{M}})$.

16.24 ⋆ Escribir las componentes del desplazamiento (16.77), $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$, para una pequeña rotación $\boldsymbol{\theta}$ y verificar que la matriz de las derivadas está dada por la ecuación (16.78).

16.25 ⋆ ⋆ ⋆ En cierto punto P (que se puede elegir que sea el origen) en un sólido continuo, la tensión es $\mathbf{E}$. Supongamos por simplicidad que no importa qué desplazamientos hayan ocurrido, han dejado P fijo y el entorno de P sin rotar. **(a)** Mostrar que el eje x cerca de P está estirado un factor $(1+\epsilon_{11})$. **(b)** Con ello mostrar que cualquier volumen pequeño alrededor de P ha cambiado $dV/V =^{\mathrm{T}} \mathbf{E}$. Esto muestra que cualesquiera dos tensiones que tienen la misma traza dilatan volúmenes la misma cantidad. En la descomposición $\mathbf{E} = e\mathbf{1} + \mathbf{E}'$ (16.88), la parte esférica $e\mathbf{1}$ cambia volúmenes la misma cantidad que la misma $\mathbf{E}$, mientras que la parte desviadora $\mathbf{E}'$ no cambia volúmenes en absoluto.

Sección 16.9 Relación entre esfuerzo y tensión: ley de Hooke

16.26 ⋆ La tabla inferior da los tres módulos elásticos para varios materiales. De acuerdo con (16.100) el módulo de Young para cualquier material dado se puede calcular si conocemos los módulos de compresibilidad y cizalladura. Usando los datos para MCo y MCi, calcular MY para cada uno de los materiales y comparar con los valores dados en la tercera columna. (Las densidades se necesitarán para el Problema 16.32).

Módulos elásticos (en GPa) y densidades (en g/cm^3)

Material	MCo	MCi	MY	ϱ
Hierro	90	40	100	7,8
Acero	140	80	200	7,8
Arenisca	17	6	16	1,9
Perovskita	270	150	390	4,1
Agua	2,2	0	0	1,0

16.27 ⋆ ⋆ ⋆ Considerar un cable tenso que está apoyado sobre el eje x. Para definir el módulo de Young MY aplicamos una tensión pura a lo largo del eje; esto es, un esfuerzo con $\sigma_{11} > 0$ y todos los demás $\sigma_{ij} = 0$. **(a)** Usar la ecuación (16.95) para escribir el tensor de tensiones correspondiente $\mathbf{E}$. **(b)** Argumentar de la definición (16.55) del módulo de Young para mostrar que $\mathrm{MY} = \sigma_{11}/\epsilon_{11}$. **(c)** Combinar estos dos resultados para verificar la expresión (16.100) para MY, mostrando en particular que $\mathrm{MY} = 9\,\mathrm{MCo}\cdot\mathrm{MCi}/(3\,\mathrm{MCo} + \mathrm{MCi})$.

16.28 ⋆⋆⋆ Considerar de nuevo el cable del Problema 16.27. En general, cuando uno estira el cable longitudinalmente se contraerá en las direcciones transversales. La razón entre la contracción transversal y el estiramiento longitudinal se denomina **razón o coeficiente de Poisson** (debido al matemático francés y estudiante de Laplace y Lagrange, 1781–1840) y está denotada por la letra griega «nu», ν. **(a)** Mostrar que $\nu = -\epsilon_{22}/\epsilon_{11}$. **(b)** Usar el método del Problema 16.27 para mostrar que $\nu = (3\,\mathrm{MCo} - 2\,\mathrm{MCi})/(6\,\mathrm{MCo} + 2\,\mathrm{MCi})$. **(c)** Calcular el coeficiente de Poisson para los cinco materiales listados en el Problema 16.26. Comentar sobre su valor para materiales con $\mathrm{MCo} \gg \mathrm{MCi}$.

16.29 ⋆⋆⋆ Cuando cambiamos los ejes coordenados, el tensor de tensiones cambia de acuerdo con la ecuación (15.132), que podemos reescribir como $\mathbf{E}_R = \mathbf{R}\mathbf{E}\tilde{\mathbf{R}}$, donde $\mathbf{R}$ es la matriz de rotación ortogonal (3×3). Usar la propiedad (15.129) de matrices ortogonales para mostrar que $\mathrm{tr}\,\mathbf{E}_R = \mathrm{tr}\,\mathbf{E}$; esto es, la traza de cualquier tensor tiene invariancia rotacional. Usar este resultado para mostrar que la descomposición $\mathbf{E} = e\mathbf{1} + \mathbf{E}'$ tiene invariancia rotacional, en el sentido descrito debajo de la ecuación (16.92).

Sección 16.10 La ecuación del movimiento para un sólido elástico

16.30 ⋆ Si δ_{ji} denota el símbolo de la delta de Kronecker (16.115) y **a** es un vector con componentes $a_j (j = 1, 2, 3)$, probar que $\sum_j \delta_{ji} a_j = a_i$. De la misma manera, mostrar que $\sum_j \delta_{ji} \partial_j = \partial_i$, un resultado que utilizamos al probar la importante identidad (16.116).

Sección 16.11 Ondas longitudinales y transversales en un sólido

16.31 ⋆ Un sismógrafo registra las señales que llegan desde un terremoto lejano. Si las ondas S llegan 12 minutos después que las ondas P, ¿a qué distancia está el terremoto? Usar las velocidades halladas en el Ejemplo 16.8 (página 797).

16.32 ⋆ [Ordenador] Utilizando programas informáticos adecuados, calcular las velocidades de las ondas longitudinales y transversales en los cinco materiales listados en el Problema 16.26. Preparar los programas para conseguir una buena tabla legible de valores.

Sección 16.12 Fluidos: descripción del movimiento

16.33 ⋆ Escribir la ecuación del movimiento (16.124) aplicada a un fluido *estático*. Suponiendo que **g** es uniforme y ϱ es constante (independiente de **r**), probar el resultado bien conocido de introducción a la física de que la diferencia de presiones entre dos puntos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ es justo $\Delta p = \varrho g h$, donde h es la diferencia vertical en elevaciones de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$.

16.34 ⋆⋆ Las ecuaciones (16.129) y (16.130) son dos formas diferentes de la ecuación de continuidad. Demostrar que son equivalentes.

Sección 16.13 Ondas en un fluido

16.35 ⋆ Un paso crucial en mostrar que las ondas en un fluido son necesariamente longitudinales fue la integral en (16.142). Para una función arbitraria $f(\xi)$, con derivada $f'(\xi)$, probar que $\int f'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct)dt = -f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - ct)/c$.

16.36 ⋆⋆ Hallar la velocidad del sonido en el aire usando el resultado (16.140) requiere un poco de cuidado. (¡Incluso el gran Newton se equivocó!) El problema es decidir sobre el valor correcto del módulo de compresibilidad del aire. Debido a que las vibraciones son tan rápidas, no hay tiempo para la transferencia de calor y el aire se expande y contrae *adiabáticamente*, así que $pV^\gamma =$ constante, donde γ es la famosa «razón de calores específicos», $\gamma = 1{,}4$ para el aire. **(a)** Mostrar que el módulo de compresibilidad es $\mathrm{MCo} = \gamma p$. **(b)** Usar la ley de gases ideales, $pV = nRT$ para mostrar que la densidad es $\varrho_0 = pM/RT$, donde M es la masa molecular media del aire ($M \approx 29$ gramos/mol). **(c)** Poner juntos estos resultados para mostrar que la velocidad del sonido es $c = \sqrt{\gamma RT/M}$. Hallar la velocidad del sonido a 0 °C, y comparar con el valor aceptado de 331 m/s.

16.37 ⋆⋆ Mostrar que la intensidad I de una onda de sonido es proporcional al cuadrado del incremento de presión p'. Para hacerlo considerar una pequeña porción de fluido normal a la dirección de propagación con área dA. Escribir la razón que tiene esta porción en el fluido, después dividir por dA para mostrar que $I = p'^2/c\varrho_0$.

16.38 ⋆⋆⋆ Un paso crucial en la deducción de la ecuación de ondas para ondas en un fluido fue despreciar el primer término del segundo miembro en la ecuación (16.134). **(a)** Justificarlo usando (16.139) para reescribir el segundo miembro de (16.125) como $\varrho'\mathbf{g} - \mathrm{MCo}\nabla\varrho'/\varrho_0$. Argumentar que la razón entre el primero y el segundo términos es del orden de $g\varrho_0\lambda/\mathrm{MCo}$, donde λ es una distancia típica sobre la cual varía ϱ'. (Una buena elección para λ sería la longitud de onda de la onda propuesta (del orden de un centímetro o a lo sumo unos pocos metros). Usando los valores para el agua (MCo = 2 GPa, etc). Mostrar que el primer término es despreciable. (Se podría también llegar a la misma conclusión para el aire). **(b)** Mostrar con un argumento similar que el segundo término del segundo miembro de (16.136) es despreciable.

APÉNDICE

Diagonalización de matrices reales simétricas

A.1 Diagonalización de una matriz

En el Capítulo 10 vimos el tensor momento de inercia **I** para un cuerpo rígido. Con respecto a un conjunto arbitrario de ejes ortogonales, **I** es una matriz real 3×3 simétrica que da el momento angular **L** del cuerpo en términos de su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ como $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$. Definimos un *eje principal* como un eje con la propiedad de que si $\boldsymbol{\omega}$ apunta en la dirección del eje, entonces **L** es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$, esto es

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\omega}, \tag{A.1}$$

para algún número λ. Vimos que si un cuerpo tiene tres ejes principales ortogonales, entonces, con respecto a estos ejes, **I** tiene la *forma diagonal*

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

donde λ_1, λ_2 y λ_3 son los momentos de inercia alrededor de los tres ejes principales. Reciprocamente, si **I** tiene esta forma diagonal, entonces los ejes con respecto a los cuales fue calculado **I** eran ejes principales. Por esta razón, el proceso de encontrar los ejes principales se denomina muchas veces **diagonalización del tensor de inercia**. Afirmé en la Sección 10.4 que cualquier cuerpo rígido, que gira en torno a cualquier origen O, tiene tres ejes principales. El propósito principal de este apéndice es precisamente demostrar esa afirmación.

El proceso de diagonalizar una matriz aparece una y otra vez en muchas ramas distintas de la física. Por ejemplo, si se leyó el Capítulo 16, se sabe que ambos tensores, el de esfuerzos y el de tensiones, están dados por matrices reales y simétricas, y muchas veces es conveniente encontrar ejes con respecto a los cuales uno de ellos es diagonal. [Por ejemplo, los ejes con respecto a los cuales el tensor de esfuerzos (en

un punto dado P) es diagonal se denominan *ejes principales de esfuerzo* y tienen la elegante propiedad de que el esfuerzo en cada uno de estos ejes es un estiramiento puro.] En mecánica cuántica, probablemente lo más importante que se hace con el operador que representa cualquier variable dinámica dada es diagonalizarlo.[1] Para enfatizar la generalidad del proceso, denotaré a la matriz que deseamos diagonalizar por **A**, y como lo que haremos normalmente es diagonalizar una matriz $n \times n$, donde n es cualquier entero, no necesariamente 3, supondremos por ahora que **A** es una matriz $n \times n$ arbitraria, real y simétrica. Sin embargo, el ejemplo que quizá uno quiera tener en mente es que $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, el momento de inercia 3×3 de un cuerpo rígido. En el contexto de la mecánica clásica, las matrices que queremos diagonalizar son casi siempre tensores (tensor momento de inercia, tensor de esfuerzo, tensor de tensión, etc.), y en esta sección supondré que **A** es la matriz que representa un tensor n-dimensional.

Antes de probar nuestro resultado principal, hagamos una pausa para considerar el efecto de cambiar los ejes con respecto a los cuales se evalúa el tensor de interés. En general, si la matriz $n \times n$ **A** representa un tensor n-dimensional arbitrario (con respecto a un conjunto dado de ejes), entonces la matriz $\mathbf{A}'$ que representa el mismo tensor con respecto a un conjunto diferente de ejes esta dada por la transformación ortogonal $\mathbf{A}' = \mathbf{R}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{R}}$, donde **R** es la rotación ortogonal que relaciona los dos conjuntos de ejes, como se discutió en relación con la ecuación (15.132). Afortunadamente, si no se han estudiado todavía las transformaciones ortogonales de tensores, aun se puede seguir nuestra prueba principal, si nos contentamos con considerar sólo el caso en que la matriz **A** es el tensor momento de inercia $\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Esta matriz fue definida por las sumas (10.37) y (10.38) (o las correspondientes integrales, para un cuerpo continuo.) Si cambiamos nuestros ejes, el conjunto de coordenadas x, y, z se sustituye por un conjunto distinto x', y', z', y utilizar estas nuevas coordenadas naturalmente conduce a una matriz 3×3 $\mathbf{I}'$ diferente; y esto es todo lo que se necesita saber sobre la relación de las dos matrices **I** y $\mathbf{I}'$. Estamos ahora preparados para demostrar el siguiente importante teorema:

Diagonalización de un tensor simétrico real

Si **A** es una matriz $n \times n$ simétrica real que representa un tensor n-dimensional, entonces existen n vectores unitarios ortogonales $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ con las propiedades de que **(1)** cada $\mathbf{e}_i$ es un autovector de **A**, esto es

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \tag{A.3}$$

[1] En mecánica cuántica, las variables dinámicas se representan por matrices complejas, hermíticas (en lugar de matrices simétricas reales). Sin embargo, el problema de diagonalizarlas es muy parecido en los dos casos. Aquí discutiré sólo el caso de matrices simétricas reales.

para algún autovalor real λ_i y **(2)** con respecto a los ejes definidos por estos n vectores unitarios, el tensor se representa por la matriz diagonal

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

Antes de probarlo, advierta que como los n vectores unitarios $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ son mutualmente ortogonales, son ciertamente linealmente independientes. Por tanto, *cualquier* vector en el espacio n-dimensional se puede desarrollar en términos de ellos; esto es, $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ forman una **base ortonormal** del espacio en el que están. La prueba de este resultado se realiza en varios pasos:

Paso 1. A tiene al menos un autovalor y su autovector correspondiente. Hemos visto repetidamente que la ecuación de autovalores (A.3) requiere que $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}) = 0$. Este determinante es un polinomio de n-ésimo grado en λ de manera que ciertamente tiene al menos un cero, $\lambda = \lambda_1$, por ejemplo.[2] Ahora, es un resultado bien conocido del álgebra lineal[3] que, si $\det(\mathbf{B}) = 0$, entonces existe al menos un vector distinto de cero $\mathbf{a}$ tal que $\mathbf{Ba} = 0$. Por tanto, como $\det(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{1}) = 0$, existe al menos un autovector $\mathbf{a}$ tal que

$$\mathbf{Aa} = \lambda_1\mathbf{a}. \tag{A.5}$$

Paso 2. El autovalor λ_1 es real. Nada de lo que hemos dicho hasta ahora garantiza que el autovalor λ_1 y al autovector $\mathbf{a}$ sean reales. Para mostrar que λ_1 lo es, considere lo siguiente: si multiplicamos (A.5) a la izquierda por la fila $\tilde{\mathbf{a}}^*$ (esto es, el complejo conjugado de la transpuesta de la columna $\mathbf{a}$), vemos que

$$\lambda_1 = \frac{\tilde{\mathbf{a}}^*\mathbf{Aa}}{\tilde{\mathbf{a}}^*\mathbf{a}}. \tag{A.6}$$

Ahora bien, es fácil ver que ambos términos en esta fracción son reales: primero,

$$\tilde{\mathbf{a}}^*\mathbf{a} = \sum_i a_i^* a_i = \sum_i |a_i|^2 > 0.$$

---

[2] En general, un polinomio de n-ésimo grado tiene n ceros, pero algunos de ellos (o incluso todos) pueden ser iguales. Sin embargo, se puede afirmar ciertamente que existe al menos un cero.

[3] Vea, por ejemplo, *Mathematical Methods for Scientists and Engineers* por Donald A. McQuarrie (University Science Books, 2003), página 434, o *MathematicalMethods in Physical Sciences* por Mary Boas (Wiley, 1983), página 133.

Al mismo tiempo el numerador es

$$\tilde{\mathbf{a}}^*\mathbf{A}\mathbf{a} = (\tilde{\mathbf{a}}^*\mathbf{A}\mathbf{a})\tilde{} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{A}\mathbf{a}^* = (\tilde{\mathbf{a}}^*\mathbf{A}\mathbf{a})^*$$

que muestra que $\tilde{\mathbf{a}}^*\mathbf{A}\mathbf{a}$ es real. [Para la primera igualdad, he usado el hecho de que el lado izquierdo es una matriz 1×1 y por tanto es igual a su transpuesta; para la segunda he usado el resultado bien conocido de que $(\mathbf{mnp})\tilde{} = \tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{m}}$ y que nuestra matriz dada $\mathbf{A}$ es simétrica; en la última, he usado el hecho de que $\mathbf{A}$ es real.] Como tanto numerador y denominador en (A.6) son reales (y el denominador distinto de cero), se sigue que el autovalor λ_1 es real. (Advierta que este argumento se aplica a cualquier autovalor de $\mathbf{A}$; por ello, *cualquier* autovalor de una matriz simétrica real es real.)

Paso 3. El autovector se puede tomar de modo que sea real. Se puede estar tentado a esperar que los autovectores de una matriz real sean necesariamente reales, pero esto es realmente falso; si un vector real $\mathbf{a}$ cumple (A.5), entonces también lo hará $i\mathbf{a}$, que ciertamente no es real. Por consiguiente, un autovector de $\mathbf{A}$ puede ser en general complejo. Sin embargo, tomando el complejo conjugado de (A.5) y recordando que $\mathbf{A}$ y λ_1 son reales, vemos que, si $\mathbf{a}$ es un autovector, también lo es $\mathbf{a}^*$. Esto en realidad significa que los dos vectores $\mathbf{a} + \mathbf{a}^*$ e $i(\mathbf{a} - \mathbf{a}^*)$ también lo son. Como ambos son reales y al menos uno es distinto de cero, hemos mostrado que para cada autovalor existe al menos un autovector *real*. Por tanto, podemos suponer, sin perder generalidad, que el autovector $\mathbf{a}$ es real.

Paso 4. Elegir una nueva base que incluya el autovector. Nuestro siguiente paso es normalizar el autovector real $\mathbf{a}$ y elegir una nueva base ortonormal con su autovector normalizado como su primer vector unitario. Esto es, definimos el vector unitario

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \tag{A.7}$$

que también cumple la ecuación de autovalores (A.5),

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1, \tag{A.8}$$

y entonces elegimos otros $n - 1$ vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{e}_1$ y a cada uno de los otros para definir un nuevo conjunto de ejes ortogonales.[4] Con respecto a esta nueva base, el vector $\mathbf{e}_1$ se representa por una columna cuyo

[4] En tres dimensiones es fácil ver que esto es siempre posible. Dado $\mathbf{e}_1$ sólo elegimos cualesquiera dos vectores en el plano perpendicular a $\mathbf{e}_1$. En n dimensiones el argumento es esencialmente el mismo; para hacerlo infalible, uno puede utilizar el *procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt*. Vea *Mathematical Methods for Scientists and Engineers* por Donald A. McQuarrie (University Science Books, 2003), página 448.

primer término es un 1 y todos los demás términos son cero. La ecuación de autovalores (A.8) implica que (con respecto a la nueva base) la primera columna de la matriz que representa **A** tiene λ_1 para la primera entrada y ceros para todas las demás. Como la matriz es simétrica, se sigue que tiene la forma

$$\text{(nueva matriz } \mathbf{A} \text{ con respecto a la nueva base)} = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right] \tag{A.9}$$

donde $\mathbf{A}_1$ es una matriz real $(n-1) \times (n-1)$ simétrica.

Paso 5. Repetir los pasos 1 a 4 en la matriz $\mathbf{A}_1$. Se puede considerar que la matriz $\mathbf{A}_1$ actúa sobre el subespacio $(n-1)$-dimensional ortogonal al primer vector de la nueva base $\mathbf{e}_1$. Tiene al menos un autovalor real λ_2 y su autovector correspondiente, que podemos tomarlo como real y normalizarlo para obtener el segundo vector unitario $\mathbf{e}_2$. Elegimos ahora una base ortonormal formada por $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $n-2$ otros vectores unitarios, y con respecto a esta segunda nueva base, la matriz que representa el tensor tiene la forma

$$\text{(nueva matriz } \mathbf{A} \text{ con respecto a la segunda nueva base)} = \left[\begin{array}{cc|ccc} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \mathbf{A}_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right] \tag{A.10}$$

donde $\mathbf{A}_2$ es una matriz real $(n-2) \times (n-2)$ simétrica.

Paso 6. Repetir los pasos 1 a 4 sobre $\mathbf{A}_2$, luego sobre $\mathbf{A}_3$, etc. Después de $n-3$ repeticiones más, la matriz que representa el tensor tendrá la forma diagonal requerida por (A.4), y esto completa la demostración.

A.2 Diagonalización simultánea de dos matrices

En el Capítulo 11 vimos que un sistema con n grados de libertad, que oscila en torno a una posición de equilibrio estable, obedece a una ecuación de movimiento de la forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{K}\mathbf{q}, \tag{A.11}$$

donde $\mathbf{q}$ es una columna de n coordenadas generalizadas, y $\mathbf{M}$ y $\mathbf{K}$ son matrices reales $n \times n$ simétricas, denominadas matrices de masa y de constante-muelle respectiva-

mente. En lo que sigue es importante que tanto **M** como **K** sean matrices *definidas positivas*. Para ver qué significa esto, consideremos primero la matriz **K**: según (11.53), la energía potencial es $U = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{K}\mathbf{q}$. Ésta es cero en la posición de equilibrio $\mathbf{q} = 0$ y, como el equilibrio es estable, U debe ser mayor que 0 para cualquier $\mathbf{q} \neq 0$. Por tanto, la matriz **K** debe tener la propiedad de que $\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{K}\mathbf{q} > 0$ para cualquier **q** que no sea igual a cero (definiendo la propiedad de una matriz definida positiva). Análogamente, según (11.54), la energía cinética es $T = \frac{1}{2}\tilde{\dot{\mathbf{q}}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}$, y ésta debe ser positiva para cualquier $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$; esto es, **M** debe ser también definida positiva.

Definimos un modo normal como cualquier movimiento en el cual todas las n coordenadas oscilan sinusoidalmente a la misma frecuencia ω, de manera que $\mathbf{q}(t) = \mathrm{Re}(\mathbf{a}e^{i\omega t})$, y vimos que un modo normal es posible si y sólo si ω y **a** cumplen

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{a}. \tag{A.12}$$

Afirmé (y en algunos ejemplos lo vimos explícitamente) que existen n soluciones independientes **a** de esta ecuación de autovalores generalizada y por ello que *cualquier* movimiento posible se puede expresar como una combinación lineal de los modos normales.

Para probar esta afirmación, observe que si desarrollamos una solución de (A.11) en términos de las n soluciones independientes **a** de (A.12), entonces las nuevas coordenadas generalizadas $\mathbf{q}'$ cumplen[5]

$$\ddot{q}_i' = -\omega_i^2 q_i'. \tag{A.13}$$

Comparando (A.13) con (A.11), vemos que tenemos que probar que existe una base del espacio de configuración n-dimensional con respecto a la cual las matrices **M** y **K** son ambas diagonales, con las formas

$$\mathbf{M}' = \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

En particular, en la nueva base, la matriz de masa es justo la matriz unitaria. Lo demostraremos, aunque veremos que en general la nueva base no es ortonormal. La prueba se apoya en gran medida en la demostración anterior y, como ella, se realiza en varios pasos.

Paso 1. Diagonalizar M. Como **M** es real y simétrica, podemos encontrar una matriz $n \times n$ ortogonal **R** que diagonaliza **M**. Esto es, $\mathbf{M}' = \mathbf{R}\mathbf{M}\tilde{\mathbf{R}}$ es diagonal, con la forma

[5] Advierta que las coordenadas que estoy llamando aquí q_i' son precisamente las coordenadas normales que introduje en la Sección 11.7 (donde las llamé ξ_i).

$$\mathbf{M}' = \mathbf{R}\mathbf{M}\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix}. \tag{A.15}$$

Si definimos $\mathbf{q}' = \mathbf{R}\mathbf{q}$ y $\mathbf{K}' = \mathbf{R}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{R}}$, entonces, con respecto a las nuevas coordenadas, la ecuación de autovalores (A.12) se convierte en $\mathbf{K}'\mathbf{a}' = \omega^2\mathbf{M}'\mathbf{a}'$.

Paso 2. Reescalar las coordenadas de modo que $\mathbf{M}'' = \mathbf{1}$. En términos de las nuevas coordenadas $\mathbf{q}'$, la energía cinética es

$$T = \tfrac{1}{2}\tilde{\dot{\mathbf{q}}}'\mathbf{M}'\dot{\mathbf{q}}' = \sum \mu_i \dot{q}_i'^2. \tag{A.16}$$

Como ésta debe ser positiva para cualquier $\dot{\mathbf{q}}' \neq 0$, todos los números μ_i en (A.15) deben ser positivos. Por tanto, podemos escalar cada una de las coordenadas q_i' en un factor $\sqrt{\mu_i}$. Concretamente, definiremos coordenadas nuevas $q_i'' = q_i'\sqrt{\mu_i}$. Además, si definimos una matriz diagonal

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{\mu_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/\sqrt{\mu_n} \end{bmatrix} \tag{A.17}$$

y establecemos

$$\mathbf{M}'' = \mathbf{S}\mathbf{M}'\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{1} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{K}'' = \mathbf{S}\mathbf{K}'\tilde{\mathbf{S}}, \tag{A.18}$$

entonces, con respecto a estas nuevas coordenadas, la matriz de masa es justo la matriz unitaria, la energía cinética tiene la forma simple $T = \frac{1}{2}\sum \dot{q}''^2$, y, más importante, como $\mathbf{M}'' = \mathbf{1}$, la ecuación de autovalores generalizada $\mathbf{K}\mathbf{a} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{a}$ se ha convertido en la ecuación de autovalores *ordinaria*

$$\mathbf{K}''\mathbf{a}'' = \omega^2\mathbf{a}''. \tag{A.19}$$

Paso 3. Diagonalizar $\mathbf{K}''$. De acuerdo con la Sección A.1, existe una matriz ortogonal $\mathbf{T}$ que diagonaliza $\mathbf{K}''$. Es decir, si definimos

$$\mathbf{K}''' = \mathbf{T}\mathbf{K}''\tilde{\mathbf{T}} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{M}''' = \mathbf{T}\mathbf{M}''\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{1}, \tag{A.20}$$

entonces tanto $\mathbf{K}'''$ como $\mathbf{M}'''$ son matrices diagonales, con $\mathbf{M}'''$ todavía igual a $\mathbf{1}$. Esto demuestra la existencia de los n autovectores requeridos con las propiedades anunciadas.[6]

---

[6] Un pequeño apunte: como los autovalores se supone que son los cuadrados de las frecuencias normales, es esencial que sean positivos. Esto se garantiza porque $\mathbf{K}$ y por tanto $\mathbf{K}'''$ están definidas positivas.

Lecturas avanzadas

Textos sobre Mecánica Clásica a nivel de este libro

- Ralph Baierlein, *Newtonian Mechanics* (McGraw-Hill, 1983)
- Vernon Barger y Martin Olsson, *Classical Mechanics: A Modern Perspective* (2.ª edición, McGraw-Hill, 1995)
- Grant Fowles y George Cassiday, *Analytical Mechanics* (6.ª edición, Saunders, 1999)
- T. W. B. Kibble y F. H. Berkshire, *Classical Mechanics* (4.ª edición, Longman, 1996)
- Keith Symon, *Mechanics* (3.ª edición, Addison-Wesley, 1971)
- Stephen Thornton y Jerry Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (5.ª edición, Thomson, 2004)

Textos más avanzados sobre Mecánica Clásica

- Louis Hand y Janet Finch, *Analytical Mechanics* (Cambridge University Press, 1998); un texto para estudiantes universitarios, pero claramente más avanzado que cualquiera de los anteriormente citados.
- Herbert Goldstein, Charles Poole y John Safko, *Classical Mechanics* (3.ª edición, Addison-Wesley, 2002); un texto para graduados con un éxito asombroso y actual, publicado por primera vez en 1950.
- Herbert Goldstein, *Mecánica clásica* (Editorial Reverté, 1987).

Libros sobre métodos matemáticos

- Mary Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (2.ª edición, Wiley, 1983); un texto para estudiantes universitarios, muy comprensible y escrito con mucha elegancia; unos de los mejores en su tema.

- Donald McQuarrie, *Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (University Science Books, 2003); un libro a nivel universitario, que ha recibido críticas elogiosas; legible y muy comprensible, con 1161 páginas.
- Jon Mathews y R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics* (2.ª edición, W. A. Benjamin, 1970); un texto para graduados, pero muy accesible.

Tablas de integrales y otras fórmulas matemáticas

- M. Abramowitz e I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, 1965).
- H. B. Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data* (4.ª edición, MacMillan, 1961)
- Alan Jeffrey, *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals* (2.ª edición, Academic Press, 2000)

Libros sobre caos

- James Gleick, *Chaos, Making a New Science* (Viking-Penguin, 1987); una historia muy legible y nada técnica de la teoría del caos.
- Gregory Baker y Jerry Gollub, *Chaotic Dynamics: An Introduction* (2.ª edición, Cambridge University Press, 1996); un texto para universitarios, pionero sobre el caos, que naturalmente abarca mucho más terreno que este.
- Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Addison-Wesley, 1994); una explicación matemática muy bonita de muchos aspectos de la teoría del caos.

Libros sobre relatividad

- Albert Einstein, *Relativity* (15.ª edición, Crown, 1961); una explicación legible hecha por el propio gran hombre.
- Wolfgang Rindler, *Introduction to Special Relativity* (Oxford University Press, 1991); una explicación muy simpática que va un poco más allá de hasta donde se llega en este libro, por uno de los expertos.
- James Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity* (Addison-Wesley, 2003); una explicación excelente de la teoría general escrita para estudiantes universitarios.
- C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, 1970); un clásico, y todavía el texto más comprensible sobre relatividad general.

Libros sobre mecánica de medios continuos

- Gerard Middleton y Peter Wilcock, *Mechanics in the Earth and Environmental Sciences* (Cambridge University Press, 1994)
- D. S. Chandrasekharaiah y Lokenath Debnath, *Continuum Mechanics* (Academic Press, 1994)
- Lawrence E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium* (Prentice Hall, 1969)

Respuestas a algunos problemas impares

Capítulo 1

1.1 $\mathbf{b}+\mathbf{c}=2\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}}$, $5\mathbf{b}+2\mathbf{c}=7\hat{\mathbf{x}}+5\hat{\mathbf{y}}+2\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=1$, $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}}-\hat{\mathbf{z}}$.

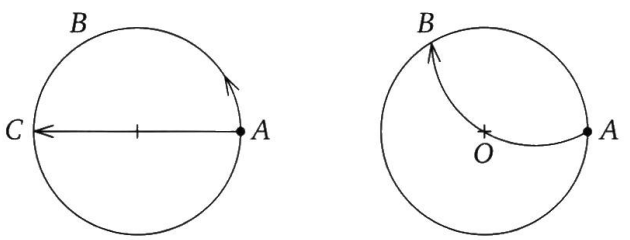
1.5 $\theta=\arccos\sqrt{2/3}=0{,}615$ radianes o $35{,}3°$.

1.11 La partícula se mueve en sentido contrario a las agujas del reloj siguiendo la elipse $(x/b)^2+(y/c)^2=1$ en el plano xy, y describe una órbita completa en un período $2\pi/\omega$.

1.23 $\mathbf{v}=(\lambda\mathbf{b}-\mathbf{b}\times\mathbf{c})/b^2$.

1.25 Cualquier solución tiene la forma $f(t)=Ae^{-3t}$, que contiene una constante arbitraria.

1.27 Visto desde el suelo, el bloque viaja recto por la mesa giratoria pasando por el centro O. Visto por un observador que está sentado en la mesa giratoria, el bloque sigue una trayectoria curva como la mostrada.



Visto desde el suelo Visto desde la mesa giratoria

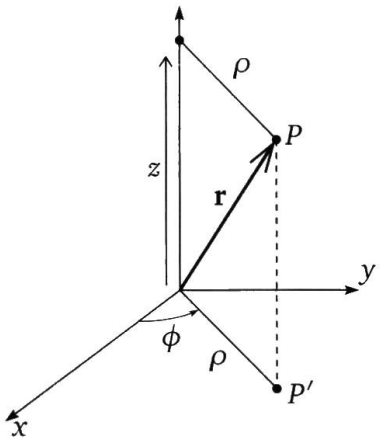
1.35 La posición es $\mathbf{r}=(v_0t\cos\theta,0,v_0t\,\text{sen}\,\theta-\frac{1}{2}gt^2)$. El tiempo en volver al suelo es $t=(2v_0\,\text{sen}\,\theta)/g$, y la distancia recorrida es $(2v_0^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)/g$.

1.37 **(a)** Si medimos x recto hacia arriba de la pendiente, $x=v_0t-\frac{1}{2}gt^2\,\text{sen}\,\theta$. **(b)** Tiempo en volver, $t=2v_0/(g\,\text{sen}\,\theta)$.

1.39 $x=v_0t\cos\theta-\frac{1}{2}gt^2\,\text{sen}\,\phi$, $y=v_0t\,\text{sen}\,\theta-\frac{1}{2}gt^2\cos\phi$, $z=0$.

1.41 Tensión $= m\omega^2 R$ (o mv^2/R).

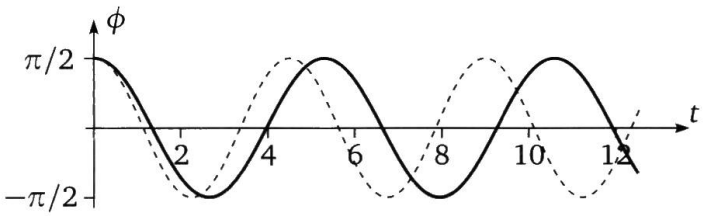
1.47 **(a)** $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\phi = \text{arctg}(y/x)$ (escogido para que esté en el cuadrante correcto), y z es la misma que en cartesianas. La coordenada ρ es la distancia perpendicular desde P hasta el eje z. Si utilizamos r para la coordenada ρ, entonces r no es lo mismo que $|\mathbf{r}|$ y $\hat{\mathbf{r}}$ no es el vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$ [vea la parte (b)].



(b) El vector unitario $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ apunta en la dirección en que ρ aumenta (con ϕ y z fijas), esto es, directamente aparte del eje z; $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ es tangente a un círculo horizontal a través de P centrado en el eje z (en el sentido contrario a las agujas del reloj, visto desde arriba); $\hat{\mathbf{z}}$ es paralelo al eje z. $\mathbf{r} = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\mathbf{z}}$. **(c)** $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2$, $\quad a_\phi = \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}$, $\quad a_z = \ddot{z}$.

1.49 $\phi = \phi_0 + \omega t$ y $z = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2$.

1.51 En la imagen, la curva continua es una solución aproximada de la ecuación diferencial (hallada con NDSolve de Mathematica). La curva a trazos es la aproximación de oscilaciones pequeñas (1.57) con la misma condición inicial ($\phi_0 = \pi/2$). Considerando la magnitud del ángulo inicial, la aproximación de ángulos pequeños es muy buena. La única discrepancia significativa es que la aproximación oscila quizá demasiado rápido, como uno esperaría. (Para amplitudes grandes, el período verdadero es un poco más largo.)

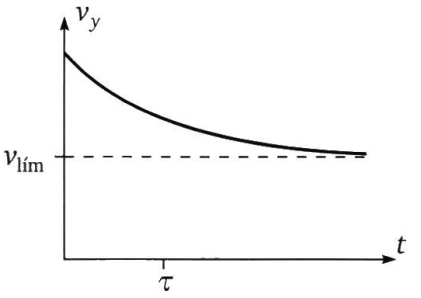


Capítulo 2

2.1 Las dos fuerzas son casi iguales cuando $v \approx 1$ cm/s, y si $v \gg 1$ cm/s la fuerza lineal es despreciable. Para una pelota de playa, la velocidad correspondiente está en torno a 1 mm/s.

2.3 **(b)** $R \approx 0{,}01$, y no hay ningún problema en despreciar el arrastre cuadrático.

2.5



2.7 Si $F = F_0$, una constante, $v = v_0 + at$, donde $a = F_0/m$.

2.11 **(a)** $v_y(t) = -v_{\text{lím}} + (v_0 + v_{\text{lím}})e^{-t/\tau}$ y $y(t) = -v_{\text{lím}}t + (v_0 + v_{\text{lím}})\tau(1 - e^{-t/\tau})$.

(b) $t_{\text{más alto}} = \tau \ln(1 + v_0/v_{\text{lím}})$ y $y_{\text{máx}} = [v_0 - v_{\text{lím}} \ln(1 + v_0/v_{\text{lím}})]\tau$.

2.13 $v = \omega\sqrt{x_0^2 - x^2}$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$, y $x(t) = x_0 \cos \omega t$.

2.15 Tiempo de vuelo, $t = 2v_{yo}/g$.

2.19 **(a)** $y = \dfrac{v_{yo}}{v_{xo}}x - \frac{1}{2}g\left(\dfrac{x}{v_{xo}}\right)^2$.

2.23 **(a)** Velocidad límite = 22 m/s (rodamiento), **(b)** 140 m/s (bala de acero), **(c)** 107 m/s (paracaidista en caída libre).

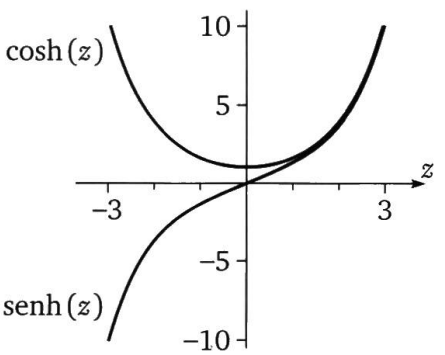
2.27 Velocidad, $v(t) = v_{\text{lím}} \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{v_0}{v_{\text{lím}}} - \dfrac{cv_{\text{lím}}}{m}t\right)$; (tiempo hasta arriba) $= \dfrac{m}{cv_{\text{lím}}} \operatorname{arctg}\dfrac{v_0}{v_{\text{lím}}}$, donde $v_{\text{lím}} = \sqrt{mg \operatorname{sen}(\theta)/c}$.

2.29

tiempo (segundos)	0	1	5	10	20	30
velocidad real (m/s)	0	9,7	37,7	48,1	50,0	50,0
velocidad en el vacío (m/s)	0	9,8	49,0	98,0	196,0	294,0

2.31 **(a)** Velocidad límite, $v_{\text{lím}} = 20{,}2$ m/s. **(b)** Tiempo hasta el suelo, $t = 2{,}78$ s (2.47 en el vacío), y velocidad en el suelo, $v = 17{,}7$m/s (24.2 en el vacío).

2.33 **(a)**



(b) $\operatorname{senh}(z) = -i \operatorname{sen}(iz)$.

(c)
$$\frac{d\cosh(z)}{dz} = \operatorname{senh}(z), \quad \frac{d\operatorname{senh}(z)}{dz} = \cosh(z),$$
$$\int \cosh(z)\,dz = \operatorname{senh}(z), \quad \int \operatorname{senh}(z)\,dz = \cosh(z).$$

2.35 (b) En $t = 2\tau$ y 3τ, la velocidad v es el 96% y el 99,5% del valor de su velocidad límite.

2.39 (a)
$$t = \frac{m}{\sqrt{f_{\text{roz}}c}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{c}{f_{\text{roz}}}}v_0 - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{c}{f_{\text{roz}}}}v\right).$$

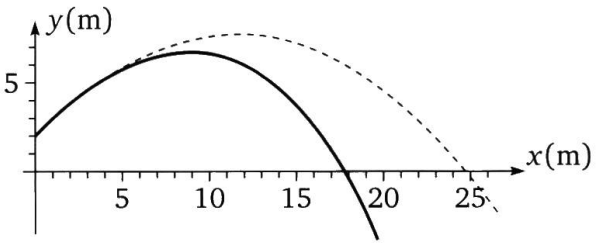
(b)

v (m/s)	15	10	5	0
t (s)	6,3	18,4	48,3	142

Los tiempos correspondientes si despreciamos el rozamiento son (del Problema 2.26) 6,7, 20,0, 60,0 y ∞. Despreciar el rozamiento, comparado con la resistencia cuadrática del aire, está bastante bien a velocidades más altas, pero es terrible a velocidades bajas.

2.41 La velocidad es $v(y) = \sqrt{(v_0^2 + v_{\text{lím}}^2)e^{-2gy/v_{\text{lím}}^2} - v_{\text{lím}}^2}$, donde $v_{\text{lím}} = \sqrt{mg/c}$; $y_{\text{máx}} = 17{,}7$ m, comparado con 20,4 en el vacío.

2.43 (a) La curva continua es la trayectoria verdadera, la a trazos es la que corresponde al vacío.



(b) El alcance verdadero es 17,7 m y el alcance en el vacío 24,8 m.

2.45 (b) $z = 3 + 4i = 5e^{0{,}927i}$; **(c)** $z = 2e^{-i\pi/3} = 1 - i\sqrt{3}$.

2.47 (a) $z + w = 9 + 4i$, $z - w = 3 + 12i$, $zw = 50$, $z/w = -0{,}56 + 1{,}92i$; **(b)** $z + w = (4 + 2\sqrt{3}) + (4\sqrt{3} + 2)i$, $z - w = (4 - 2\sqrt{3}) + (4\sqrt{3} - 2)i$, $zw = 32i$, $z/w = \sqrt{3} + i$.

2.49 (b) $\cos 3\theta = \cos\theta(\cos^2\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta)$ y $\operatorname{sen} 3\theta = \operatorname{sen}\theta(3\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$.

2.53 $m\dot{v}_x = qBv_y$, $m\dot{v}_y = -qBv_x$, $m\dot{v}_z = qE$.

El movimiento de x e y es el mismo que en la Figura 2.15, movimiento en el sentido de las agujas del reloj alrededor de un círculo a velocidad angular constante $\omega = qB/m$. Mientras tanto, $z = z_0 + v_{z0}t + \frac{1}{2}a_z t^2$, donde $a_z = qE/m$. La partícula se mueve en una hélice o espiral de radio constante alrededor del eje z, con una pendiente que aumenta cuando el movimiento en la dirección z se acelera.

2.55 (a) $\dot{v}_x = \omega v_y$, $\dot{v}_y = -\omega(v_x - E/B)$, y $\dot{v}_z = 0$.

(b) $v_{\text{dr}} = E/B$.

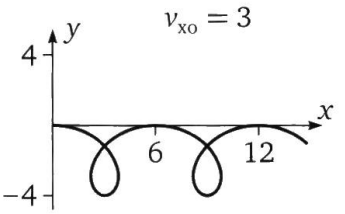
(c) $v_x = v_{\text{dr}} + (v_{x0} - v_{\text{dr}})\cos\omega t$, $v_y = -(v_{x0} - v_{\text{dr}})\operatorname{sen}\omega t$, y $v_z = 0$.

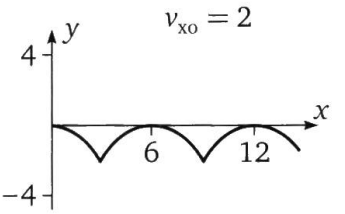
La velocidad transversal (v_x, v_y) va continuamente alrededor de un círculo de radio $(v_{x0} - v_{\text{dr}})$, con una deriva constante v_{dr} superpuesta en la dirección x.

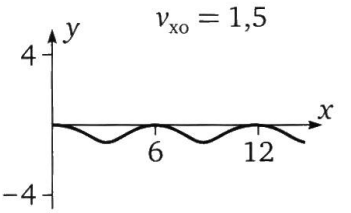
(d) $x = v_{\text{dr}}t + R\operatorname{sen}\omega t$ e $y = R(\cos\omega t - 1)$

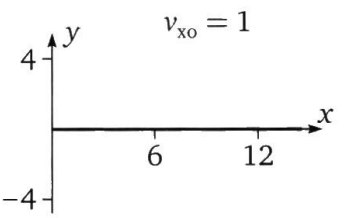
donde $R = (v_{x0} - v_{\text{dr}})/\omega$. Esta trayectoria es una cicloide, cuya apariencia precisa depende de la velocidad inicial v_{x0}, como se ilustra debajo para siete valores diferentes de v_{x0}. Advierta, en particular, que si $v_{x0} = v_{\text{dr}}$ entonces $R = 0$ y la carga se mueve en línea recta a través de los campos, como ya sabíamos. (Los valores de v_{x0} se muestran como múltiplos de v_{dr}).

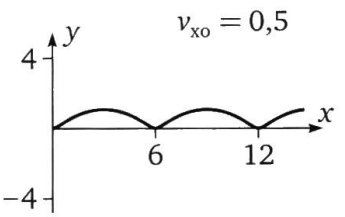
2.55 (cont.)

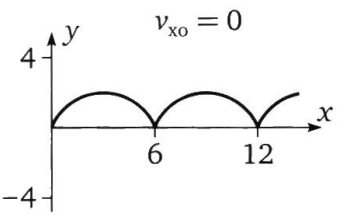


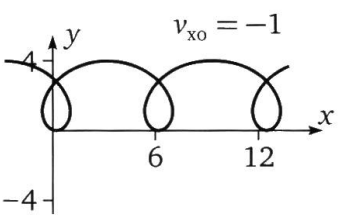






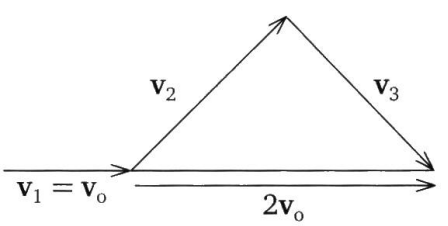






Capítulo 3

3.3 Los vectores $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ tienen magnitudes iguales $v_2 = v_3 = \sqrt{2}\,v_o$, y están a 45° a ambos lados de la dirección inicial.



3.7 Velocidad final, $v \approx 2100$ m/s. Empuje $\approx 2{,}5 \times 10^7$ N, un poco mayor que el peso inicial $\approx 2{,}0 \times 10^7$ N.

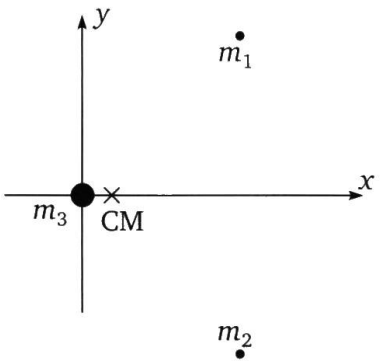
3.9 Velocidad mínima de escape ≈ 2400 m/s.

3.11 (b) y **(c)** $v = v_{esc} \ln(m_o/m) - gt \approx 900$ m/s, comparado con 2100 m/s en gravedad cero.

3.13 Altura $\approx 4{,}0 \times 10^4$ m.

3.15 Posición del CM, $\mathbf{R} = (1/6, 0, 0)$, que está mucho más cerca de la masa pesada m_3 que de m_1 o m_2.

3.15 (cont.)

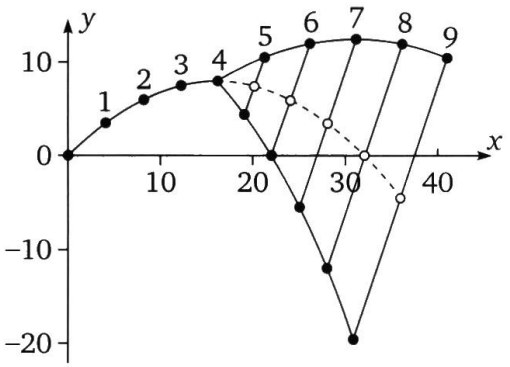


3.17 El CM está a unos $4{,}6 \times 10^3$ km del centro de la Tierra; esto lo sitúa de sobra dentro de la Tierra.

3.19 (a) El CM seguiría la misma parábola que el proyectil sin explotar. **(b)** El segundo trozo golpea el arma que lo disparó. **(c)** No.

3.21 $X = Z = 0$ e $Y = 4R/3\pi$.

3.23 La velocidad del segundo trozo es $\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}$. El CM (círculos vacíos) está en el punto medio de la línea que une los dos fragmentos y claramente continúa en la misma parábola que la granada seguía antes de la explosión.



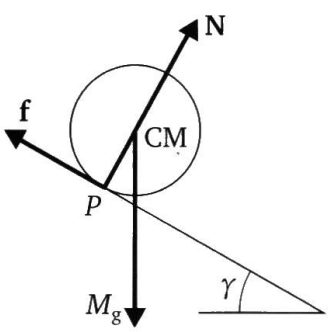
3.25 Velocidad angular final, $\omega = \omega_0(r_0/r)^2$.

3.29 Velocidad angular final, $\omega = \omega_0(R_0/R)^5 = \omega_0/32$.

3.31 Momento de inercia, $I = \frac{1}{2}MR^2$.

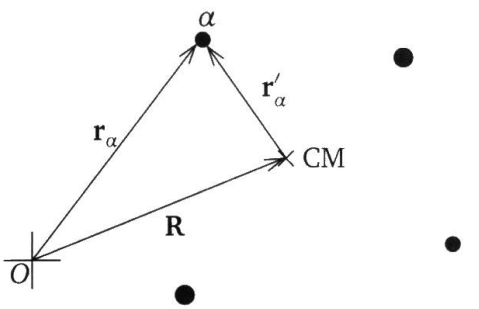
3.33 Momento de inercia, $I = \frac{2}{3}Mb^2$.

3.35 (a)



(b) y **(c)** De cualquiera de las dos maneras, $\dot{v} = \frac{2}{3}g \operatorname{sen}\gamma$.

3.37 (a)

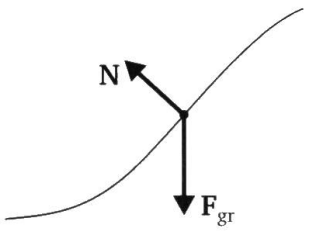


Capítulo 4

4.3 (a) $W = 0$, **(b)** $W = 1$, **(c)** $W = \pi/2$.

4.7 (a) $W(\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2) = -(m\gamma/3)(y_2^3 - y_1^3)$; $\quad U(\mathbf{r}) = (m\gamma/3)y^3$.

(b)



(c) $v_{\text{fin}} = \sqrt{2\gamma h^3/3}$.

4.9 (b) $x_0 = mg/k$.

4.11

función	$\partial/\partial x$	$\partial/\partial y$	$\partial/\partial z$
$ay^2 + 2byz + cz^2$	0	$2ay + 2bz$	$2by + 2cz$
$\cos(axy^2z^3)$	$-ay^2z^3\,\text{sen}(axy^2z^3)$	$-2axyz^3\,\text{sen}(axy^2z^3)$	$-3axy^2z^2\,\text{sen}(axy^2z^3)$
$ar = a\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	ax/r	ay/r	az/r

4.13

función f	$\partial/\partial x$	$\partial/\partial y$	$\partial/\partial z$	∇f
$\ln(r)$	x/r^2	y/r^2	z/r^2	$\hat{\mathbf{r}}/r$
r^n	nxr^{n-2}	nyr^{n-2}	nzr^{n-2}	$nr^{n-1}\hat{\mathbf{r}}$
$g(r)$	$g'(r)x/r$	$g'(r)y/r$	$g'(r)z/r$	$g'(r)\hat{\mathbf{r}}$

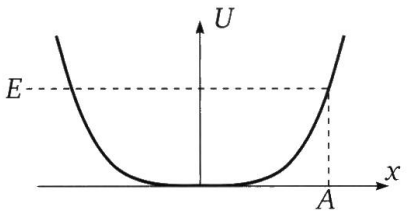
4.15 Usando (4.35) obtenemos $\Delta f \approx 0{,}44$, comparado con el $\Delta f = 0{,}45$ exacto (con dos decimales).

4.19 (a) La superficie $x^2 + 4y^2 = K$ es un cilindro elíptico, centrado en el eje z, con «radio» $\sqrt{K}$ en la dirección x y la mitad de este en la dirección y. **(b)** La unidad normal a la superficie es $\mathbf{n} = (1,4,0)/\sqrt{17}$ (o bien $-\mathbf{n}$). La dirección de máximo aumento es $\mathbf{n}$ (y la de máximo decrecimiento es $-\mathbf{n}$).

4.21 La energía potencial gravitatoria es $U(r) = -GMm/r$.

4.23 (a) $\mathbf{F}$ es conservativa y $U = \frac{1}{2}k(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$. **(b)** $\mathbf{F}$ es conservativa y $U = kxy$. **(c)** $\mathbf{F}$ no es conservativa.

4.29 (a)

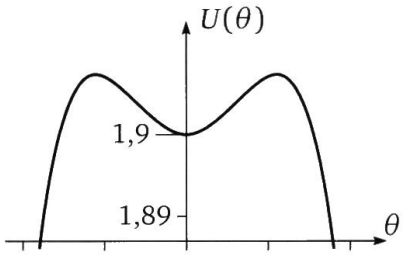


(b) El tiempo para alcanzar A es $t(0 \to A) = \sqrt{m/2k}\int_0^A dx/\sqrt{A^4 - x^4}$. El período es $4t(0 \to A)$.

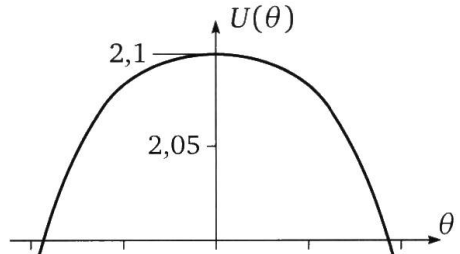
(d) $\tau = 3{,}71$.

4.31 (a) Eliminando todas las constantes que no interesan, tenemos $E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 - (m_1 - m_2)gx$.

4.33 (b)



$b = 0{,}9r$



$b = 1{,}1r$

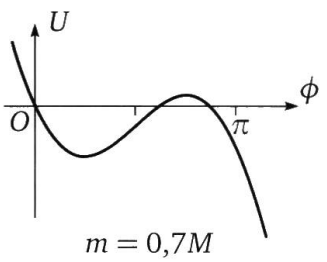
(c) Para $b < r$ puede haber dos puntos más de equilibrio (simétricamente situados a ambos lados de $\theta = 0$), ambos inestables.

4.35 (a) $E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + I/R^2)\dot{x}^2 - (m_1 - m_2)gx$ (más una constante que también podemos eliminar). **(b)** La ecuación del movimiento es $(m_1 + m_2 + I/R^2)\ddot{x} = (m_1 - m_2)g$, de cualquiera de las dos maneras.

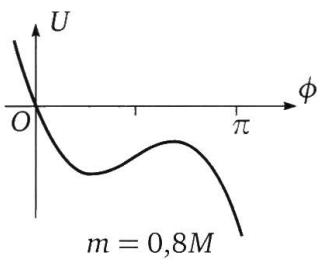
4.37 (a) $U(\phi) = MgR(1 - \cos\phi) - mgR\phi$.

(b) Hay posiciones de equilibrio sólo si $m \leq M$. Si $m = M$, hay un equilibrio (inestable) en $\phi = 90°$. Si $m < M$, hay dos posiciones determinadas por la condición $m = M \operatorname{sen}\phi$, que tiene dos soluciones situadas simétricamente por encima y por debajo de $\phi = 90°$. La posición más baja es estable, la mas alta inestable. [Vea las imágenes de la parte (c)].

(c)



$m = 0{,}7M$



$m = 0{,}8M$

Si $m = 0{,}7M$, la rueda oscila hacia arriba hasta un máximo $\phi < \pi$, después oscila hacia atrás hasta $\phi = 0$, y después oscila indefinidamente. Si $m = 0{,}8M$, la rueda oscila más allá de $\phi = \pi$ y continúa rotando en sentido contrario a las agujas del reloj hasta que se acaba la cuerda. **(d)** El valor crítico de m/M es 0,725.

4.39 (c) Si $\Phi = 45°$, esta aproximación da $\tau = 1{,}037\tau_0$, que representa una corrección del 3,7% a la aproximación de amplitud pequeña (τ_0), y está ella misma dentro de un 0,3% de la respuesta correcta ($1{,}040\tau_0$).

4.51
$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_4) &= [U_{12}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)+U_{13}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)+U_{14}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4)+U_{23}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3) \\ &\quad +U_{24}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_4)+U_{34}(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_4)\,] \\ &\quad +\,[U_1^{\text{ext}}(\mathbf{r}_1)+U_2^{\text{ext}}(\mathbf{r}_2)+U_3^{\text{ext}}(\mathbf{r}_3)+U_4^{\text{ext}}(\mathbf{r}_4)\,]. \end{aligned}$$

4.53 (b) $E = T_1 + T_2 + U_1 + U_2 + U_{12} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - ke^2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_{12}}\right)$.

(c) Mucho antes: $E = T_1 + T_2 + U_1 + 0 + 0 = T_2 - \dfrac{ke^2}{2r}$.

Mucho después: $E' = T_1' + T_2' + 0 + U_2' + 0 = T_1' - \dfrac{ke^2}{2r'}$.

Por conservación de la energía, $T_1' = T_2 + \frac{1}{2}ke^2\left(\dfrac{1}{r'}-\dfrac{1}{r}\right)$.

Capítulo 5

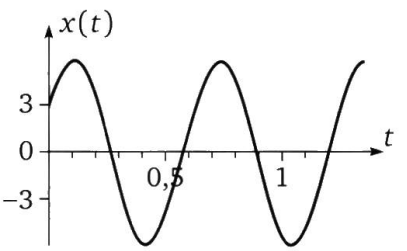
5.3 $U(\phi) = mgl(1-\cos\phi)$ y $k = mgl$.

5.5 (a) $B_1 = C_1 + C_2$ y $B_2 = i(C_1 - C_2)$.

(b) $A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ y $\delta = \operatorname{arctg}(B_2/B_1)$, seleccionados en el cuadrante correcto.

(c) $C = Ae^{-i\delta}$. **(d)** $C_1 = C/2$ y $C_2 = C^*/2$.

5.7 (a) $B_1 = x_0$ y $B_2 = v_0/\omega$. **(b)** $\omega = 10\ \text{s}^{-1}$, $B_1 = 3$ m, $B_2 = 5$ m.



(c) La primera vez que $x = 0$ es $t = 0{,}26$ s; la primera vez que $\dot{x} = 0$ es $t = 0{,}10$ s.

5.9 Período, $\tau = 1{,}05$ s.

5.11
$$A = \sqrt{\frac{x_2^2v_1^2 - x_1^2v_2^2}{v_1^2v_2^2}} \quad \text{y} \quad \omega = \sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_1^2 - x_2^2}}.$$

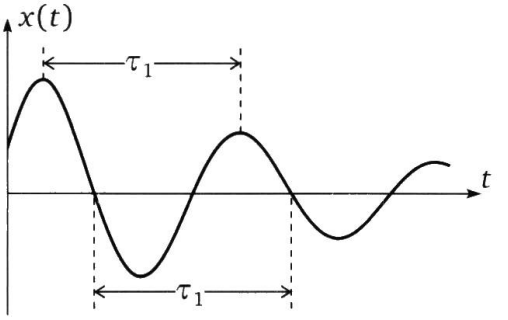
5.13
$$r_0 = \lambda R \quad \text{y} \quad \omega = \sqrt{\frac{U_0}{m\lambda R^2}}.$$

5.17 (a) Si la fracción p/q está en sus términos más bajos, $\tau = 2\pi p/\omega_x$.

5.19 $k' = 2k(2a - l_0)/a$.

5.23 $dE/dt = \dot{x}(m\ddot{x} + kx)$.

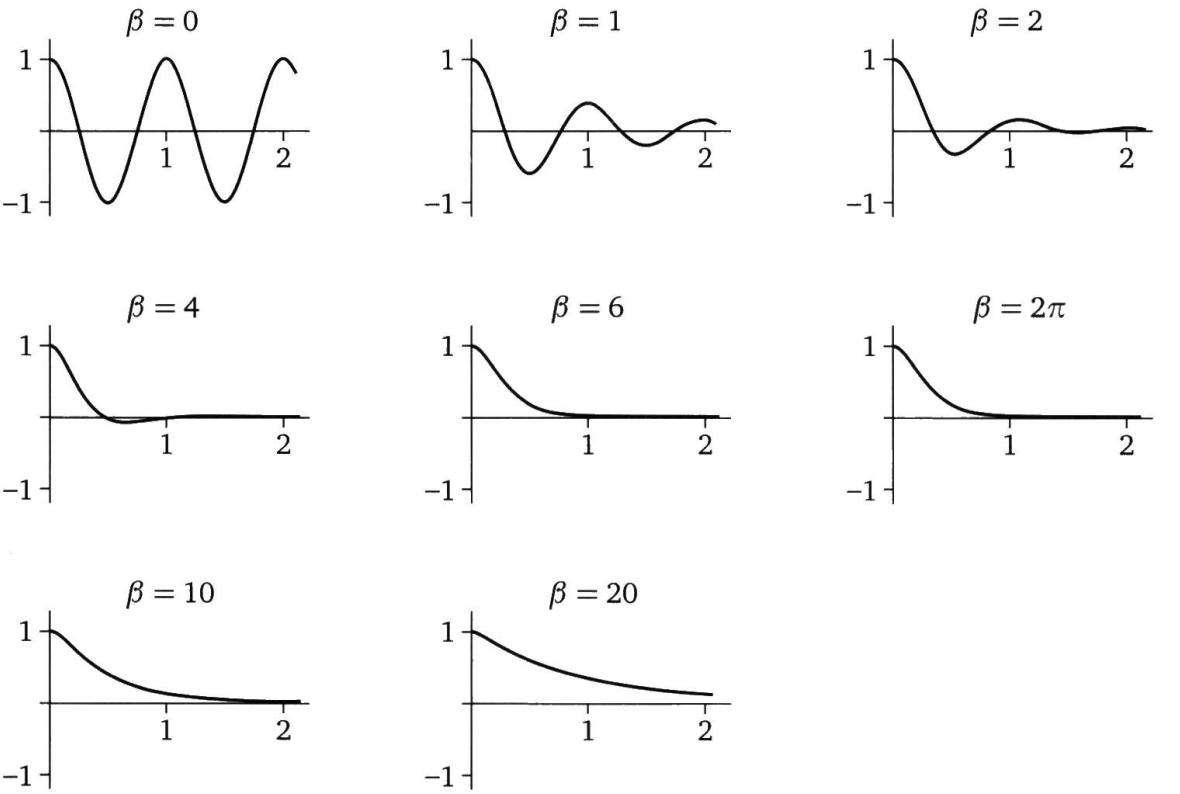
5.25 (a) y **(b)**



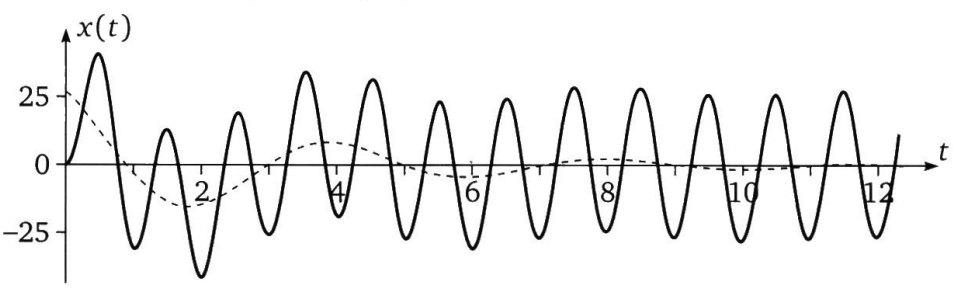
(c) Con $\beta = \omega_0/2$, la amplitud decrece por un factor de 0,026 en un período (mucho más que en el dibujo, para el que se escogió β para que fuese $\omega_0/10$ y el factor de decrecimiento es alrededor de 0,53).

5.29 $\tau_1 = 1{,}006$ segundos, y $\beta = 0{,}110\omega_0$.

5.31 Cada dibujo muestra $x(t)$ como una función de t para el valor indicado de β.



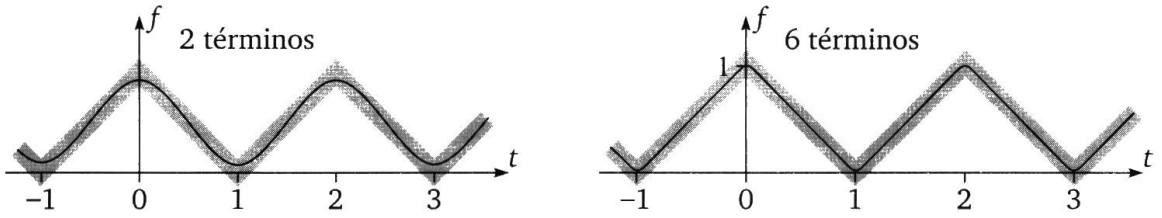
5.37 $A = 1{,}07$, $\delta = 3{,}04$ rad, $B_1 = 1{,}07$ y $B_2 = -0{,}247$.



La curva continua es el movimiento real; la curva a trazos es la solución homogénea transitoria.

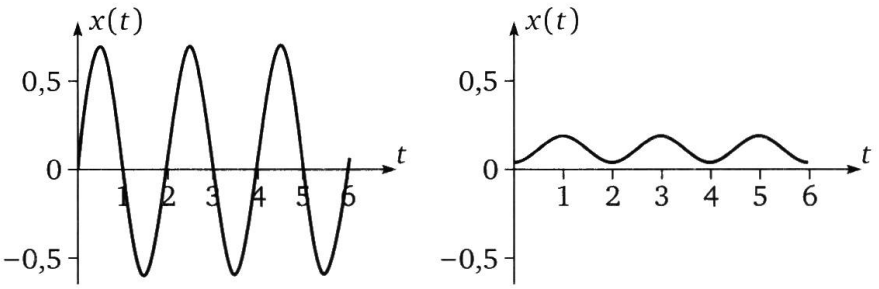
5.43 (a) $k \approx 4 \times 10^4$ N/m. **(b)** $f \approx 6$ Hz. **(c)** $v \approx 5$ m/s o alrededor de 10 mph.

5.49 $a_0 = f_{\text{máx}}/2$ y $a_n = 4f_{\text{máx}}/(n\pi)^2$, para n impar pero 0 para n par ($n > 0$); $b_n = 0$ para todos n.



El dibujo de la izquierda muestra la suma de los dos primeros términos (el término constante más el primer coseno) y la propia función «diente de sierra». El dibujo de la derecha muestra la suma de los seis primeros términos. Ésta sigue tan de cerca al «diente de sierra» que es difícil distinguirlas salvo por las esquinas.

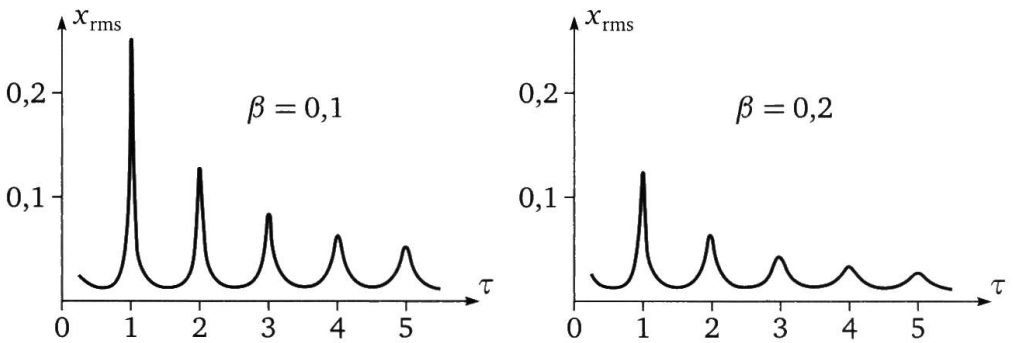
5.53 $A_0 = 1/2\omega_o^2$, $A_n = 4/n^2\pi^2\sqrt{(\omega_o^2 - n^2\omega^2)^2 + (2\beta n\omega)^2}$ para n impar pero cero para n par (> 0). **(a)** Con $\tau_o = 2$, $\omega_o = \pi$, y los primeros cuatro coeficientes A_n ($n = 0, 1, 2, 3$) son 0,0507, 0,6450, 0 y 0,0006.



(a) **(b)**

(b) Con $\tau_o = 3$, $\omega_o = 2\pi/3$, y los primeros cuatro coeficientes A_n ($n = 0, 1, 2, 3$) son 0,1140, 0,0734, 0 y 0,0005.

5.57



El dibujo de la izquierda muestra los datos para este problema; el de la derecha muestra los datos de la Figura 5.26 (aunque aquí representados a una escala ligeramente diferente). Hay que fijarse en que las resonancias con $\beta = 0{,}1$ son el doble de altas y la mitad de anchas que las correspondientes a $\beta = 0{,}2$.

Capítulo 6

6.3 El tiempo para viajar de P_1 a P_2 pasando por Q es $\left(\sqrt{x^2 + y_1^2 + z^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2 + z^2}\right)/c$.

6.5 El tiempo para viajar de A a B pasando por P es $2\sqrt{2}(R/c)\cos(\theta/2)$.

6.7 $\phi = az + b$, donde las constantes a y b se seleccionan con el objetivo de que el camino pase por los puntos finales dados. Por lo general, existen muchos caminos diferentes con esta forma.

6.9 $y = \operatorname{senh}(x)/\operatorname{senh}(1)$.

6.11 El camino es una parábola, $x = C + (y-D)^2/4C$, con C y D constantes.

6.17 $\rho = \rho_0/\cos[(\phi-\phi_0)/\sqrt{1+\lambda^2}]$. Con $\lambda = 0$, el cono se convierte en un plano, y esta ecuación se convierte en la ecuación de una línea recta.

6.23 (a) $v = \sqrt{(v_0\cos\phi + Vy)^2 + (v_0\operatorname{sen}\phi)^2}$. **(c)** $y_{\text{máx}} = 366$ millas; (tiempo ahorrado) $= 27$ minutos.

Capítulo 7

7.1 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - mgz$. Las tres ecuaciones de Lagrange son $0 = m\ddot{x}$, $0 = m\ddot{y}$ y $-mg = m\ddot{z}$.

7.3 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2+y^2)$. Las dos ecuaciones de Lagrange son $m\ddot{x} = -kx$ y $m\ddot{y} = -ky$. Este es el oscilador isotrópico de la Sección 5.3.

7.5

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \qquad \text{y} \qquad (\nabla f)_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}.$$

7.7 (a) $m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = -\nabla_\alpha U, \quad [\alpha = 1, \cdots, N]$, **(b)** $\mathcal{L} = \sum_\alpha \frac{1}{2}m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 - U(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N)$.

7.9 $x = R\cos\phi, \quad y = R\operatorname{sen}\phi$ y $\phi = \operatorname{arctg}(y/x)$, seleccionado para permanecer en el cuadrante correcto.

7.11 $x = A\cos\omega t + l\operatorname{sen}\phi, \quad y = l\cos\phi$ y $\phi = \operatorname{arctg}[(x - A\cos\omega t)/y]$.

7.15 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + m_2 g x, \quad a = gm_2/(m_1+m_2)$.

7.17 $\ddot{x} = g(m_1-m_2)/(m_1+m_2+I/R^2)$.

7.21 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2)$ y $r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$.

7.23 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x} - A\omega\operatorname{sen}\omega t)^2 - \frac{1}{2}kx^2$.

7.27 (Aceleración de la masa $4m$) $= g/7$ hacia abajo.

7.29 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left[R^2\omega^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2Rl\omega\dot{\phi}\operatorname{sen}(\phi-\omega t)\right] - mg(R\operatorname{sen}\omega t - l\cos\phi)$ y $l\ddot{\phi} = -g\operatorname{sen}\phi + \omega^2 R\cos(\phi-\omega t)$.

7.31 (a) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\left(L^2\dot{\phi}^2 + 2\dot{x}L\dot{\phi}\cos\phi\right) - \frac{1}{2}kx^2 + MgL\cos\phi$. Las ecuaciones de x y ϕ son

$$(m+M)\ddot{x} + ML(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\operatorname{sen}\phi) = -kx \quad \text{y} \quad M(L\ddot{\phi} + \ddot{x}\cos\phi) = -Mg\operatorname{sen}\phi.$$

(b) Con x y ϕ pequeñas ambas, éstas se convierten en

$$(m+M)\ddot{x} + ML\ddot{\phi} = -kx \qquad \text{y} \qquad M(L\ddot{\phi} + \ddot{x}) = -Mg\phi.$$

7.33 $x(t) = x_0\cosh\omega t + (g/2\omega^2)(\operatorname{sen}\omega t - \operatorname{senh}\omega t)$.

7.35 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\left[\omega^2 + (\dot{\phi}+\omega)^2 + 2\omega(\dot{\phi}+\omega)\cos\phi\right]$. Para oscilaciones pequeñas alrededor de B, la frecuencia angular es ω.

7.37 (a) $\mathcal{L} = m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - mgr$. **(b)** Las ecuaciones de r y ϕ son $mr\dot{\phi}^2 - mg = 2m\ddot{r}$ y $mr^2\dot{\phi} =$ cte. **(c)** $r_0 = [\ell^2/(m^2 g)]^{1/3}$. **(d)** Frecuencia angular $= \sqrt{3/2}\,\ell/mr_0^2$.

7.39 (a) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) - U(r)$

(b) Las ecuaciones de r, θ y ϕ son

$$m\ddot{r} = mr\left(\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) - \partial U/\partial r$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = mr^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}\right) = 0.$$

(c) El movimiento permanece en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, lo que confirma nuestro conocimiento de que el movimiento está confinado a un plano.

(d) El movimiento permanece en el plano longitudinal $\phi = \phi_0$.

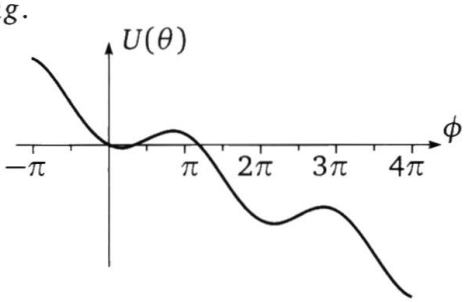
7.41 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2 + 4k^2\rho^2\dot{\rho}^2\right) - mgk\rho^2$, y la ecuación de movimiento es

$$(1 + 4k^2\rho^2)\ddot{\rho} + 4k^2\rho\dot{\rho}^2 = (\omega^2 - 2gk)\rho.$$

El final del alambre, $\rho = 0$, es un equilibrio, que es estable si $\omega^2 < 2gk$, pero es inestable si $\omega^2 > 2gk$. Si $\omega^2 = 2gk$, la cuenta se encuentra en equilibrio en *cualquier* ρ, pero el equilibrio resulta inestable (excepto en $\rho = 0$).

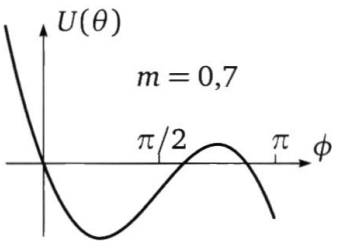
7.43 (a) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)R^2\dot{\phi}^2 - MgR(1-\cos\phi) + mgR\phi$, y la ecuación de movimiento es $(M+m)R\ddot{\phi} = -Mg \operatorname{sen}\phi + mg$.

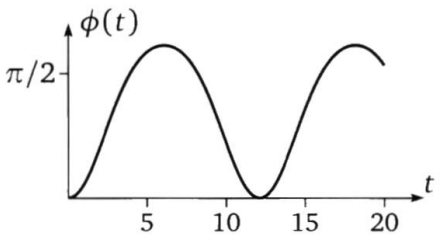
(b)



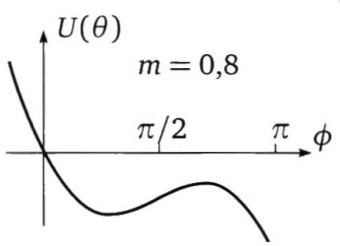
Advierta que existen realmente varios equilibrios, separados por una o más revoluciones completas.

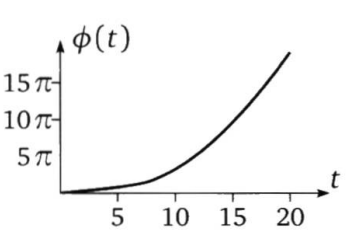
(c)





(d)





7.49 (b) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}qB\rho^2\dot\phi$, y las tres ecuaciones de Lagrange

$$m\ddot\rho = m\rho\dot\phi^2 + qB\rho\dot\phi, \qquad \frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot\phi + \tfrac{1}{2}qB\rho^2\right) = 0 \qquad \text{y} \qquad m\ddot z = 0.$$

7.51 $\mathcal{L}(x,y) = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) + mgy$. **(a)** Las dos ecuaciones de Lagrange modificadas son

$$\lambda\frac{x}{l} = m\ddot x \qquad \text{y} \qquad mg + \lambda\frac{y}{l} = m\ddot y.$$

Capítulo 8

8.3 $y_1 = L + \dfrac{m_1}{M}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \dfrac{m_2 v_0}{M\omega}\operatorname{sen}\omega t$ y $y_2 = \dfrac{m_1}{M}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 - \dfrac{m_1 v_0}{M\omega}\operatorname{sen}\omega t$.

8.7 (a) Período $\tau = 2\pi r^{3/2}/\sqrt{Gm_2}$. **(b)** $\tau = 2\pi r^{3/2}/\sqrt{GM}$. Estas dos respuestas son la misma en el límite en que $m_2 \to \infty$. **(c)** $\tau = 0{,}71$ años.

8.9 (a) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot X^2 + \dot Y^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot r^2 + r^2\dot\phi^2) - \frac{1}{2}k(r-L)^2$.

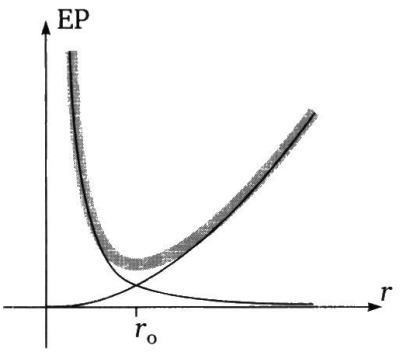
(b) $M\ddot X = 0$ y $M\ddot Y = 0$, con soluciones $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \dot{\mathbf{R}}_0 t$. **(c)**Las ecuaciones de r y de ϕ son

$$\mu\ddot r = \mu r\dot\phi^2 - k(r-L) \qquad \text{y} \qquad \mu r^2\dot\phi = \text{cte}.$$

Si $r = $ cte, entonces $\dot\phi = $ cte, y $r = L + \mu r\dot\phi^2/k$.

Si $\phi = $ cte, entonces $r = L + A\cos(\omega t - \delta)$, donde $\omega = \sqrt{k/\mu} = \sqrt{2k/m_1}$.

8.13 (a)



(b) $r_0 = (\ell^2/k\mu)^{1/4}$. **(c)** Frecuencia angular de las oscilaciones, $\omega = \sqrt{4k/\mu}$.

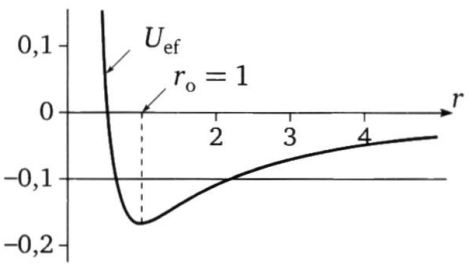
8.15 Variación porcentual $\approx 0{,}1\,\%$.

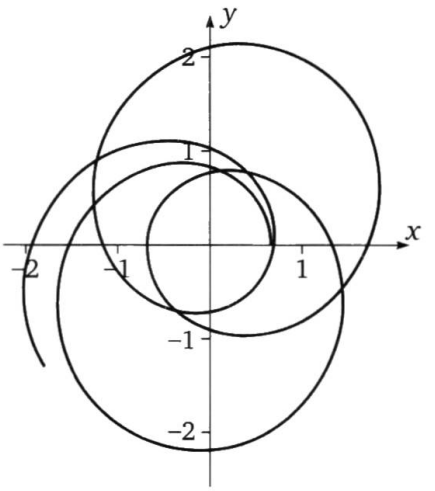
8.19 Excentricidad, $\epsilon = 0{,}17$; (altura cuando sobre el eje y) $= 1424$ km.

8.21 (a) Si $\ell \to 0$, entonces $a \to r_{\text{máx}}/2$. **(b)** $\tau_{(\ell\to 0)} = (\pi/\sqrt{2GM})(r_{\text{máx}})^{3/2}$.
(c) $t = (\pi/2\sqrt{2GM})(r_{\text{máx}})^{3/2}$. **(d)** y **(e)** $\tau_{(\ell=0)} = (2\pi/\sqrt{2GM})(r_{\text{máx}})^{3/2} = 2\tau_{(\ell\to 0)}$.

8.23 (b) $\beta = \sqrt{1 + m\lambda/\ell^2}$ y $c = \ell^2\beta^2/mk$. **(c)** La órbita es cerrada si β es un número racional, $\beta = p/q$ (donde p y q son enteros). Si $\lambda \to 0$, la órbita se convierte en una elipse de Kepler.

8.25 (a) $r_o = 1$.





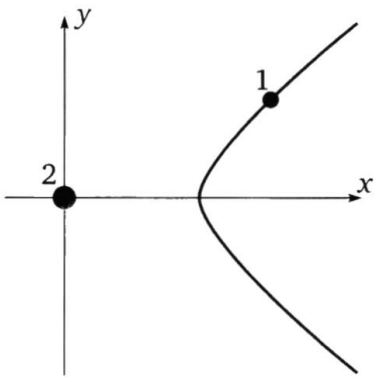
(b) Se puede ver de la imagen de la izquierda que si $E = -0{,}1$, el punto interior de retorno está alrededor de $r_{mín} = 0{,}7$. Si lo utilizamos como valor de comienzo para cualquier programa de resolución de ecuaciones (tal como el FindRoot de Mathematica), encontramos que esta raíz de la ecuación $U_{ef}(r) = -0{,}1$ es realmente $r_{mín} = 0{,}6671$.

(c) Obviamente la órbita mostrada a la derecha no se ha cerrado después de 3,5 revoluciones, y claramente no se cerrará durante un largo tiempo. (De hecho, nunca lo hace, pero esto ya es más difícil de probar.)

8.27 $c = 8{,}87 \times 10^7$ km, $\epsilon = 0{,}753$, $\delta = 1{,}72$ rad.

8.29 La nueva órbita sería una parábola, tangente a la antigua órbita circular en el punto en el que la gran desaparición ocurrió. La Tierra sencillamente estaría no confinada.

8.31 El esquema muestra la trayectoria de la posición relativa $\mathbf{r} = (x, y)$, esto es, la órbita de la partícula 1 vista desde la partícula 2.



8.35 Primer factor de empuje $= \sqrt{2/5}$; segundo $= \sqrt{5/8}$.

Capítulo 9

9.1 Ángulo de inclinación $= \operatorname{arctg}(A/g)$ con la vertical.

9.3 (a) $F_{marea}/mg \approx 1{,}1 \times 10^{-7}$. **(b)** Misma magnitud, dirección opuesta.

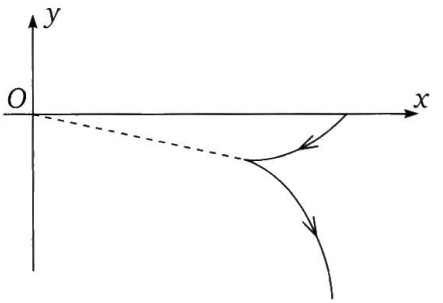
9.9 $\mathbf{F}_{Cor} = 2mv_o\Omega\cos\theta$ hacia el este; $F_{Cor}/mg \approx 0{,}011$.

9.13 El valor máximo de α es unos 0,1°; el mínimo es cero.

9.15 $g = g_0\sqrt{\cos^2\theta + \lambda^2 \operatorname{sen}^2\theta}$.

9.19 **(a)** Visto desde el suelo, el disco se desplaza en línea recta. Visto desde el tiovivo, su aceleración inicial es radialmente hacia fuera; a medida que acelera, se curva hacia su derecha y se mueve en espiral hacia fuera desde el centro. **(b)** Visto desde el suelo, permanece estacionario. Visto desde el tiovivo, se desplaza en un círculo en sentido de las agujas del reloj centrado en el eje del tiovivo.

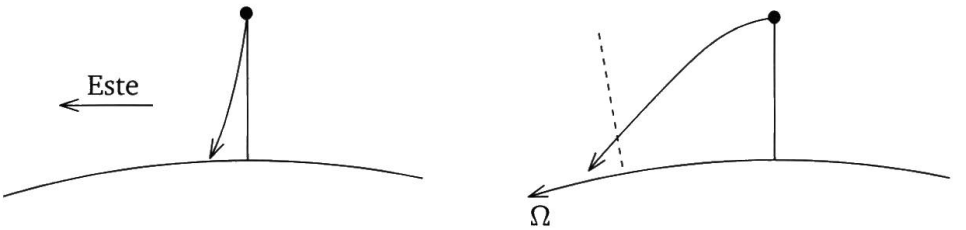
9.21



Esto es lo que sucede en el Problema 9.24 (d).

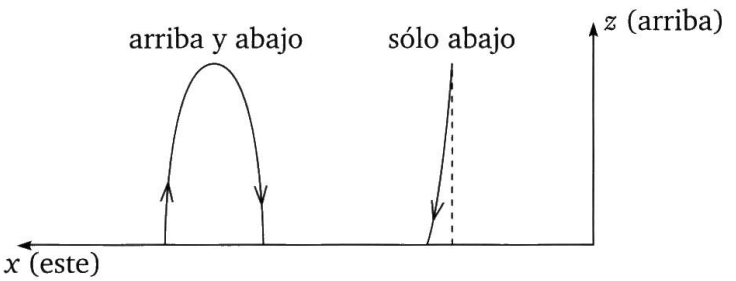
9.25 Ángulo = 0,13° a la izquierda.

9.27



(a) Visto desde la Tierra **(b)** Visto desde el espacio

9.29



9.31 $v = 0{,}11$ mm/s.

9.33 $$C_1 = \frac{A}{2}\left(1 + \frac{\Omega_z}{\omega_0}\right) \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{A}{2}\left(1 - \frac{\Omega_z}{\omega_0}\right).$$

Capítulo 10

10.3 $\mathbf{R} = (0, 0, H/5)$.

10.5 $\mathbf{R} = (0, 0, 3R/8)$.

10.7 **(a)** $V = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos\theta_0)$; **(b)** $\mathbf{R} = (0, 0, Z)$ donde $Z = \frac{3R}{16} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta_0}{1 - \cos\theta_0}$.

10.9 $I = \frac{1}{2}MR^2$.

10.11 (a) $I(\text{sólido}) = \dfrac{2}{5}MR^2$; **(b)** $I(\text{hueco}) = \dfrac{2}{5}M\dfrac{b^5-a^5}{b^3-a^3}$.

10.13 (a) $\omega = \sqrt{mga/I}$; **(b)** $l = I/(ma)$.

10.15 $\omega = \sqrt{3g/(a\sqrt{2})}$.

10.17 $I_{zz} = \frac{1}{5}M(a^2+b^2)$.

10.23 Todos los productos de inercia que tengan z son cero automáticamente, $I_{xz} = I_{yz} = I_{zx} = I_{zy} = 0$.

10.25 (a) y **(b)** los tensores de inercia $\mathbf{I}_{\text{cm}}$ alrededor del CM y $\mathbf{I}_A$ alrededor de A son

$$\mathbf{I}_{\text{cm}} = \frac{1}{3}M\begin{bmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

$$\mathbf{I}_A = \frac{1}{3}M\begin{bmatrix} 4(b^2+c^2) & -3ab & -3ac \\ -3ba & 4(c^2+a^2) & -3bc \\ -3ca & -3cb & 4(a^2+b^2) \end{bmatrix}.$$

(c) $\mathbf{L} = \frac{1}{3}M\omega(4(b^2+c^2), -3ab, -3ac)$.

10.27

$$\mathbf{I} = \frac{1}{4}M\begin{bmatrix} (R^2+2h^2) & 0 & 0 \\ 0 & (R^2+2h^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{bmatrix}.$$

10.35 (a)

$$\mathbf{I} = ma^2\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

(b) Los momentos principales son $\lambda_1 = 10ma^2$, $\lambda_2 = 7ma^2$ y $\lambda_3 = 5ma^2$. Las direcciones principales correspondientes son $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$ y $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$.

10.37 (a)

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(b) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 4$; $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ y $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$.

10.39 $\Omega \approx 21$ rad/s o unas 200 rpm.

10.47 Unos 1010 años.

10.53 $b^2 \gg 4ac$.

10.57 (a) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{X}^2+\dot{Y}^2) + \frac{1}{2}\lambda_1^{\text{cm}}(\dot{\phi}^2\,\text{sen}^2\,\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\lambda_3^{\text{cm}}(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)^2 - MgR\cos\theta$, donde λ_1^{cm} y λ_3^{cm} son los dos momentos principales en torno al CM. **(c)** El ritmo de precesión más grande es mayor en torno al CM que alrededor de la punta. De acuerdo con (10.111) el ritmo pequeño permanece inalterado. [Pero advierta que (10.111) es una aproximación; si mantenemos el siguiente término en la aproximación, vemos que el ritmo más pequeño se reduce ligeramente.]

Capítulo 11

11.1 $k_1(l_1 - L_1) = k_2(l_2 - L_2) = k_3(l_3 - L_3)$

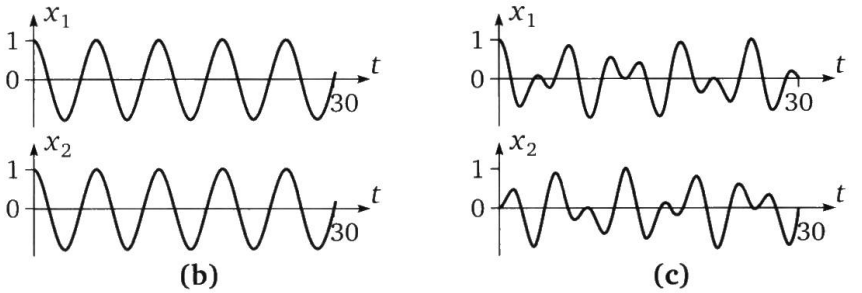
11.3
$$\omega^2 = \frac{1}{2m_1m_2}\Big\{m_1(k_2+k_3)+m_2(k_1+k_2) \pm \sqrt{m_1^2(k_2+k_3)^2+m_2^2(k_1+k_2)^2-2m_1m_2(k_2k_3+k_3k_1+k_1k_2-k_2^2)}\Big\}.$$

11.5 (a) Sean $m_1 = m_2 = m$ y $k_1 = k_2 = k$ y $\omega_o = \sqrt{k/m}$. Entonces las frecuencias normales son

$$\omega_1 = \omega_o\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = 0{,}62\omega_o \quad \text{y} \quad \omega_2 = \omega_o\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = 1{,}62\omega_o.$$

(b) En el modo 1, las dos vagonetas oscilan en fase, con la amplitud de m_2 igual a 1,62 veces la de m_1. En el modo 2, oscilan exactamente fuera de fase, con la amplitud de m_2 igual a 0,62 veces la de m_1.

11.7 (b) $B_1 = A$ y $B_2 = C_1 = C_2 = 0$.



(c) $B_1 = B_2 = A/2$ y $C_1 = C_2 = 0$.

11.9 (b) $\xi_1 = A_1\cos(\omega_1 t - \delta_1)$ y $\xi_2 = A_2\cos(\omega_2 t - \delta_2)$, donde $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ y $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$, y $A_1, \delta_1, A_2, \delta_2$ son todas constantes arbitrarias. Es por ello que

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t - \delta_1) + A_2\cos(\omega_2 t - \delta_2)$$
$$x_2 = A_1\cos(\omega_1 t - \delta_1) - A_2\cos(\omega_2 t - \delta_2).$$

11.11 (a)
$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 - b\dot{x}_1 + F_o\cos\omega t$$
$$m\ddot{x}_1 = kx_1 - 2kx_2 - b\dot{x}_2.$$

(c)
$$\xi_1(t) = A_1\cos(\omega t - \delta_1) + B_1e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t - \delta_1^{tr})$$
$$\xi_2(t) = A_2\cos(\omega t - \delta_2) + B_2e^{-\beta t}\cos(\omega_2 t - \delta_2^{tr})$$

donde las constantes $A_1, A_2, \delta_1, \delta_2$ están dadas por las Ecs. (5.64) y (5.65) (excepto que ahora $f_o = F_o/2m$ y, en caso de que A_2 y δ_2, ω_o^2 sea sustituida por $3\omega_o^2$); las constantes $B_1, B_2, \delta_1^{tr}, \delta_2^{tr}$ en los términos del transitorio son arbitrarias y están determinadas por las condiciones iniciales, y $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$, mientras que $\omega_2 = \sqrt{3\omega_o^2 - \beta^2}$.

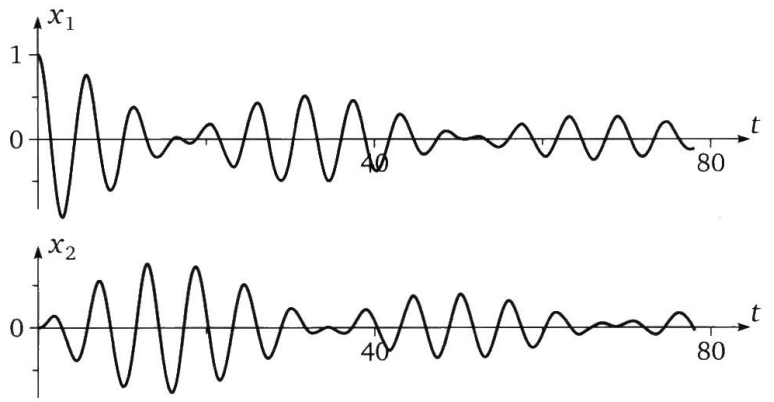
11.13 (b) Sean $\beta = b/2m$, $\omega_1 = \sqrt{k/m - \beta^2}$ y $\omega_2 = \sqrt{(k+2k)/m - \beta^2}$. Entonces

$$\xi_1 = e^{-\beta t}(B_1\cos\omega_1 t + C_1\operatorname{sen}\omega_1 t) \quad \text{y} \quad \xi_2 = e^{-\beta t}(B_2\cos\omega_2 t + C_2\operatorname{sen}\omega_2 t)$$

donde B_1, C_1, B_2, C_2 son constantes arbitrarias.

(c) Con las condiciones iniciales dadas (y $\beta \ll 1$)

$$x_1 = \tfrac{1}{2}Ae^{-\beta t}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \qquad \text{y} \qquad x_2 = \tfrac{1}{2}Ae^{-\beta t}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t).$$



11.15 $\mathcal{L} = T - U$ donde T y U vienen dadas en (11.38) y (11.37). La ecuación θ_1 es

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)L_1^2\ddot{\theta}_1 \;+\; & m_2L_1L_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + m_2L_1L_2\dot{\theta}_2^{\,2}\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\\ &= -(m_1+m_2)gL_1\operatorname{sen}\theta_1\end{aligned}$$

y la ecuación θ_2 es

$$\begin{aligned}m_2L_1L_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) \;+\; & m_2L_2^2\ddot{\theta}_2 - m_2L_1L_2\dot{\theta}_1^{\,2}\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\\ &= -m_2gL_2\operatorname{sen}\theta_2.\end{aligned}$$

11.17 (a) $\omega_1^2 = \frac{3}{4}\omega_o^2$ y $\omega_2^2 = \frac{3}{2}\omega_o^2$.

Para el primer modo, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; para el segundo, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \dfrac{\alpha}{6}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\cos\omega_1 t - \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\cos\omega_2 t\right\}$, que no es periódico.

11.19 (a) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + ML\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 - \left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}MgL\theta^2\right)$. Las ecuaciones x y θ son

$$(m+M)\ddot{x} + ML\ddot{\theta} = -kx \qquad \text{y} \qquad ML\ddot{x} + ML^2\ddot{\theta} = -MgL\theta.$$

(b) Con los valores numéricos dados, las frecuencias normales son

$$\omega_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0{,}77 \qquad \text{y} \qquad \omega_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = 1{,}85.$$

En el primer modo, la vagoneta y el peso oscilan en fase (ambos moviéndose hacia la derecha y después hacia la izquierda) con la amplitud del peso (del movimiento en relación a la vagoneta) $\sqrt{2}$ veces mayor que la del carro. En el segundo modo, la vagoneta y el peso oscilan exactamente fuera de fase, de nuevo con la amplitud del peso igual a $\sqrt{2}$ veces que la de la vagoneta .

11.23 $\omega_2^2 = \dfrac{g}{L} + \dfrac{k}{m}$, y $\omega_3^2 = \dfrac{g}{L} + 3\dfrac{k}{m}$.

11.25 Si $\omega_o = \sqrt{k/m}$, entonces las frecuencias normales son

$$\omega_1 = \omega_o\sqrt{2-\sqrt{2}}, \qquad \omega_2 = \omega_o\sqrt{2}, \qquad \text{y} \qquad \omega_3 = \omega_o\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

En el primer modo, las tres vagonetas oscilan en fase, con $a_1 = a_3 = a_2/\sqrt{2}$; en el segundo, la vagoneta de en medio es estacionaria, mientras que la primera y la tercera oscilan exactamente fuera de fase, con $a_1 = -a_3$ y $a_2 = 0$; en el tercero, las vagonetas de la derecha y de la izquierda oscilan en fase, mientras que la de en medio oscila fuera de fase, con $a_1 = a_3 = -a_2/\sqrt{2}$.

11.27 (a) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2$. Las frecuencias normales son $\omega_1 = 0$ y $\omega_2 = \omega_0\sqrt{2}$ (con $\omega_0 = \sqrt{k/m}$). **(b)** En el segundo modo, las dos vagonetas oscilan con igual amplitud pero fuera de fase. **(c)** En el primer modo, $x_1 = x_2 = x_0 + v_0 t$; esto es, se mueven a una velocidad constante con el muelle en su longitud de equilibrio.

11.29 $\omega_1 = \sqrt{2k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{6k/m}$ y $\omega_3 = \sqrt{g/r_0}$, donde r_0 es el valor del equilibrio de r.

11.31 Las tres frecuencias normales son 0, $\sqrt{2}\,\omega_0$ y $\sqrt{3}\,\omega_0$.

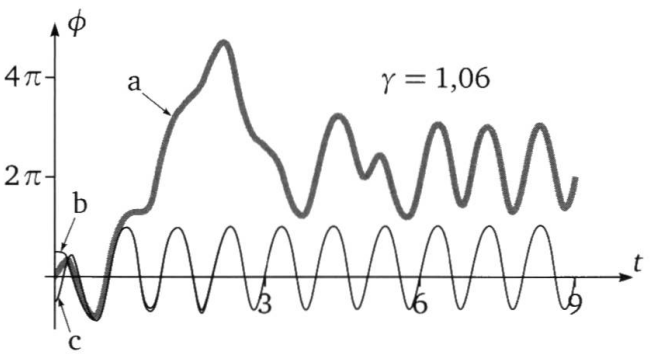
11.35 (a) $\xi_1 = \phi_1 + \phi_2$ y $\xi_2 = \phi_1 - \phi_2$ (o cualquier múltiplo de éstos). **(c)** El primer modo tiene $\phi_1 = \phi_2 = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t - \delta)$, y el segundo $\phi_1 = -\phi_2 = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_2 t - \delta)$, donde

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L} - \beta^2}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{m} - \beta^2} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{b}{2m}.$$

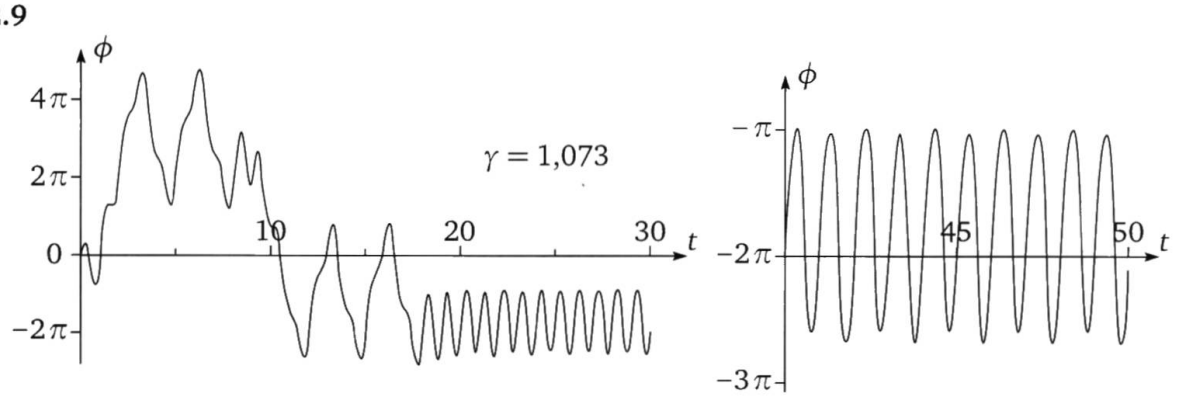
Capítulo 12

12.1 $x_1(t) = (t + k)^2 + 1$, para cualquier constante k.

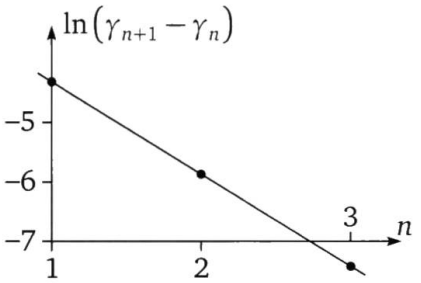
12.7



12.9

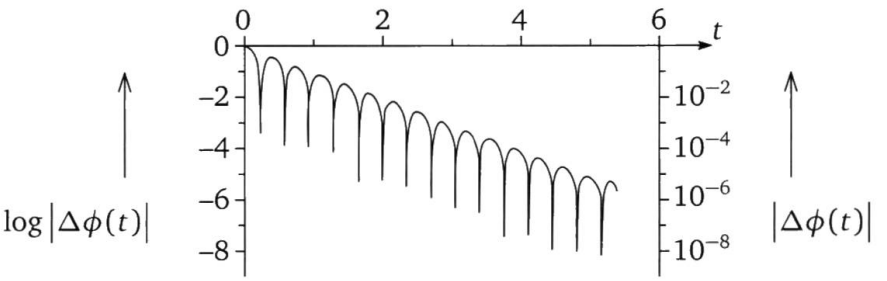


12.11 (b) La línea de mínimos cuadrados tiene una pendiente de $-1{,}54$, que da $\delta = e^{1{,}54} = 4{,}66$, comparada con el valor correcto de 4,67.



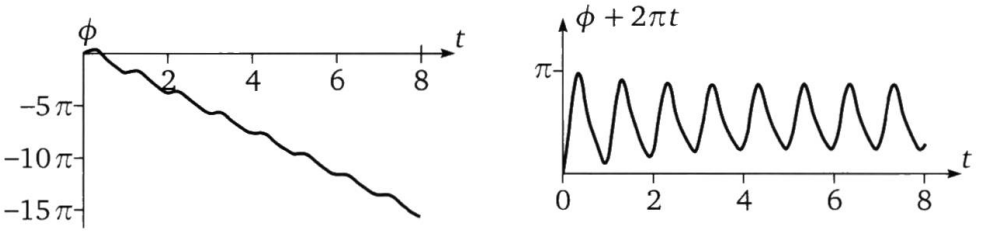
12.13 $\lambda \approx 0{,}64$.

12.15

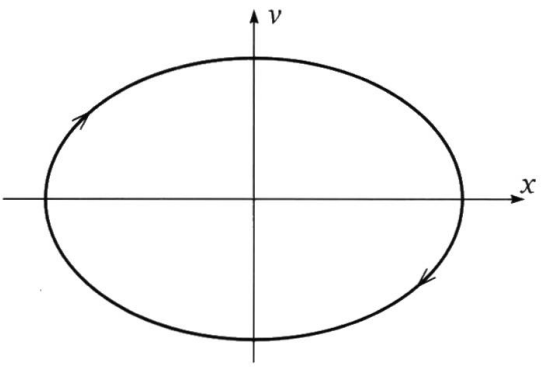


El dibujo confirma que $\Delta\phi(t)$ decrece de manera exponencial.

12.17



12.19 (a) $x = A\cos(\omega t - \delta)$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$, y A y δ son constantes arbitrarias.

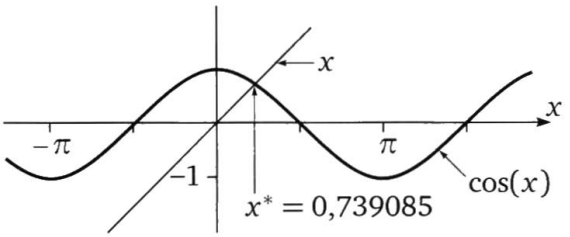


(b) $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \text{cte}$.

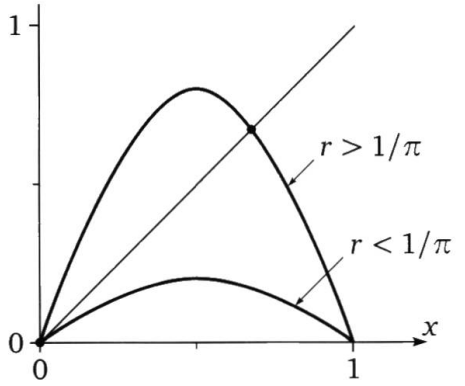
12.21 (a)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\cdots$	x_{28}	x_{29}	x_{30}
0	1,00	0,54	0,86	0,65	0,793	$\cdots$	0,7391	0,7391	0,7391
3	−0,99	0,55	0,85	0,66	0,791	$\cdots$	0,7391	0,7391	0,7391
100	0,86	0,65	0,80	0,70	0,765	$\cdots$	0,7391	0,7391	0,7391

(b) Existe un atractor, único y estable en $x^* = 0{,}739085$.

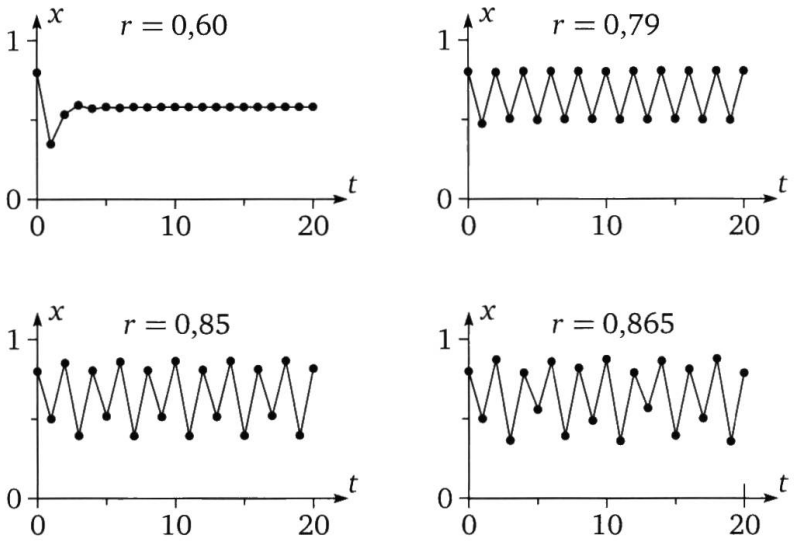


12.23 (a)



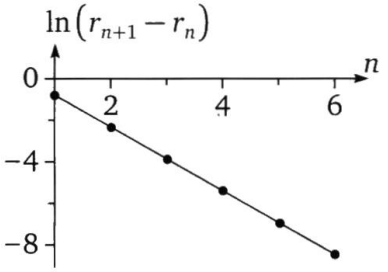
(b) $r_0 = 1/\pi = 0{,}318$. **(c)** $r_1 = 0{,}720$.

12.25



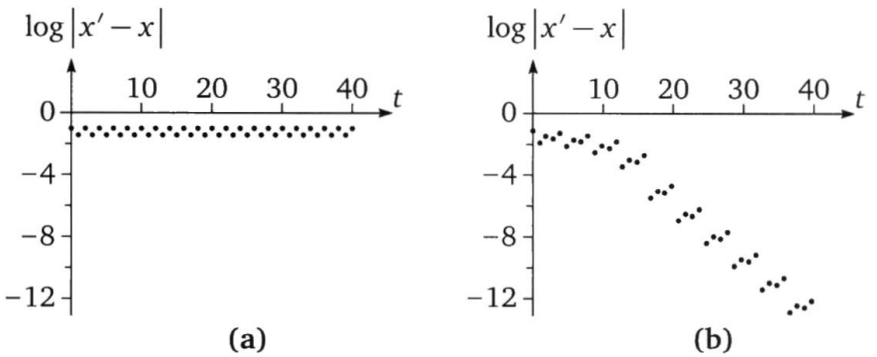
12.27 (c) $x_a = 0{,}5130$ y $x_b = 0{,}7995$.

12.29



De la pendiente donde encajan los mínimos cuadrados, obtenemos $\delta = 4{,}71$.

12.31



12.33 Vea la Figura 12.41.

Capítulo 13

13.1 $\mathcal{H} = p^2/2m$. Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{x} = p/m$ y $\dot{p} = 0$, con soluciones $p = p_0 = \text{cte.}$, y $x = x_0 + v_0 t$, donde $v_0 = p_0/m$.

13.3 El hamiltoniano es $\mathcal{H} = p^2/2(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M) - (m_1 - m_2)gx$. Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{x} = p/(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)$ y $\dot{p} = (m_1 - m_2)g$, y la aceleración es $\ddot{x} = g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)$.

13.5 El hamiltoniano y las dos ecuaciones de Hamilton son

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m(c^2 + R^2)} + mgc\phi, \qquad \dot{\phi} = \frac{p}{m(c^2 + R^2)} \qquad \text{y} \qquad \dot{p} = -mgc.$$

Combinando las dos últimas obtenemos $\ddot{z} = c\ddot{\phi} = -g\,c^2/(c^2 + R^2)$.

13.7 (a) $\mathcal{H} = \dfrac{p^2}{2m[1 + h'(x)^2]} + mgh(x)$. **(b)** Las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{x} = \frac{p}{m[1 + h'(x)^2]} \qquad \text{y} \qquad \dot{p} = \frac{p^2 h'(x)h''(x)}{m[1 + h'(x)^2]^2} - mgh'(x).$$

13.9 El hamiltoniano es $\mathcal{H} = (p_x^2 + p_y^2)/2m + mgy$. Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{x} = p_x/m, \dot{p}_x = 0, \dot{y} = p_y/m,$ y $\dot{p_y} = -mg$.

13.11 El hamiltoniano es $\mathcal{H} = \dfrac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - p_x V + mgz$ (con x medido a lo largo de las pistas y z verticalmente hacia arriba).

13.13 $\mathcal{H} = \dfrac{1}{2m}\left(p_z^2 + \dfrac{p_\phi^2}{R^2}\right) + \frac{1}{2}k(R^2 + z^2)$, $z = A\cos(\omega t - \delta)$, y $\dot{\phi} = \text{cte.}$

13.17 (a) $z_0 = [p_\phi^2/(m^2c^2g)]^{1/3}$ **(d)** $\alpha = \text{arcsen}\,(1/\sqrt{3}) = 35{,}3°$.

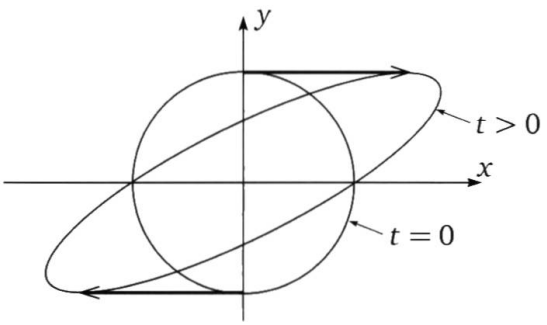
13.19 $\mathcal{H} = \dfrac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + U(\sqrt{x^2 + y^2})$.

13.21 (a) $\mathcal{H} = \dfrac{1}{2M}(P_x^2 + P_y^2) + \dfrac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \dfrac{p_\phi^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}k(r - l_0)^2$. X, Y y ϕ son despreciables; r no lo es. **(c)** $r = l_0 + A\cos(\omega t - \delta)$, donde $\omega = \sqrt{k/\mu}$ y A y δ son constantes.

13.23 (b) Los dos momentos conjugados son $p_x = m(\dot{x} + \dot{y})$ y $p_y = m(\dot{x} + 4\dot{y})$. $\mathcal{H} = \dfrac{1}{2m}\left[\frac{1}{3}(p_x - p_y)^2 + p_x^2\right] + \frac{1}{2}kx^2$. **(c)** $x = x_0 \cos \omega t$ e $y = y_0 + \frac{1}{4}x_0(1 - \cos \omega t)$, donde $\omega = \sqrt{4k/3m}$.

13.25 (c) $P = \mathcal{H}$. **(d)** $Q = t +$ cte.

13.29



13.31 (a) $3k$, **(b)** 0, **(c)** k, **(d)** 0.

13.33 (a) Lado de la izquierda de la igualdad $= 4\pi kR^3 =$ Lado de la derecha de la igualdad. **(b)** Igual.

Capítulo 14

14.1 $\sigma = 0{,}79\ \text{cm}^2$, $n_{\text{blanco}} = 0{,}034\ \text{cm}^{-2}$, probabilidad $= 0{,}027$.

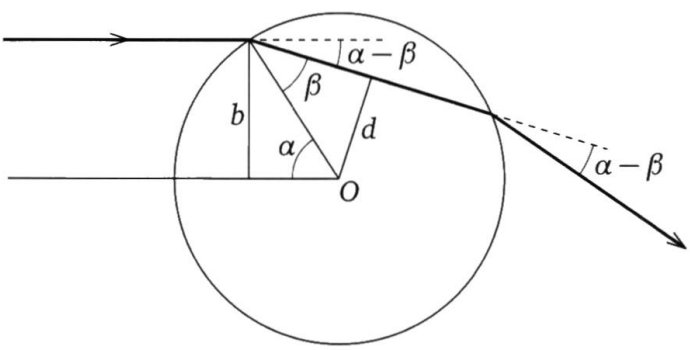
14.3 Densidad numérica $= 2{,}1 \times 10^{28}$ átomos/m^2.

14.5 $N_{\text{disp}} = 2{,}7 \times 10^7$.

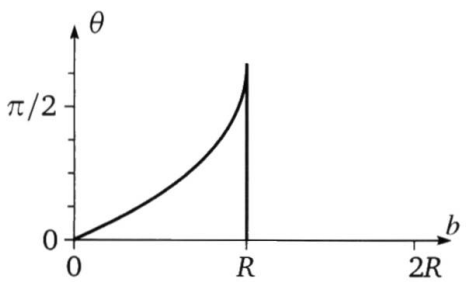
14.7 $\Delta\Omega_{\text{Luna}} = 6{,}45 \times 10^{-5}$ sr, y $\Delta\Omega_{\text{Sol}} = 6{,}76 \times 10^{-5}$ sr.

14.11 $N_{\text{disp}} \approx 29$.

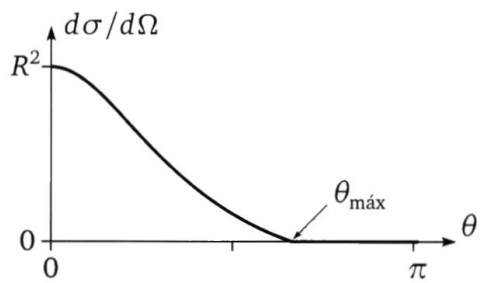
14.15 (a)



(b) $\sqrt{p_0^2 + 2mU_0}$. **(c)** Vea el dibujo de la izquierda.



(c)



(d)

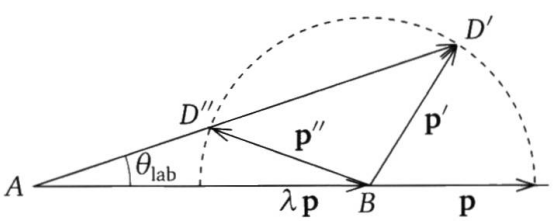
(d)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{(\operatorname{sen}\theta)d\theta/db} \qquad \text{donde} \qquad \frac{d\theta}{db} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 - b^2}} - \frac{\zeta}{\sqrt{R^2 - \zeta^2 b^2}}\right)$$

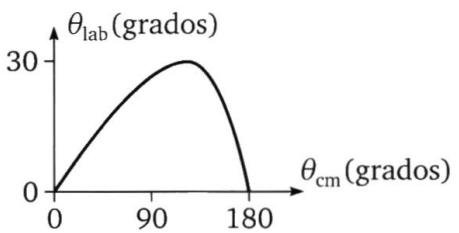
para $0 \leq b \leq R$; para $b > r$, $d\sigma/d\Omega = 0$. **(e)** $\sigma_{\text{tot}} = \pi R^2$.

14.17 $N_{\text{disp}}/Z^2 = 0{,}21, 0{,}20$, etc.

14.31 (b) Si $\theta_{\text{lab}} = 0$, entonces θ_{cm} podría ser 0 o π.



(a)



(c)

(d) $\theta_{\text{lab}}(\text{máx}) = \operatorname{arcsen}(1/\lambda)$.

Capítulo 15

15.3 $\gamma = 1 + 3{,}56 \times 10^{-10}$; diferencia $= (\Delta t_0 - \Delta t) = -1{,}28\,\mu s$; diferencia porcentual $= 3{,}56 \times 10^{-8}\,\%$.

15.5 Según sus relojes, A estuvo ausente 25 años, y esto es lo que ha envejecido, en comparación con los 80 años que ha envejecido B.

15.7 El número esperado, $N = 420$, teniendo en cuenta la dilatación del tiempo; pero $N = 29$, si se ignora la dilatación del tiempo.

15.11 $v = \frac{3}{5}c$.

15.13 (a) $l = 91{,}7$ cm; **(b)** $l = 83{,}2$ cm.

15.17 (a) Si denominamos a los dos sucesos 1 y 2, entonces, tal y como observamos en $\mathcal{S}'$, $t'_1 = 0$ pero $t'_2 = -\gamma\beta a/c$. **(b)** Tal y como observamos en $\mathcal{S}''$, $t'_1 = 0$ pero $t'_2 = +\gamma\beta a/c$.

15.19 (a) $x'_{\text{F}} = d$, $t'_F = d/c$, $x'_{\text{B}} = -d$, $t'_{\text{B}} = d/c$.

(b) $x_{\text{F}} = \gamma(1+\beta)d$, $t_{\text{F}} = \gamma(1+\beta)d/c$, $x_{\text{B}} = -\gamma(1-\beta)d$, $t_{\text{B}} = \gamma(1-\beta)d/c$.

15.21 $v = 0{,}91c$.

15.23 La velocidad del cohete de la derecha en relación con el de la izquierda es $0{,}994c$ hacia la izquierda.

15.25 (Velocidad medida en $\mathcal{S}$) $= c$.

15.29 (a)

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

15.33 (a)

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= \gamma(x_2 - \beta x_4) \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= \gamma(x_4 - \beta x_2) \end{aligned}\right\} \quad \text{de donde} \quad \Lambda_{B2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma\beta & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\Lambda_{R+} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Lambda_{R-} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

15.47 $v = 0{,}20c$.

15.55 Ya que u es un cuadrivector

$$u_1' = \gamma(V)[u_1 - \beta(V)u_4], \quad u_2' = u_2, \quad u_2' = u_2, \quad u_4' = \gamma(V)[u_4 - \beta(V)u_1].$$

15.57 $T(\text{Bi}) + T(\text{He}) = 1{,}3 \times 10^{-12}$ J $= 8{,}1$ MeV.

15.61 $E = 5$ MeV; $\quad v = 0{,}8c$.

15.63 $1\ \text{MeV}/c^2 = 1{,}78 \times 10^{-30}$ kg; $1\ \text{MeV}/c = 5{,}34 \times 10^{-22}$ kg · m/s.

15.65 (b) $v_{\text{máx}} = 0{,}12c$.

15.67 $v_f = 0$; $M = \frac{10}{3}m$.

15.71 (c) Las energías mínimas son $E_{\text{cm}} \approx 3100$ MeV, pero $E_{\text{lab}} \approx 9{,}6 \times 10^6$ MeV.

15.75 $M = 2{,}95\ \text{GeV}/c^2$; $v = 0{,}65c$.

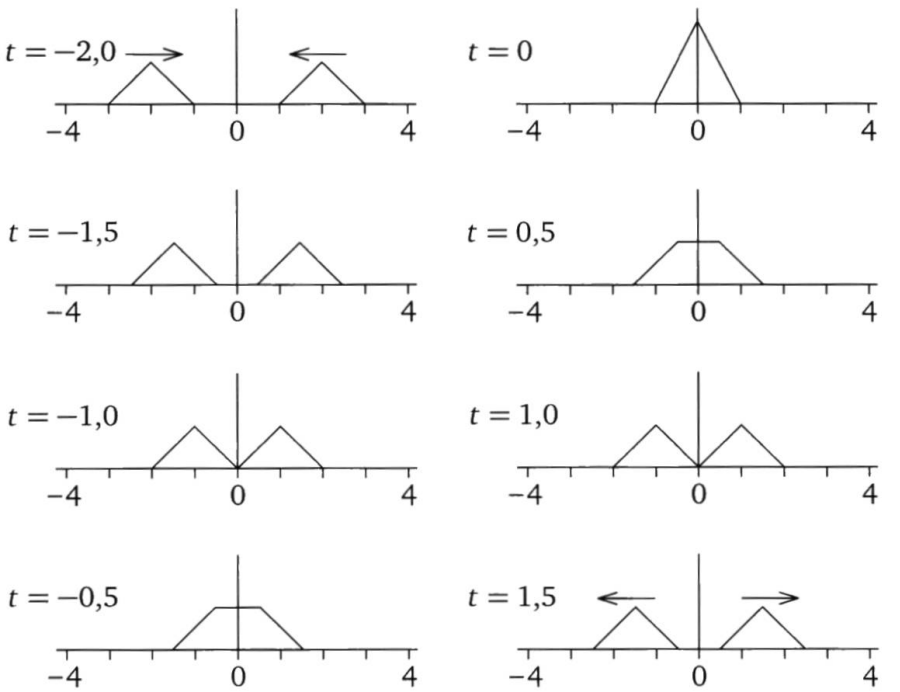
15.81 $r(\text{relativista}) = 8{,}3$ cm; $r(\text{no relativista}) = 5{,}9$ cm.

15.93 Si E denota la energía final del electrón, $E/E_0 \approx 0{,}002$.

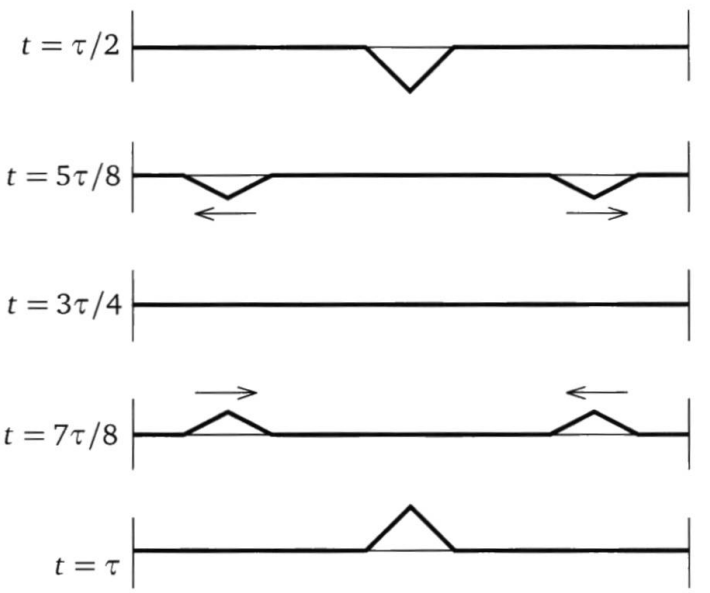
15.109 (a) Si escogemos los ejes de manera que las dos partículas se encuentren en el plano xy, entonces en su sistema de referencia en reposo $\mathcal{S}'$, la fuerza de una sobre la otra es $\mathbf{F}' = (0, kq^2/r'^2, 0)$. Según (15.155) esto se transforma en $\mathbf{F} = (0, kq^2/\gamma r^2, 0)$ en $\mathcal{S}$. **(b)** En $\mathcal{S}'$ los campos de una carga en la posición de la otra son $\mathbf{E}' = (0, kq/r'^2, 0)$ y $\mathbf{B}' = (0, 0, 0)$. En $\mathcal{S}$, son $\mathbf{E} = (0, \gamma kq/r^2, 0)$ y $\mathbf{B} = (0, 0, \gamma\beta kq^2/cr^2)$; éstas producen una fuerza $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ la cual se ve fácilmente que es la misma que en el apartado (a).

Capítulo 16

16.7



16.11



16.27

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_{11}}{3\alpha\beta}\begin{bmatrix} 2\alpha+\beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha \end{bmatrix}$$

16.31 distancia = 5040 km.

Índice alfabético

Cuando la entrada hace referencia a un capítulo, una sección, un ejemplo, un problema o al apéndice, se indica mediante (Cap.), (Sec.), (Ej.), (P.) y (Ap.), respectivamente. Las notas a pie de página se indican mediante (n).

acción, integral, 263
— estacionaria en el camino correcto, 278
aceleración
— de Coriolis, 34, 394 (Sec. 9.10)
— de la gravedad real, 380
— en caída libre, 380
— en coordenadas polares, 33
— sin rotación, 360 (Sec. 9.1)
aceleración centrípeta, 34
acimut, 149
afelio, 341
aire. *Véase también* resistencia del...
— módulo de compresibilidad, 813 (P. 16.36)
alcance
— de bolas metálicas pequeñas, 63 (Ej. 2.4)
— en un medio lineal, 59 (Sec. 2.3)
algún otro sitio (cono de luz), 693
amortiguado forzado, frecuencia aplicada para el péndulo, 508
amortiguamiento crítico, 196
— como límite del amortiguamiento débil, 232, 233
amortiguamiento débil, 194
amortiguamiento fuerte, oscilaciones, 195
amplitud de dispersión (cuántica), 650 (P. 14.12)
anchura completa a mitad de máximo o FWHM, 210
anchura de resonancia, 210
ángulo de dispersión, 616 (Sec. 14.1), 617
— del centro de masa y del laboratorio, relación, 644 (Sec. 14.8)
— del laboratorio en función del ángulo del CM, 646
ángulo sólido, 629
ángulos de Euler, 441 (Sec. 10.9), 442, 443, 445
— precesión libre, 456
— y energía cinética rotacional, 444
— y momento angular, 444
aplicación, 549, 552
aplicación duplicada, 560
aplicación iterada, 552
aplicación logística, 549 (Sec. 12.9), 552, 553
— autosemejanza, 566
— caos, 564
— ciclo-dos, 559
— período dos, 559
— sensibilidad a las condiciones iniciales, 572 (P. 12.30)
aplicación seno, 571 (P. 12.23 a 12.25)
apogeo, 348
armónicos, 511
— de una cuerda finita, 762
arrastre del éter, 661
atractor, 206
— número de, péndulo amortiguado forzado, 516
atractor extraño, 548
Atwood. *Véase* máquina de...
autosemejanza
— de un fractal, 548
— para la aplicación logística, 566
autovalor, 428
— del punto fijo, 557
autovector, 428
avión a reacción, diferencias de tiempo para un, 667 (Ej. 15.1)

balanza de muelle, 14
balanza gravitatoria, 12
balanza inercial, 11, 12
bamboleo de Chandler, 441
barn, 622
base ortonormal, 817 (Ap.)
Bernoulli, teorema de, 801
bifurcación, 291
– del período, universalidad, 521
Biot-Savart ley de, 43 (P. 1.33)
bloques
– en planos inclinados, 28, 29
– sobre una cuña, 286 (Ej. 7.5)
botella en un cubo de agua, 185 (Ej. 5.2)
braquistócrona, 245 (Ej. 6.2), 246
– cicloide, 257 (P. 6.14), 248
– propiedad isocrona, 259 (P. 6.25), 258 (P. 6.21)
Buró de Pesos y Medidas, 11

caída libre, 142 (Ej. 4.6)
– aceleración, 380
– ecuaciones de Hamilton, 598
– efecto centrífugo, 380
– fuerza de resistencia, 51
– órbitas en el espacio de fases, 598
– usando la energía, 142
– y fuerza de Coriolis, 387 (Sec. 9.8)
cálculo de variaciones, 237 (Cap. 6)
– camino más corto entre dos puntos, 238
– con más de dos variables, 249 (Sec. 6.4)
– definición, 240
– ejemplos, 238 (Sec. 6.1)
cálculo vectorial, 8, 128
cámara de niebla, 618
cambios de fase, dispersión, 650 (P. 14.12)
camino estacionario, 240
camino geodésico, 249
camino libre medio, de una molécula de aire, 624 (Ej. 14.3)
camino más corto
– entre dos puntos, 244 (Ej. 6.1), 252 (Ej. 6.3)
–– en tres dimensiones, 259 (P. 6.27)
– geodésico, 249
campo eléctrico, de una carga con velocidad constante, 749
campo gravitatorio uniforme, energía potencial, 168 (P. 4.5 y 4.6)
campos de una corriente recta larga, 731 (Ej. 15.12)
caos, 541, 544
– aproximación mediante el péndulo amortiguado forzado, 513
– criterio, 505 (n)
– para el péndulo amortiguado forzado, 523
– para la aplicación logística, 564
– ruta hacia el, 523
– sensibilidad a condiciones iniciales, 528
–– aplicación logística, 572 (P. 12.30)
–– péndulo amortiguado forzado, 523 (Sec. 12.5)
capacidad de carga, 553
carga[s]
– energía potencial, en un campo eléctrico uniforme, 123 (Ej. 4.2)
–– de dos cargas, 134
– fuerzas eléctrica y magnética sobre una carga, 43 (P. 1.32)
– movimiento, fuerza magnética entre dos cargas, 25
–– en un campo magnético uniforme, 73 (Sec. 2.5)
–– helicoidal en un campo magnético, 79
carretera tipo «tabla de lavar», 208, 234
cascada de bifurcación del periodo, 519
– en la convección de mercurio, 520
– del péndulo amortiguado forzado, 518
Cauchy, teorema recíproco de, 811 (P. 16.19)
causalidad, 693
cazando cuervos sobre un roble, 621 (Ej. 14.1)
centro de masa (CM), 95 (Sec. 3.3), 325
– aceleración en términos de una fuerza externa, 97
– de la Tierra y del Sol, 111 (P. 3.16)
– de la Tierra y la Luna, 112 (P. 3.17)
– de un cono macizo, 98 (Ej. 3.2)
– definido como una integral, 97
– propiedades, 403 (Sec. 10.1)
– sistema de referencia, 326
– velocidad en términos del momento total, 97
– y coordenadas relativas; masa reducida, 325 (Sec. 8.2)
– y momento total, 97
Chandler, bamboleo de, 441
choque elástico, 110 (P. 3.5)
ciclo-dos, para la aplicación logística, 559
cicloide, 248, 257 (P. 6.14)
ciclón, 385
ciclotrón, frecuencia de, 80
circuito RLC, 191
– forzado, 198
círculo unitario, 77
cizalladura. *Véase* módulo de...
CM. *Véase* centro de masa
cociente de masa, 645
coeficiente de Poisson, 812 (P. 16.28)
coeficientes de Fourier, 216
cohete[s], 93 (Sec. 3.2)
– de varias etapas, 111 (P. 3.12)
– empuje, 95
– Saturno V, 110 (P. 3.5)
colatitud, 150, 371
colisión
– de trozos de masilla, 711 (Ej. 15.9)
–– con una plataforma giratoria, 105 (Ej. 3.3)
– experimento de, 615
– sección eficaz de, 616, 619 (Sec. 14.2)
– teoría cuántica de, 615
colisión elástica, 158
– de masas desiguales, 175 (P. 4.46)

– energía perdida, sistema del laboratorio, 653 (P. 14.29)
– entre dos partículas de masa equivalente, 160
– frontal relativista, 713 (Ej. 15.10)
– masa equivalente, 159 (Ej. 4.8)
colisión inelástica, 92
– de dos cuerpos, 92 (Ej. 3.1)
colisión perfectamente inelástica, 92, 175 (P. 4.48)
colisión relativista, 711 (Sec. 15.14)
cometa
– consideraciones energéticas, 334 (Ej. 8.2)
– potencial efectivo, 332 (Ej. 8.1)
cometa Halley, 343 (Ej. 8.4)
composición de velocidades, fórmula relativista de, 678 (Sec. 15.7), 680
compresibilidad. *Véase* módulo de...
Compton
– efecto, 723
– generador de, 401
condiciones de contorno, 760 (Sec. 16.3)
cono cuerpo, para la precesión libre, 440
cono de luz, 689 (Sec. 15.10)
– futuro, 690
– interior, 691
–– futuro, 691
–– pasado, 691
– pasado, 690
cono espacio, para la precesión libre, 441
conservación de la energía
– de dos partículas, 156
– en la mecánica lagrangiana, 298
– en un sistema multipartículas, 163
– para fuerzas centrales para dos cuerpos, 333
conservación del momento, 91 (Sec. 3.1)
– angular, 107
– principio de, 24, 92
– total en la mecánica lagrangiana, 296
– y tercera ley de Newton, 20 (Sec. 1.5), 21
constante de amortiguamiento, 192
constante de fuerza y problema de Kepler, 340
constante de Planck, 650 (P. 14.12), 722
constantes de Lamé, 791 (n)
constantes de muelles, matriz de, 483
contracción de la longitud, 671 (Sec. 15.5), 673, 738 (P. 15.14)
– fórmula, 672
– nueva deducción de la, 676 (Ej. 15.2)
contracción de Lorentz, 673
contracción de Lorentz–Fitzgerald, 673
coordenadas cartesianas (o rectangulares), 27, 28, 265 (Ej. 7.1)
coordenadas cíclicas, 294
coordenadas esclerónomas (n), 274
coordenadas generalizadas, 253, 265, 272
coordenadas ignorables, 294, 328
– en mecánica hamiltoniana, 591 (Sec. 13.4)
coordenadas ligadas, 274 (n)
coordenadas naturales, 274, 299
coordenadas no cartesianas, 30
coordenadas normales, 467, 488 (Sec. 11.7), 498 (P. 11.33 a 11.35)
– dos vagonetas con muelles, 489
coordenadas polares, 267 (Ej. 7.2)
– definición, 30
– ecuación de $\mathbf{r}$, 267
– ecuación de ϕ, 268
– en dos dimensiones, 30 (Sec. 1.7)
– vectores unitarios, 31
coordenadas polares cilíndricas, 45 (P. 1.47)
coordenadas polares esféricas, 149
– gradiente, 151
– $\hat{\mathbf{r}}$, 150
– vectores unitarios, 150
– $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, 150
– $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, 150
coordenadas reónomas, 274 (n)
Coriolis. *Véase* aceleración de...; fuerza de...
corrimiento Doppler transversal, 741 (P. 15.48)
cosenos direccionales, 682
Coulomb. *Véase* fuerza de...
crecimiento exponencial de la población, 551 (Ej. 12.1)
cuadriescalar, 687
cuadrifuerza, 720
cuadrimomento, 703
cuadrivectores, 681 (Sec. 15.8), 684, 701
– de onda, 697
– definición, 686
– energía-momento, 705
cubo sobre un cilindro, 144 (Ej. 4.7), 179 (Ej. 5.1)
cuenca de atracción, 571 (P. 12.22)
cuenta de collar
– en un alambre, 481 (Ej. 11.1)
–– rectilíneo, ecuaciones de Hamilton, 581 (Ej. 13.1)
– en una barra en rotación, 314 (P. 7.21)
– enhebrada en un aro que gira, 288 (Ej. 7.6)
– oscilaciones cerca del equilibrio, 292 (Ej. 7.7)
cuerda
– movimiento longitudinal, 811 (P. 16.17)
– onda sobre una, 753, 754, 755
– ondas longitudinales, 811 (P. 16.17)
–– velocidad, 811 (P. 16.17)
– velocidad de las ondas sobre una, 755
cuerda finita
– modos normales de, 760
– onda triangular en una, 764 (Ej. 16.2)
– ondas en una, 760 (Sec. 16.3)
cuerda tensada, movimiento transversal de una, 753 (Sec. 16.1)

cuerpo
– con tres momentos principales diferentes, 437
– que cae, 598 (Ej. 13.6)
cuerpos rígidos, 164
– energía potencial interna, 164
– mecánica de los, 751

De Broglie, relación de, 723
delta de Kronecker, símbolo de la, 795
densidad de blancos, 620
densidad lagrangiana, 263
derivada material, 799, 800
derivadas parciales, 129, 169 (P. 4.10-4.11)
desigualdad triangular, 40 (P. 1.14)
desplazamiento cuadrático medio o RMS, 225
desplazamiento RMS, 225 (Sec. 5.9)
– para un oscilador forzado, 227 (Ej. 5.6)
desviador de tensión, 789
día sidéreo, 373 (n)
día solar, 373 (n)
diagonalización
– de matrices reales simétricas, 815 (Ap.)
– de un tensor simétrico real, 816 (Ap.)
– de una matriz, 815 (Sec. A.1)
– del tensor de inercia, 815 (Ap.)
– simultánea de dos matrices, 819 (Sec. A.2)
diagramas de bifurcación, 532
– aplicación logística, 562
– péndulo amortiguado forzado, 532 (Sec. 12.6)
dilatación, 786 (Ej. 16.5)
dilatación del tiempo, 664 (Sec. 15.4), 665
– evidencias, 669, 737 (P. 15.10)
– fórmula, 669
disco circular uniforme, precesión, 455
dispersión
– ante una esfera rígida, 634 (Ej. 14.5)
–– secciones eficaces, centro de masa y laboratorio, 647 (Ej. 14.7)
– de dos esferas rígidas, 623
– experimento de, 615
– sección eficaz diferencial de, 628 (Sec. 14.4)
dispersión de neutrones, por una lámina de aluminio, 622 (Ej. 14.2)
dispersión de Rutherford, 635 (Sec. 14.6)
– dependencia angular, 638 (Ej. 14.6)
– fórmula de, 637
dispersión elástica, 626
dispersión inelástica, 627
divergencia ∇, 604
– en n dimensiones, 606
– flujo saliente por unidad de volumen, 606
divergencia de $\mathbf{v}$, 793
Doppler
– corrimiento transversal, 741 (P. 15.48)
– efecto, 695 (Sec. 15.11), 696

ecuación autónoma, 505 (n), 594 (n)
ecuación auxiliar, 193
ecuación característica, 428, 484
ecuación constitutiva, 789
ecuación de autovalores, 427 (Sec. 10.5), 428
– generalizada para osciladores acoplados, 461
ecuación de continuidad, 802
ecuación de crecimiento, 551
ecuación de Euler, 434 (Sec. 10.7), 436
– con momento de fuerza cero, 437 (Sec. 10.8)
ecuación de Euler-Lagrange, 241 (Sec. 6.2), 243, 265
– aplicaciones, 244 (Sec. 6.3)
– con dos variables dependientes, 251
– integral primera, 256 (P. 6.10), 257 (P. 6.20)
ecuación de ligadura, 305, 307, 308
ecuación de Navier, 796
ecuación de ondas
– en términos del laplaciano, 766, 767
– para una cuerda, 755
– separación de variables, 809 (P. 16.9)
– tridimensional, 765 (Sec. 16.4), 766
– unidimensional, 755
ecuación del movimiento, 26
– de un sólido elástico, 796
– equilibrio de un sistema unidimensional cuando $dU/dx = 0$, 139
– para un fluido no viscoso, 800, 801
– para un sólido elástico, 793 (Sec. 16.10)
ecuación homogénea, 199
ecuación no homogénea, 199
ecuación radial
– para dos cuerpos en movimiento, 330
– para una partícula libre, 338 (Ej. 8.3)
– transformada, 338
–– ecuación radial transformada, 338
–– para dos cuerpos en movimiento, 338
ecuación secular, 428, 484
ecuaciones de Hamilton, 575, 585
– cuenta de collar en un alambre rectilíneo, 581 (Ej. 13.1)
– derivadas en sistemas unidimensionales, 580
– en varias dimensiones, 583 (Sec. 13.3)
– frente a ecuaciones de Lagrange, 592 (Sec. 13.5)
– máquina de Atwood, 582 (Ej. 13.2)
– oscilador armónico unidimensional, 596 (Ej. 13.5)
– para la caída libre, 598
– para sistemas unidimensionales, 578 (Sec. 13.2), 580, 581
– para una fuerza central, 586 (Ej. 13.3)
– para una masa sobre un cono, 588 (Ej. 13.4)
ecuaciones de Lagrange, 261

(Cap. 7), 263, 280
– con ligaduras, prueba, 276 (Sec. 7.4)
– con multiplicadores de Lagrange, 307
– ejemplos de, 281 (Sec. 7.5)
– frente a ecuaciones de Hamilton, 592 (Sec. 13.5)
– máquina de Atwood, 282 (Ej. 7.3)
– modificadas, 307
– movimiento de una peonza usando ángulos de Euler, 445
– para el movimiento libre, 262 (Sec. 7.1)
– para fuerzas magnéticas, 301 (Sec. 7.9)
– varias partículas no ligadas, 269
– y leyes de conservación, 296
ecuaciones de Maxwell, en forma cuadrivectorial, 749 (P. 15.111)
ecuaciones de movimiento para sistema de dos cuerpos con el lagrangiano, 327
ecuaciones diferenciales, 16
– acopladas, 52
– de segundo orden, 17
– solución general, 37
– vectorial, 27
ecuaciones en derivadas parciales, 752
ecuaciones no lineales y principio de superposición, 506
efecto Compton, 723
efecto Doppler, 695 (Sec. 15.11), 696
ejes principales de inercia, 425 (Sec. 10.4)
– cálculo, 427 (Sec. 10.5)
– de un cubo respecto de una esquina, 429 (Ej. 10.4)
– existencia, 426
electrodinámica, y relatividad, 729 (Sec. 15.18)
electromagnetismo (P. 1.32), 43
electrón, energía y momento, 710 (Ej. 15.8)
elementos de volumen, 770
– fuerzas sobre el, 771
elementos de estiramiento, 788
elementos del tensor de esfuerzos, 779
empuje del cohete, 95
empujón (*boost*), 685
empujón puro, 685
empujón puro, matriz, 685
energía, 115 (Cap. 4)
– cuarta componente del momento, 704 (Sec. 15.13)
– de interacción de dos partículas, 153 (Sec. 4.9)
– de ionización, 628
– de la máquina de Atwood, 171 (P. 4.31)
– de sistemas de varias partículas, 160 (Sec. 4.10)
– de un cometa, relación con la excentricidad, 345
– de un sistema de cuatro partículas, 160
– en el movimiento armónico simple, 186
– en reposo, 708
– para sistemas lineales unidimensionales, 136 (Sec. 4.6)
– principio de conservación para una partícula, 126
energía cinética, 115 (Sec. 4.1), 709
– de la rotación alrededor de un eje fijo, 411
– de un cuerpo en rotación, 427
– para la rotación de un cuerpo alrededor de un eje, 453
– para la rotación en torno a un eje fijo, 427
– total, 407
–– división en orbital y de giro, 407
– rotacional, en términos de los ángulos de Euler, 444
energía mecánica, 125
– definición, 126
energía potencial (o EP), 122, 123, 719
– cerca del equilibrio, 179
– de dos cargas, 134
– de fuerzas internas interatómicas, 164
– de muchas partículas, 162
– de un cuerpo rígido, 408
– de un muelle, 168 (P. 4.9)
– de un péndulo simple, 172 (P. 4.34)
– de una carga en un campo eléctrico uniforme, 123 (Ej. 4.2)
– de una molécula diatómica, 140
– definición, 122, 123
– dependiente del tiempo, 134, 134 (Sec. 4.5), 171 (P. 4.27)
– determinación de una fuerza, 130 (Ej. 4.4)
– efectiva, 332
– en sistemas unidimensionales, 138
– en un campo gravitatorio uniforme, 168
– gráficas de la, 138
– interna de cuerpos rígidos, 164
– $U = kx^4$, 171
– y fuerzas conservativas, 120 (Sec. 4.2)
energía potencial Morse, 229 (P. 5.2)
energía relativista, definición de, 705
energía umbral, 715
equilibrado dinámico, de ruedas de automóvil, 412
equilibrio estable cuando $d^2U/dx^2 > 0$, 139
equilibrio inestable cuando $d^2U/dx^2 < 0$, 139
equinoccios, precesión, 434
escalar de Lorentz, 687
escalar rotacional, 687
esféricamente simétrica, fuerza 148
esfuerzo, 774 (Sec. 16.6)
– ejemplo numérico, 782 (Ej. 16.4)
– ejes principales de, 811 (P. 16.21)
– y tensión, relación, 776, 789 (Sec. 16.9)
espacio, 4 (Sec. 1.2), 5
– noción de, 4
espacio de configuración, 576
– n-dimensional, 253

espacio de estados, 539, 540, 576
espacio de fases, 539, 578
— órbitas en el, 595 (Sec. 13.6)
espacio tridimensional, 5
espacio y tiempo, 4 (Sec. 1.2)
espacio-tiempo tetradimensional, 681 (Sec. 15.8), 684
estabilidad de los puntos fijos, 557
estado (o estado del movimiento), 540
estado fundamental, 627
estereorradián, 629
éter, 661 (n)
— sistema del, 660
Euler. *Véase* ángulos de...; ecuación de...; ecuación de Euler-Lagrange; fórmula de...; teorema de...
excentricidad, órbitas de Kepler, relación con la energía, 345
excitación atómica, 627
experimento de colisión, 615
experimento de dispersión, 615
experimento de Franck y Hertz, cambio de masa, 707 (Ej. 15.7)
experimento de Geiger y Marsden, 637
experimento de Michelson y Morley, 661
— velocidad de la luz, 661
experimento de Millikan de la gota de aceite, 56 (Ej. 2.2)
experimento mental, 665
exponenciales complejas, 76 (Sec. 2.6)
exponente de Liapunov, 528, 529
exterior del cono de luz, 692

factor de calidad Q, 210, 211
fase en resonancia, 212
Feigenbaum. *Véase* número de...; relación de...
fenómeno de Gibbs, 218 (n)
Fermat. *Véase* principio de...
figura de Lissajous, 189, 190
Fitzgerald. *Véase* contracción de Lorentz–Fitzgerald
fluido
— descripción del movimiento, 798 (Sec. 16.12)
— descripción espacial, 799
— descripción euleriana, 799 (n)
— descripción lagrangiana, 799 (n)
— descripción material, 798
— ondas en un, 803 (Sec. 16.13)
fluido estático, tensor de esfuerzos, 781 (Ej. 16.3)
fluido no viscoso, ecuación del movimiento, 798, 800, 801
fluidos ideales, 798
flujo laminar, 604 (Ej. 13.7), 605
fórmula de composición de velocidades clásica, 659
fórmula de Euler, 77
fórmula Doppler relativista para la luz, 698
fotón, 721 (Sec. 15.16)
Foucault, péndulo de, 390 (Sec. 9.9)
Fourier. *Véase* series de...; teorema de...; coeficiente de...
fracciones parciales, 86, 87, (P. 2.37)
fractal, 547
— autosemejanza, 548
frecuencia de ciclotrón, 80
frecuencia forzada, 201
frecuencia natural, 192, 201
frecuencias normales, 462
fuerza, 13
— central. *Véase* fuerzas centrales
— como gradiente de energía potencial, 128 (Sec. 4.3)
— derivable de una energía potencial, 130
— determinación a partir de la energía potencial, 130 (Ej. 4.4)
— dirección, 14
— en relatividad, 717 (Sec. 15.15)
— esféricamente simétrica, 148
— magnitud, 14
— medición, 14
— noción de, 4, 13
— rotacionalmente invariante, 148
— sobre partícula alfa, 162
— sobre un elemento de volumen, 771
fuerza centrífuga, 378 (Sec. 9.6), 288, 290
— contribución a la aceleración de la gravedad, 380
fuerza conservativa
— definición, 122
— fuerza de Coulomb como ejemplo, 132
fuerza de Coriolis, 377, 383 (Sec. 9.7), 394 (Sec. 9.10)
— caída libre, y, 387 (Sec. 9.8)
— dirección de la, 384
— paralelismo con un campo magnético, 383
fuerza de Coulomb, 26, 132
— como fuerza conservativa, 132
— conservativa, 148
— constante de la, 26 (n)
— esféricamente simétrica, 148
— rotacionalmente invariante, 148
— y fuerzas conservativas, 132 (Ej. 4.5)
fuerza de reacción, 20
fuerza de resistencia, 47
— caída libre, 51
— lineal y cuadrática, comparación, 49
fuerza de resistencia cuadrática, 81 (P. 2.4)
— alcance horizontal de una pelota de béisbol, 71 (Ej. 2.6)
— ante movimiento horizontal y vertical, 69
— movimiento horizontal con, 64
— movimiento vertical con, 67
— tiempo característico, con, 65
— trayectoria de una pelota de béisbol con, 70 (Ej. 2.6)
— velocidad terminal con, 67
fuerza de resistencia lineal
— movimiento horizontal con, 53
— movimiento vertical con, 55

— tiempo característico para, 58, 53
— velocidad límite con, 55
fuerza de restricción, 144
fuerza de rozamiento, 29
fuerza de superficie, 772
fuerza de volumen, 771
fuerza ficticia, 361
fuerza generalizada, 266
— componente ϕ = momento de fuerza, 269
fuerza gravitatoria, 12, 13
fuerza inercial, 361
fuerza magnética, 26 (n), 27 (n)
— entre dos cargas en movimiento, 25
fuerza restauradora, 178
fuerzas centrales, 21, 148 (Sec. 4.8)
— conservativa, 153, 174 (P. 4.43), 175 (P. 4.44)
— ecuaciones de Hamilton, 586 (Ej. 13.3)
— esféricamente simétrica, 153
— para dos cuerpos
—— conservación de la energía, 333
—— ecuación para el movimiento relativo, 328
—— ecuación radial, 330
—— lagrangiano, 328
—— movimiento relativo en un plano fijo, 330
—— órbitas acotadas y no acotadas, 335, 336
—— potencial efectivo, 332
—— problema unidimensional equivalente, 330
— potencial efectivo, 332
— problemas de, para dos cuerpos, 323 (Cap. 8)
— simetría esférica, 175 (P. 4.45)
fuerzas conservativas, 120
— condición para una, 122
— segunda condición para, 131 (Sec. 4.4)
fuerzas de acción y reacción, 25
fuerzas de acción-a-distancia, 13
fuerzas de ligadura, 144, 277
— relación con el multiplicador de Lagrange, 308
fuerzas de superficie, 769 (Sec. 16.5)
fuerzas de tipo calor, 717
fuerzas de volumen, 769 (Sec. 16.5)
fuerzas eléctrica y magnética sobre una carga, 43 (P. 1.32)
fuerzas externas, eliminación en la formulación lagrangiana, 261
fuerzas generalizadas, 294
fuerzas magnéticas entre lazos de corriente continua, 43 (P. 1.33)
fuerzas no conservativas, 126
fuerzas que no son de ligadura, 277
función complementaria, 200 (n)
función elíptica de Jacobi, 36 (n)
función hamiltoniana, 299. *Véase también* hamiltoniano, 577
función impar, 217
función lagrangiana, definición, 262
función periódica, definición, 214
funciones hiperbólicas, 68, 86 (P. 2.33)
funciones independientes, 192 (n)
futuro absoluto, 691

Geiger y Marsden, datos, 651 (P. 14.16, 14.17)
Geiger, experimento de Geiger y Marsden, 637
generador de Compton, 401
generador de Van de Graaff, 134
geodésica, sobre
— un cilindro, 256
— un cono, 257 (P. 6.17)
— una esfera, 249, 257 (P. 6.16)
Gibbs, fenómeno de, 218 (n)
gotas de líquido y resistencia del aire, 49
GPS; Global Positioning System, 671
gradiente ∇, 129, 169 (P. 4.12 a 4.15 y 4.18)
gradiente en coordenadas polares esféricas, 151
grados de libertad, 275
gravedad
— aceleración real, 380
— contribución de la fuerza centrífuga, 380
— efectiva, 362
gravitón, 722
grupo de Lorentz, 728

Hamilton, 1805-1865, 263. *Véase también* ecuaciones de...; principio de...
hamiltoniano, 299, 575
— carga en un campo electromagnético, 611 (P. 13.18)
— como energía de un sistema natural, 580
— como la energía total de sistemas naturales, 299
— definición, 577, 584
— y sistemas no naturales, 610 (P. 13.11 y 13.12)
hipótesis de medio continuo, 753
Hooke. *Véase* ley de...
horizontal, definición, 383
horizonte de tiempo, 570 (P. 12.16)
huracán, 385

imagen especular, 414
impulso rectangular
— oscilador forzado, 221 (Ej. 5.5)
— serie de Fourier, 217 (Ej. 5.4)
inercia, 11. *Véase también* momento de...
— ley de, 11
integral de acción, 263
integral de línea, 117 (Ej. 4.1)
integral elíptica completa, 174 (P. 4.38)
integral estacionaria, 240
invariancia galileana, de las leyes de Newton, 659
isotropía de la presión en los fluidos, 772

Jacobi, función elíptica, 36 (n)

Kepler. *Véase* ley de...; órbitas de...; problema de...

kilogramo, definición, 11
Kronecker, símbolo de la delta de, 452 (P. 10.21)

Lagrange. *Véase* ecuación de Euler-Lagrange; ecuaciones de...
lagrangiano
— definición, 262
— general, 301
— definición y no unicidad del, 301
— fuerzas centrales para dos cuerpos, 328
— para una carga en un campo magnético, 302

Lamé, constantes de, 791 (n)
lámina, 605 (n)
— ejes principales, 453
laplaciano, 766
— ecuación de ondas, 766, 767
Larmor, precesión de, 399
latitud, 150
lema de Schur, 790 (n)
ley de Biot-Savart, 43 (P. 1.33)
ley de Hooke, 776, 177 (Sec. 5.1), 789
— generalizada, 789, 791
— para un sólido, 791
ley de inercia, 11
ley de la reflexión, en la dispersión de una esfera rígida, 650 (P. 14.13)
ley de Stokes, 81 (P. 2.2)
leyes de conservación en la mecánica lagrangiana, 296 (Sec. 7.8)
leyes de Kepler
— primera ley, 343
— segunda ley, 100, 101
— tercera ley, 343, 344
leyes de Newton
— invariancia galileana, 659
— invariantes, 657
— primera ley (inercia), 14 (Sec. 1.4), 15
— segunda ley, 14 (Sec. 1.4), 15
—— en coordenadas cartesianas, 26 (Sec. 1.6)
—— en coordenadas polares, 31, 34
—— sistema en rotación, 376 (Sec. 9.5)
—— sistema en rotación, y método lagrangiano, 398
—— forma rotacional, 100
— tercera ley, 20, 21
—— invalidez para la fuerza magnética entre dos cargas, 25
—— validez de la, 25
—— y conservación del momento, 20 (Sec. 1.5), 21
— validez de las dos primeras leyes, 19
leyes del movimiento de Newton, 3 (Cap. 1)
Liapunov, exponente de, 528, 529
línea de mundo, 740 (P. 15.38)
línea del universo, 700
linealidad y no linealidad, 502 (Sec. 12.1)
Liouville. *Véase* teorema de...
Lissajous, figura de, 189, 190
longitud, 150. *Véase también* contracción de la...
longitud propia, 672
longitudes perpendiculares a la velocidad relativa, 673
Lorentz. *Véase* contracción de Lorentz–Fitzgerald; contracción de...; grupo de...; transformación de...
luz, fórmula Doppler relativista, 698

mancuerna deslizante y giratoria, 107 (Ej. 3.4)
máquina de Atwood, 146
— con las ecuaciones de Lagrange, 282 (Ej. 7.3)
— doble, 315 (P. 7.27)
— ecuaciones de Hamilton, 582 (Ej. 13.2)
— energía, 171 (P. 4.31)
— y multiplicador de Lagrange, 308 (Ej. 7.8)
mareas, 363 (Sec. 9.2)
— fuerza de las, 365, 366
mareas muertas, 369
mareas vivas, 369
Marsden, experimento de Geiger y Marsden, 637
masa, 11
— como inercia de un objeto, 11
— cuadrivelocidad y cuadrimomento, 698 (Sec. 15.12)
— en relatividad, 699
— en reposo, 699
— energía, 708
— noción de, 4
— unidad, 11
— y fuerza, 11 (Sec. 1.3)
masa equivalente, colisión elástica, 159 (Ej. 4.8)
masa invariante, 699, 700
— definición, 699
masa puntual, definición, 14
— mecánica de, 751
masa reducida, 325 (Sec. 8.2), 326, 327
masa variable, 699, 704
matriz[ces]
— de derivadas, 784
— de las constantes de muelles, 459, 483
— de masa, 459, 483
— de rotación 3D, 682
— definidas positivas, 820 (Ap.)
— diagonal, 424
— diagonalización, 815 (Sec. A.1)
—— simultánea de dos matrices, 819 (Sec. A.2)
— métrica, 728
— multiplicación, 418
— ortogonal, 726
— reales simétricas
—— diagonalización de, 815 (Ap.)
— rotación 4D, 685
— simétrica, 418
— transpuesta, 419
— traza, 788
— unitaria, 422
—— de derivadas, para una rotación pequeña, 785
Maxwell. *Véase* ecuaciones de...
mecánica
— definición, 3
— formalismo de Newton, 3
— formulación hamiltoniana, 3

— formulación lagrangiana, 3
mecánica clásica, 3 (Sec. 1.1)
mecánica cuántica, 4
mecánica de cuerpos rígidos, 751
mecánica de masas puntuales, 751
mecánica de medios continuos, 751 (Cap. 16)
mecánica en sistemas no inerciales, 359 (Cap. 9)
mecánica hamiltoniana, 575 (Cap. 13)
mecánica lagrangiana
— dos vagonetas con tres muelles, 473
— péndulo doble, 473 (Sec. 11.4)
— ventajas, 295
mecánica no lineal y caos, 501 (Cap. 12)
mecánica relativista, 4
media anchura a mitad de máximo, resonancia, 211
medio continuo
— hipótesis de, 753
— mecánica de, 751 (Cap. 16)
método de las imágenes, 809 (P. 16.12)
Michelson. *Véase* experimento de Michelson y Morley
Millikan, experimento de la gota de aceite, 56 (Ej. 2.2)
modo fundamental, 762
modos normales, 457 (Cap. 11)
— de cuerdas finitas, 760
— definición, 463
módulo de cizalladura, 776
— en términos de la ley de Hooke, 792
módulo de compresibilidad, 776
— del aire, 813 (P. 16.36)
— en términos de la ley de Hooke, 791
módulo de elasticidad, 774 (Sec. 16.6), 776, 777
módulo de Young, 776
— en términos de la ley de Hooke, 792
— relación con los módulos de compresibilidad y cizalladura, 792
molécula diatómica, energía potencial de una, 140
momento. *Véase también* conservación del...
— cálculo, 413 (Ej. 10.1)
— conservación, 20
— de sistemas de varias partículas, 23
— definición clásica, 16
— principio de conservación del, 23
— tasa de variación del, 22
— y centro de masa, 97, 404
— y momento angular, 91 (Cap. 3)
momento angular, 418
— alrededor del CM, 107
— alrededor del eje z, 410
— conservación del, 100, 107, 329
— coordenadas, 406
— de dos cuerpos en un sistema CM, 329
— definición, 99
— división en orbital y de giro, 406
— en términos de los ángulos de Euler, 444
— igual a componente ϕ del momento generalizado, 269
— momento y, 91 (Cap. 3)
— no necesariamente paralelo a velocidad angular, 411
— para una única partícula, 99 (Sec. 3.4)
— para una velocidad angular arbitraria, 416
— para varias partículas, 103 (Sec. 3.5)
— principio de conservación, 105
— total, 103, 404
momento canónico, 577
momento conjugado, 577
momento de fuerza, igual a componente ϕ de la fuerza generalizada, 269
momento de inercia, 105
— alrededor del eje z, 410
momento electromagnético, 26
momento generalizado, 266, 294, 577
— componente ϕ = momento angular, 269
— y coordenadas ignorables, 294 (Sec. 7.6)
momento mecánico, 26
momento relativista, 701
momentos principales (de inercia), 426
monopatín
— en una rampa semicircular, 34, 35
— oscilante, 34 (Ej. 1.2)
Morley. *Véase* experimento de Michelson y...
Morse, energía potencial, 229 (P. 5.2)
movimiento. *Véase también* ecuación[es] del movimiento
— cierre de fases, 570 (P. 12.17)
— con una fuerza constante, 719 (Ej. 15.11)
— de un cuerpo con dos momentos iguales, 439
— solución completa del, 141
movimiento absoluto, no existencia, 663
movimiento armónico simple, 180 (Sec. 5.2)
— consideraciones sobre la energía, 186
— definición, 182
— solución como la parte real de una exponencial compleja, 183
— solución coseno desplazada en fase, 183
— soluciones seno y coseno, 181
movimiento cuasiperiódico, 190
movimiento longitudinal en un cuerda, 811 (P. 16.17)
movimiento rotacional de cuerpos rígidos, 403 (Cap. 10)
muelle, energía potencial, 168 (P. 4.9)
multiplicación de matrices, 418
multiplicador de Lagrange, 307
— fuerzas de ligadura, 304 (Sec. 7.10)
—— relación con el, 308

— y máquina de Atwood, 308 (Ej. 7.8)
multiplicador del punto fijo, 557

nave espacial, 110 (P. 3.7 y 3.9)
Navier, ecuación de, 796
neutrino, 721
neutrones dispersados, distribución angular de, 631 (Ej. 14.4)
Newton. *Véase* leyes de...; leyes del movimiento...
newton, unidad, 13
nodos, ondas, 759
Noether. *Véase* teorema de...
número complejo, 75
— imaginaria, 88
— parte real, 88
número de Feigenbaum, 522
— para el péndulo amortiguado forzado, 521
número de Reynolds, 51, 81 (P. 2.3)
números complejos, 88 (P. 2.45-2.51)
— conjugado, 88
— módulo o valor absoluto, 88
nutación, 447
— de una peonza, 446

onda[s]
— en tres dimensiones, intensidad de una, 769
— en un fluido, 803 (Sec. 16.13)
— en una cuerda finita, 760 (Sec. 16.3)
— en una roca, 797 (Ej. 16.8)
— nodos, 759
— sobre una cuerda, 753, 754, 755
onda estacionaria, 759
onda triangular
— en una cuerda finita, 764 (Ej. 16.2)
— evolución, 757 (Ej. 16.1)
ondas esféricas, 768
ondas longitudinales
— en un sólido, 796 (Sec. 16.11)
— en una cuerda, 811 (P. 16.17)
—— velocidad, 811 (P. 16.17)
ondas P, 797
ondas planas, 767
ondas primarias, 797
ondas S, 797
ondas secundarias, 797
ondas transversales en un sólido, 796 (Sec. 16.11)
operador lineal, 199
órbita acotada, 335, 341
órbita de un planeta con el Sol fijo en O, 101
órbita no acotada, 335
órbitas circulares, cambios entre, 351 (Ej. 8.6)
órbitas de Kepler, 339 (Sec. 8.6)
— cambios de órbita, 348 (Sec. 8.8)
— elípticas, 342
— excentricidad, 343, 345
—— relación con la energía, 345
— hiperbólicas, 346, 347
— resumen de las, 347
— no acotadas, 346 (Sec. 8.7)
— parabólicas, 346, 347
órbitas elípticas, de planetas, 342
órbitas en el espacio de estados, 536 (Sec. 12.7), 540, 537
— para movimiento de rodadura, 542
órbitas en el espacio de fases, 595 (Sec. 13.6)
— oscilador armónico unidimensional, 596
— para la caída libre, 598
oscilaciones, 177 (Cap. 5)
— amortiguamiento, 195
—— crítico, 196
—— débil, 194
— subamortiguamiento, 194
oscilaciones amortiguadas, 190 (Sec. 5.4)
oscilaciones amortiguadas forzadas, 197 (Sec. 5.5)
— operadores diferenciales lineales, 198
— soluciones complejas para fuerza externa sinusoidal, 200
— soluciones particulares y homogéneas, 200
oscilaciones forzadas, por un impulso rectangular, 221
oscilaciones subamortiguadas, 193
oscilador
— frecuencia forzada, 201
— frecuencia natural, 201
oscilador anisótropo, 189
oscilador armónico isótropo, 187
oscilador armónico unidimensional, ecuaciones de Hamilton, 596 (Ej. 13.5)
oscilador forzado
— desplazamiento RMS, 227 (Ej. 5.6)
— por un impulso rectangular, 221 (Ej. 5.5)
— solución en serie de Fourier para el, 219 (Sec. 5.8)
oscilador lineal, propiedades, 509
oscilador lineal amortiguado y forzado, gráfica, 205 (Ej. 5.3)
osciladores acoplados, 457 (Cap. 11)
— amortiguados, 494 (P. 11.10)
— caso general, 479 (Sec. 11.5)
— con n grados de libertad, 479
— débilmente, 468
— dos vagonetas con muelles y masas iguales, 462 (Sec. 11.2)
— ecuación matricial para el movimiento de, 459
— ecuación matricial para el movimiento de, 483
— forzados y amortiguados, 494
— fuerzas disipativas, 494 (P. 11.10)
— péndulo doble, longitudes y masas iguales, 477
— primer modo normal, 463
— segundo modo normal, 464
osciladores bidimensionales, 187 (Sec. 5.3)

PAF. *Véase* péndulo amortiguado forzado, 507

paradoja de los gemelos, 736 (P. 15.5)
parámetro de crecimiento, 551
parámetro de extinción, 194, 196, 197
parámetro de impacto, 616 (Sec. 14.1), 618
– colisiones, 105 (n)
Parseval, teorema de, 225 (Sec. 5.9), 226
parte desviadora del tensor de tensiones, 789
partícula[s]. *Véase también* sistemas de varias partículas
– definición, 14, 15
– en dos dimensiones, 265 (Ej. 7.1), 267 (Ej. 7.2)
– obligada a moverse sobre un cilindro, 284 (Ej. 7.4)
– sin masa, 721 (Sec. 15.16)
partícula libre, ecuación radial, 338 (Ej. 8.3)
pasado absoluto, 691
pelota de béisbol
– soltada desde una torre alta, 68 (Ej. 2.5)
– trayectoria de una, 70 (Ej. 2.6)
– y resistencia del aire, 49 (Ej. 2.1)
péndulo, en un coche que acelera, 361 (Ej. 9.1)
péndulo amortiguado forzado (PAF), 504, 507 (Sec. 12.2)
– amplitud aplicada para el, 508
– aproximación al caos, 513 (Sec. 12.4)
– caos y sensibilidad a las condiciones iniciales, 523
– características esperadas del, 509 (Sec. 12.3)
– cascada de bifurcación del período, 518
– constante de amortiguamiento para el, 508
– frecuencia natural para el, 508
– fuerza de perturbación para el, 508
– número de atractores, 516
– oscilaciones casi lineales del, 510
– período dos, 514
– período tres, 516
– sensibilidad a las condiciones iniciales, 528
péndulo de Foucault, 390 (Sec. 9.9)
péndulo doble, 473, 474
– longitudes y masas iguales, 477
péndulo esférico, 318 (P. 7.40)
péndulo simple
– energía potencial, 172 (P. 4.34)
– período exacto, 173 (P. 4.38)
– segunda aproximación para el período, 174 (P. 4.39)
péndulos acoplados, tres, 484 (Sec. 11.6)
peonza
– lagrangiano y ángulos de Euler, 445
– movimiento, 445 (Sec. 10.10)
–– y ángulos de Euler, 445
– nutación, 446
– precesión
–– con momento de fuerza débil, 432 (Sec. 10.6)
–– y ángulos de Euler, 445
perigeo, 348
– empuje tangencial en el, 349
perihelio, 341
período, de un satélite terrestre de órbita pequeña, 344 (Ej. 8.5)
período dos
– del péndulo amortiguado forzado, 514
– para la aplicación logística, 559
período exacto, de un péndulo simple, 173 (P. 4.38)
período orbital, 343
período tres, del péndulo amortiguado forzado, 516
peso de un objeto, 13
pión, desintegración, 737 (P. 15.18)
Planck, constante de, 650 (P. 14.12), 722
planetas
– consideraciones energéticas, 334 (Ej. 8.2)
– órbitas elípticas de, 342
plano inclinado
– deslizamiento de bloques, 28 (Ej. 1.1), 127 (Ej. 4.3)
– rodadura de cilindros, 164 (Ej. 4.9)
plataforma giratoria, movimiento simple en una, 385 (Ej. 9.2)
Plutón, 655
población, crecimiento exponencial de la, 551 (Ej. 12.1)
Poincaré, secciones de, 545 (Sec. 12.8)
Poisson, coeficiente de, 812 (P. 16.28)
polares cilíndricas, vectores unitarios en coordenadas, 45 (P. 1.48)
pompa de jabón, problema de la, 257 (P. 6.19)
posición del centro de masa **R**, 325
posición relativa **r**, 324, 325
potencial efectivo
– para dos cuerpos en movimiento, 332
– para un cometa, 332 (Ej. 8.1)
– para una fuerza central, 332
precesión, 433
– de los equinoccios, 434
– de una peonza
–– con momento de fuerza débil, 432 (Sec. 10.6)
–– usando los ángulos de Euler, 445
– disco circular uniforme, 455
precesión continua, 445
precesión de Larmor, 399
precesión libre, 439, 441
– y ángulos de Euler, 456
presión dinámica, 802
presión isotrópica, en ausencia de fuerzas de cizalladura, 772
principio de conservación del momento, 23, 24
principio de equivalencia, 362 (n)
– relatividad general, 362 (n)
principio de Fermat, 239

– y ley de la reflexión, 255 (P. 6.3)
– y ley de Snell, 255 (P. 6.4)
principio de Hamilton, 263, 264
– prueba final, 279
principio de superposición, 181
principio variacional, 237, 238, 240
problema de Kepler, 332
– constante de fuerza para el, 340
problema de la pompa de jabón, 257 (P. 6.19)
producto escalar, 7
– de dos vectores, 39 (P. 1.7)
– equivalencia de las dos definiciones, 39 (P. 1.7)
producto escalar invariante, 687 (Sec. 15.9), 688
– en el triespacio, 687
producto vectorial, 7
productos de inercia, 412
– cálculo, 413 (Ej. 10.1)
proyectil
– alcance horizontal con resistencia lineal, 61
– trayectoria con resistencia lineal, 60
– y partículas cargadas, 47 (Cap. 2)
punto de bifurcación, del péndulo amortiguado forzado, 521
punto de fase **z**, 593
punto de retorno, 139
– para el movimiento radial de un cometa, 334
punto estacionario, 240
punto fijo, 555
– autovalor, 557
– estabilidad de los, 557
– multiplicador, 557
punto fijo estable, 557
punto suave, 451 (P. 10.18)

rapidez, 740 (P. 15.30 - 15.31)
reflexión, ley de la, 650 (P. 14.13)
regla de vdv/dx, 83 (P. 2.12)
regla del cociente, 695 (Sec. 15.11), 696
relación de De Broglie, 723
relación de Feigenbaum, 522
– para la aplicación logística, 572 (P. 12.29)
relatividad, 656 (Sec. 15.1)
– primer postulado de, 663
– segundo postulado de, 664
– y electrodinámica, 729 (Sec. 15.18)
relatividad de Einstein, 656
relatividad de la simultaneidad, 678, 739, (P. 15.19)
relatividad de las medidas, 656
relatividad del tiempo, 664 (Sec. 15.4)
relatividad especial, 655 (Cap. 15), 656
– postulados, 662 (Sec. 15.3)
relatividad galileana, 657 (Sec. 15.2)
– y velocidad de la luz, 659
relatividad general, 656
– principio de equivalencia, 362 (n)
resistencia. *Véase* fuerza de...
resistencia del aire, 47 (Sec. 2.1)
– cuadrática, 63 (Sec. 2.4), 81 (P. 2.4)
– gotas de líquido y, 49
– lineal, 51 (Sec. 2.2)
–– y cuadrática, comparación, 49
– términos lineal y cuadrático, 48
resonancia, 207 (Sec. 5.6), 208
– anchura, 210
– anchura completa a mitad de máximo o FWHM, 210
– cambio de fase δ, 213
– diferencia de fase δ, 212
– en carretera tipo «tabla de lavar», 208, 234 (P. 4.43)
– media anchura a mitad de máximo, 211
Reynolds, número de, 51, 81 (P. 2.3)
ritmo de crecimiento, 551
rot F (rotacional de F), 131
rotación, 403 (Cap. 10)
– alrededor de un eje
–– cualquiera, 415 (Sec. 10.3)
–– fijo, 409 (Sec. 10.2)
––– energía cinética, 411
– en el espacio tridimensional ordinario, 681
– simple sobre un eje, 682 (Ej. 15.6)
rotacional
– de F, o rot F, 131
– de un vector, 170 (P. 4.22 y 4.25)
rotacionalmente invariante, fuerza, 148
rozamiento, fuerza de, 29
ruedas de automóvil, equilibrado dinámico, 412
ruta hacia el caos, 523
Rutherford. *Véase* dispersión de...
Rutherford, experimento de colisiones, 615

satélite terrestre, período de una órbita pequeña, 344 (Ej. 8.5)
Schur, lema de, 790 (n)
sección eficaz, 620
– de captura, 626
– de colisión, 616, 619 (Sec. 14.2)
– de dispersión, 626
– de fisión, 626
– de ionización, 626
– definición, 621
– diferencial, 630
–– cálculo de la, 632 (Sec. 14.5)
–– de dispersión, 628 (Sec. 14.4), 631
–– en sistemas diferentes, 640 (Sec. 14.7)
–– para la dispersión de Rutherford, 637
– elástica, 626
– generalizaciones, 623 (Sec. 14.3)
– inelástica, 627
– relación general en sistemas diferentes, 641
– total, 627
secciones de Poincaré, 545 (Sec. 12.8)
segunda aplicación iterada, 560
separación de variables, 65, 82 (P. 2.4)

– para la ecuación de ondas, 809 (P. 16.9)
serie de Fourier, 213 (Sec. 5.7)
– definición, 215
– en senos, 810 (P. 16.13)
– para el impulso rectangular, 217 (Ej. 5.4)
serie de onda-parcial, 650 (P. 14.12)
serie de Taylor, 84 (P. 2.18)
serpiente relativista, 677 (Ej. 15.3)
símbolo de la delta de Kronecker, 452 (P. 10.21)
simetría axial, 415
simetría de reflexión, 414
simultaneidad, relatividad de la, 678
sistema[s]
– aislado traslacionalmente invariante, 154
– corrotante, 394
– curvilíneos unidimensionales, 143 (Sec. 4.7)
– de muchas partículas, 23
–– conservación de la energía, 163
–– energía de, 160 (Sec. 4.10)
–– energía potencial, 162
–– momento total, 23
– de referencia. *Véase* sistemas de...
– del cuerpo, 435
– del espacio, 435
– del éter, 660, 661 (n)
– en movimiento relativo, 11
– en reposo, 672
– forzados, eliminación de fuerzas externas, formulación lagrangiana, 261
– holónomo, 275
– ligados, 271 (Sec. 7.2)
–– en general, 272 (Sec. 7.3)
– no holónomo, 275
– preferido, no existencia, 664
– rotatorio, derivadas temporales en un, 373 (Sec. 9.4)
– unidimensionales
–– energía de, 136
–– gráficas de la energía potencial, 138
sistemas de referencia, 10
– aceleración, 359
– centro de masa, 326, 640
–– para el movimiento de dos cuerpos, 328
– del laboratorio, 640
– inerciales, 11, 14 (Sec. 1.4), 17, 18, 359
–– definición, 19, 662
– no inerciales, 11, 18
– relativista, 712
sobreamortiguamiento, 195
sobretonos, 762
sólido
– ondas longitudinales en un, 796 (Sec. 16.11)
– ondas transversales en un, 796 (Sec. 16.11)
sólido elástico, 791
– ecuación del movimiento de un, 796, 793 (Sec. 16.10)
solución en serie de Fourier para el oscilador forzado, 219 (Sec. 5.8)
solución homogénea, 200
solución particular, 200
sonido, velocidad en el
– agua, 805 (Ej. 16.9)
– aire, 813 (P. 16.36)
Stokes. *Véase* ley de...; teorema de...
subamortiguamiento, 194
subarmónico, 516
subespacios irreducibles, 790 (n)
suma de velocidades, fórmula clásica, 360
sustentación, 48

tasa de variación del momento, 22
Taylor. *Véase* serie de...; teorema de...
tensión, 774 (Sec. 16.6), 775
– ejemplo numérico, 789 (Ej. 16.7)
– y esfuerzo, relación, 776, 789 (Sec. 16.9)
tensión de cizalladura, 787 (Ej. 16.6)
tensión esférica, 786
tensor de derivadas, 784
tensor de esfuerzos, 774, 777 (Sec. 16.7), 779
– en un fluido estático, 781 (Ej. 16.3)
– simetría, 780
– relación con el tensor de tensiones, 789
tensor de inercia, 415 (Sec. 10.3)
– definición, 418
– diagonalización del, 431, 815 (Ap.)
– para un cubo sólido, 419 (Ej. 10.2), 422 (Ej. 10.3)
– para una lámina, 452 (P. 10.23)
– simetría, 419
tensor de tensiones
– definición, 785
– descomposición, 788
– elementos de estiramiento, 788
– para la cizalladura, 787
– para la dilatación, 786
– para un sólido, 783 (Sec. 16.8)
– parte desviadora, 789
– parte esférica, 788
– relación con el tensor de esfuerzo, 789
tensor del campo electromagnético, 730
tensor momento de inercia, definición, 418. *Véase también* tensor de inercia
tensor simétrico real, diagonalización, 816 (Ap.)
tensores, 725 (Sec. 15.17)
– en el espacio-tiempo tetradimensional, 728
– en tres dimensiones, 726
teorema
– de Bernoulli, 801
– de Euler, 370
– de Fourier, 215
– de Gauss, 604. *Véase también* teorema de la divergencia
– de la componente cero, 740 (P. 15.35)
– de la divergencia, 604
–– demostración, 614 (P. 13.37)
– de Liouville, 600 (Sec. 13.7), 607
–– demostración, 606
– de Noether, 295, 301

—— y momento angular, 320
— de Parseval, 225 (Sec. 5.9), 226
— de Stokes, 131
— de Taylor, 84 (P. 2.18)
— del eje paralelo, 452 (P. 10.24)
— del virial, 174 (P. 4.41), 355 (P. 8.17)
— recíproco de Cauchy, 811 (P. 16.19)
— trabajo-EC, 116, 119
teoría cuántica de colisiones, 615 (Cap. 14)
teoría de colisiones, parámetro de impacto, 105 (n)
teoría del caos, 4
tetraespacio, 684
tiempo, 4 (Sec. 1.2), 10. *Véase también* dilatación del...
— en relatividad, 665
— medida en un único sistema, 664
— noción de, 4
— relatividad del, 664 (Sec. 15.4)
— visión clásica, 10
tiempo característico
— con resistencia cuadrática, 65
— para dos gotas de líquido, 58 (Ej. 2.3)
— para la resistencia lineal, 53, 58
tiempo discreto, 550
tiempo propio, 669
— de un cuerpo, 700
Tierra
— período de rotación sobre su eje, 373 (n)
— velocidad angular, 373
tifón, 385
trabajo, 115 (Sec. 4.1)
— como variación de la energía potencial, 124
— realizado por una fuerza, 116, 117, 124
transformación canónica, 595
— ejemplos, 612, 613, (P. 13.24 y 13.25)
transformación de Legendre, 579 (n)
transformación de Lorentz, 20 (n), 673 (Sec. 15.6), 675
— como «rotaciones» del espacio-tiempo, 683
— de los campos eléctrico y magnético, 731
— ecuaciones, 675
— estándar, 685
— inversa, 675
transformación de Lorentz–Einstein, 675
transformación galileana, 657, 658
— configuración estándar, 658
transitorios, 203
transpuesta de una matriz, 419
traslacionalmente invariante, 154
trayectoria, 595
— en un medio lineal, 59 (Sec. 2.3)
traza de una matriz, 788
triescalar, 687
trifuerza, 718
trimomento, 703

unidades naturales, 486

Van de Graaff, generador de, 134
variables del centro de masa, 640
vector[es] 8
— componentes, 5
— «contravariantes», 725
— «covariantes», 725
— de onda, 697
— de posición, 5
— del espacio de fases, 593
— derivada, 8, 9
— derivada temporal, 8
— diferenciación de, 8
— en el espacio-tiempo tetradimensional, 728
— en tres dimensiones, 726
— notación, 5
— operaciones con, 6
— producto de un vector por un escalar, 7
— producto escalar, 7
— producto vectorial, 7
— rotacional, 170 (P. 4.22 y 4.25)
— suma (o resultante) de, 6
— tipo espacio, 692, 694
— unitarios, 5
—— en coordenadas polares, 31
— — — derivada, 32, 33
— — — cilíndricas, 45 (P. 1.48)
— — — esféricas, 150
—— normal a la superficie, 770
—— notación, 6
— velocidad angular, 369 (Sec. 9.3), 370
—— suma, 372
velocidad[es]
— cercanas a c, suma, 680 (Ej. 15.4)
— en coordenadas polares, 32
— fórmula clásica de la suma, 360
— suma cuando una es igual a c, 680 (Ej. 15.5)
— transformación relativista de, 680
velocidad angular
— notación, 373
— suma, 372
— y velocidad lineal, relación útil, 371
velocidad de la luz
— como límite de velocidad para sistemas inerciales, 668
— como velocidad límite para influencias causales, 693
— experimento de Michelson y Morley, 661
— invarianza, 741 (P. 15.43)
— relatividad galileana, 659
velocidad del sonido
— en el agua, 805 (Ej. 16.9)
— en el aire, 813 (P. 16.36)
velocidad límite
— con resistencia cuadrática, 67
— con resistencia lineal, 55
— de gotas pequeñas de líquido, 56 (Ej. 2.2)
— de una pelota de béisbol, 68
velocidad lineal, y velocidad angular, relación útil, 371
vertical, definición, 383
vida media, 670
virial, teorema del, 174 (P. 4.41), 355 (P. 8.17)
viscosidad η, 81 (n)

Young. *Véase* módulo de...
yoyó, 313 (P. 7.14)

Miscelánea de datos (para usar en algunos problemas al final de capítulo)

Sistema solar

(Masa de la Tierra) $= 5{,}97 \times 10^{24}$ kg
(Radio de la Tierra) $= 6{,}38 \times 10^{6}$ m
(Masa de la Luna) $= 7{,}35 \times 10^{22}$ kg
(Radio de la Luna) $= 1{,}74 \times 10^{6}$ m
(Masa del Sol) $= 1{,}99 \times 10^{30}$ kg
(Radio del Sol) $= 6{,}96 \times 10^{8}$ m
(Distancia Tierra-Luna) $= 3{,}84 \times 10^{8}$ m
(Distancia Tierra-Sol) $= 1{,}50 \times 10^{11}$ m

Gases ideales

Número de Avogadro, $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ partículas/mol
Constante de Boltzmann, $k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K $= 8{,}62 \times 10^{-5}$ eV/K
Constante de los gases, $R = 8{,}31$ J/(mol · K) $= 0{,}0821$ litros · atm/(mol · K)
STP $= 0\,^{\circ}$C y 1 atm
(Volumen de 1 mol de gas a STP) $= 22{,}4$ litros

Factores de conversión

Área: 1 barn $= 10^{-28}$ m^2
Energía: 1 eV $= 1{,}60 \times 10^{-19}$ J
1 cal $= 4{,}184$ J
Longitud: 1 pulgada $= 2{,}54$ cm
1 milla $= 1609$ m
Masa: 1 u (unidad de masa atómica) $= 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg $= 931{,}5$ MeV/c^2
1 lb (masa) $= 0{,}454$ kg
1 MeV/$c^2 = 1{,}074 \times 10^{-3}$ u $= 1{,}783 \times 10^{-30}$ kg
Momento: 1 MeV/$c = 5{,}34 \times 10^{-22}$ kg · m/s

Algunas constantes más

Velocidad de la luz, $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m/s
Constante de Planck, $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J · s y $\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}$ J · s
Permeabilidad del vacío, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2
Permitividad del vacío, $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ C^2((N · m^2)
Constante de Coulomb, $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 8{,}99 \times 10^{9}$ N · m^2/C^2

Identidades vectoriales

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad [\text{regla } BAC - CAB]$$

$$\nabla f = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{[Cartesianas]}$$

$$= \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} \quad \text{[Esféricas]}$$

$$= \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{[Cilíndricas]}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right)$$

$$+ \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right) \quad \text{[Cartesianas]}$$

$$= \hat{\mathbf{r}}\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\mathrm{sen}\,\theta A_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi}A_\theta\right] + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}A_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]$$

$$+ \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}A_r\right] \quad \text{[Esféricas]}$$

$$= \hat{\boldsymbol{\rho}}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_\phi\right] + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left[\frac{\partial}{\partial z}A_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho}A_z\right]$$

$$+ \hat{\mathbf{z}}\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi}A_\rho\right] \quad \text{[Cilíndricas]}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z \quad \text{[Cartesianas]}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\mathrm{sen}\,\theta A_\theta) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}A_\phi \quad \text{[Esféricas]}$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}A_\phi + \frac{\partial}{\partial z}A_z \quad \text{[Cilíndricas]}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{[Cartesianas]}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\theta}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad \text{[Esféricas]}$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{[Cilíndricas]}$$